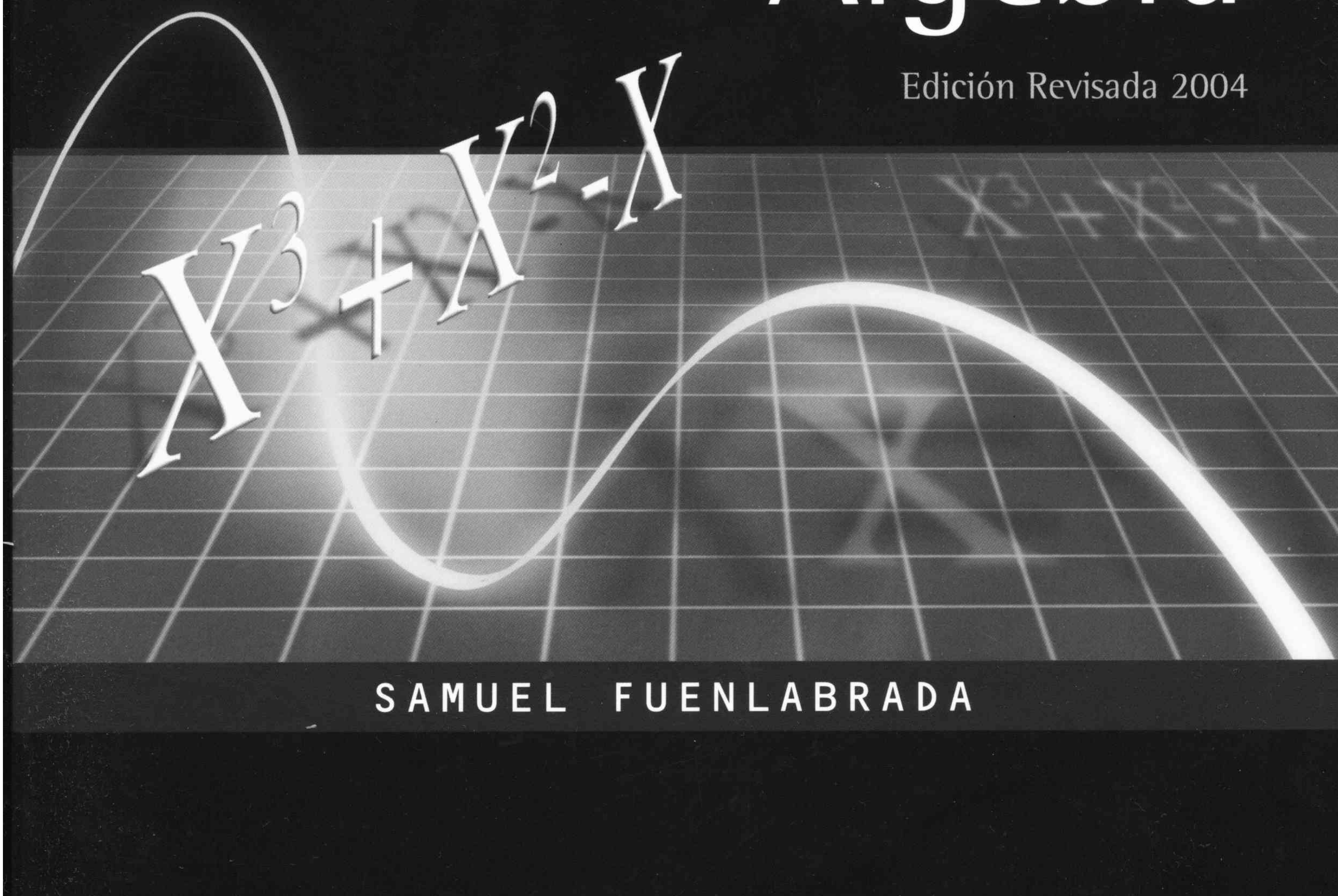
MATEMÁTICAS

Aritmética y Álgebra

Edición Revisada 2004



SAMUEL FUENLABRADA

McGraw Hill

INCLUYE DISQUETE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Edición revisada 2004

Samuel Fuenlabrada de la Vega Trucíos
Instituto Politécnico Nacional

Revisores técnicos:

Irma Fuenlabrada Velázquez
Departamento de Investigaciones Educativas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Politécnico Nacional

Javier León Sarabia
Instituto Politécnico Nacional

Desarrollo de software:

Arturo Arango Durán
Universidad Autónoma Metropolitana

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST.LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Gerente de división: José Ashuh Monayer
Gerente editorial: Emilio Javelly Gurría
Gerente de producto: Estela Delfín Ramírez
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Edición revisada 2004

McGraw-Hill Interamericana

McGRAW-HILLINTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.
Cedro Núm. 512, Col. Atlampa,
Delegación Cuauthémoc,
C.P. 06450, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 970-10-4708-7
(ISBN: 970-10-2963-1 edición original)

1234567890
Impreso en México

09876532104
Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
Imprimir en Marzo del 2004 en
Programas Educativos S.A.de C.V.
Calz. Chabacano No.65-A
Col. Asturias C.P.06850 Méx. D.F.
Empresa certificada por el Instituto Mexicano
de Normalización y Certificado A.C.Bajo la
Norma ISO-9002, 1994/NMX-CC-04 1995 con
él núm. De registro RSC-048 y bajo la Norma
ISO-14001:1996/SAA-1998, con el Núm.
de Registro RSAA-003

Contenido

Primera parte
Aritmética

Segunda parte
Álgebra

PRIMERA PARTE

Aritmética

CAPÍTULO 1

Conjuntos

1 Generalidades

Aceptamos como nociones intuitivas, y por consiguiente no definibles, las de unidad, conjunto, pertenencia a un conjunto, correspondencia y orden.

Las ideas de unidad y pluralidad (conjunto) las adquiere cada ser humano en los comienzos de su vida, cuando se manifiesta una de sus facultades primordiales: la diferenciación.

Los conceptos primarios de unidad y conjunto son correlativos, es decir, no son concebibles separadamente; lo mismo sucede con todas nuestras nociones, por ejemplo: alto y bajo, cerca y lejos, grande y pequeño, etcétera.

Conclusión: Un conjunto es cualquier colección de objetos bien definidos, de tal manera que se pueda decir siempre si un objeto pertenece o no al conjunto al cual nos referimos.

1.1 Recordemos algunos conceptos estudiados en el curso de secundaria

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas; los entes u objetos que los integran se llaman *elementos,* que se colocan dentro de este tipo de llaves { } y separados por comas.

Ejemplos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{\text{Rosa, Inés, Paula}\}$$

Al citar los elementos de un conjunto dentro de las llaves no deben repetirse, aunque sí pueden cambiar de lugar. Por ejemplo: el conjunto G formado por las vocales de la palabra matemáticas.

$$G = \{a, e, i\} \quad \text{o} \quad G = \{e, i, a\}$$

CONJUNTO VACÍO

Los conjuntos que no tienen elementos se denominan conjuntos *vacíos,* su símbolo es $\varnothing$. Por ejemplo: sea H el conjunto de los números naturales pares mayores que 2 y menores que 4.

$$H = \varnothing \qquad \text{no se expresa } H = \{\varnothing\}$$

También puede expresarse con las llaves vacías, así:

$$H = \{\,\}$$

PERTENENCIA

Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, para expresar que d es un elemento del conjunto A se emplea el símbolo $\in$, el cual se lee *"es un elemento de"* o *"pertenece a"*; por tanto, se indica:

$$d \in A$$

Si queremos expresar que b, c son elementos del conjunto A queda:

$$b, c \in A \quad \text{o también} \quad b \in A,\ c \in A$$

Cuando un elemento no pertenece a un conjunto, se usa el símbolo $\notin$ que se lee *"no es elemento de"* o *"no pertenece a"*. Por ejemplo: sea el conjunto

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

Para indicar que el número 6 no pertenece al conjunto D se escribe

$$6 \notin D$$

4

2 Inclusión (subconjuntos)

Si todos los elementos de un conjunto A también son elementos de un conjunto B, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B.

Para expresar esta relación entre dos conjuntos se usa el símbolo $\subset$ en la forma siguiente:

$$A \subset B$$

se lee "A es un subconjunto de B", "A está contenido en B", o "A está incluido en B".

También puede usarse la notación:

$$B \supset A$$

se lee *"B contiene a A"*. Por ejemplo:

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{3, 4\}$$
$$C = \{4, 5, 6\}$$

Podemos decir que B es un subconjunto de A: se expresa: $B \subset A$.

Respecto a D y A, no podemos decir que D sea un subconjunto de A, ya que D tiene el elemento 6 que no está en A: esto se expresa:

$$D \not\subset A$$

lo cual se lee "D *no es un subconjunto de* A", "D *no está contenido en* A", o "D *no está incluida en* A".

2.1 Número de subconjuntos de un conjunto

Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, determinar cuántos subconjuntos se pueden formar.

Sol. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Observa: el conjunto $\{a, b, c\}$ es un subconjunto de A, ya que todos sus elementos pertenecen a dicho conjunto, es decir:

$$A \subseteq A$$

Además, se acepta que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, o sea:

$$\varnothing \subset A$$

Los subconjuntos de un conjunto A que sean distintos de A se llaman *subconjuntos propios*.

El número de subconjuntos propios se expresa $2^n - 1$, donde n es el número de elementos del conjunto.

2.2 Conjunto potencia

A todos los subconjuntos de un conjunto, por ejemplo B, se les llama *conjunto potencia* de ese conjunto, se le designa con $P(B)$ y su cardinalidad es 2^n. Es decir, el número de elementos de P(B) es 2^n. Por ejemplo:

Si $B = \{a, b\}$

entonces $P(B) = \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varnothing$

3 Conjunto universal U

Si $U \neq \varnothing$ es cierto conjunto cuyos subconjuntos están en consideración, se dice que el conjunto dado es un *conjunto universal;* su símbolo es U. Por ejemplo:

Sea el conjunto U = {los estados de la República Mexicana}, serían subconjuntos, entre otros, los siguientes:

A = {Veracruz, Tlaxcala}
B = {Puebla}
G = {Oaxaca, Nuevo León, Durango}

A veces se citan los conjuntos sin ninguna otra indicación, sin saber a qué conjunto U pertenecen. Por ejemplo:

$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = \{8, 9, 0\}$

Entre otros, el conjunto U podría ser:

$U = \{1, 2, 3... 17\}$
U = {los números naturales}

4 Conjunto de conjuntos

En ocasiones los elementos de un conjunto son, a su vez, conjuntos, lo que hace pensar en *conjunto de conjuntos*. Por ejemplo: un año es un conjunto de conjuntos, porque el año es un conjunto de meses y éstos, a su vez, lo son de días.

5 Determinación de un conjunto

Es posible determinar o establecer un conjunto en cualquiera de las formas siguientes: por *enumeración* y por *descripción*.

Enumeración (también se le llama *extensión*). En este método se enumera cada uno de los elementos que lo forman, como ya lo hemos hecho en párrafos anteriores. Por ejemplo:

$A = \{1, 4, 5\}$
B = {Rosa, Inés, Paula}

Descripción (también se le llama *comprensión*). En esta forma se enuncia una propiedad o atributo que caracterice a todos los elementos del conjunto.

Por ejemplo:

D = {los números naturales menores que 5}
F = {los vehículos marca Nissan con placa del Distrito Federal}

Otra forma más práctica de definir conjuntos, también por *descripción*, es aquella en la cual se usa el símbolo "|" que en *teoría de conjuntos* se lee *"tal que"*, y se procede en la forma siguiente:

El conjunto A de los números naturales menores que 12.

Solución. Como aprendimos en el curso de secundaria, en este caso el conjunto universal es N. Éste tiene la propiedad de ser menor que 12, le ponemos un nombre a cualquier elemento de N, por ejemplo x, o algún otro símbolo que se nos ocurra, por ejemplo:

$$A = \{x \in N | x < 12\}$$

que se lee *"A es igual a x de N tal que x es menor que 12"*.

Este procedimiento nos permite simbolizar conjuntos que tengan una cantidad infinita de elementos.

6

6 Comparabilidad

6.1 Conjuntos iguales

Para que dos conjuntos sean *iguales* deben tener los mismos elementos y, en consecuencia, deben cumplirse simultáneamente.

$$A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A$$

esta relación se indica con el símbolo de igualdad " = ", el cual se lee *"igual a"* o *"es igual a"*; véase el siguiente ejemplo:

$$A = B$$

6.2 Desigualdad de conjuntos

Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, c, d\}$$

No se cumple en forma simultánea que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Esta relación se indica con el símbolo de *desigualdad* "$\neq$" que se lee *"desigual a", "es desigual a"* o *"es diferente"*, por ejemplo:

$$A \neq B$$

7 Operaciones con conjuntos

7.1 Intersección (su símbolo es $\cap$)

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que forman los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, y se representa con la notación $A \cap B$, se lee *"intersección de A y B"* o *"A intersección B"*.

Cuando el conjunto se determina por descripción, usando el símbolo "tal que", la intersección se expresa en la forma siguiente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{a, b, f, g\}$$
$$A \cap B = \{a, b\}$$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$$P = \{1, 2, 3\}$$
$$T = \{5, 6\}$$
$$P \cap T = \varnothing$$

Como en este caso, si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, se dice que los conjuntos son *ajenos entre sí,* o que son *disjuntos.*

7.2 Unión (su símbolo es ∪)

Si se reúnen los elementos de dos o más conjuntos para formar uno solo, a este conjunto que resulta se le llama *unión* de conjuntos.

La unión se representa con la notación $A \cup B$: ésta se lee *"unión de A y B"* o *"A unión B".*

Cuando el conjunto se establece por descripción, usando el símbolo "tal que", la unión se expresa en la forma siguiente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$P = \{a, b, c, d\}$$
$$M = \{c, d, f, g\}$$
$$P \cup M = \{a, b, c, d, f, g\}$$

Observa los ejemplos siguientes:

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cup A = A$$

7.3 Uso de paréntesis

Los paréntesis indican qué operación se debe hacer primero.

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$$T = \{a, m, r\}$$
$$P = \{a, p, r, s\}$$
$$L = \{s, t, m\}$$
$$(T \cup P) \cap L =$$

inicialmente obtenemos $T \cup P$

$$T \cup P = \{a, m, p, r, s\}$$

ahora, debemos intersecar $(T \cup P) \cap L$

$$(T \cup P) \cap L = \{s, m\}$$

Ejemplo:

Usando los mismos conjuntos antes señalados obtengamos:

$$T \cup (P \cap L) =$$

inicialmente obtenemos

$$P \cap L = \{s\}$$

ahora, podemos unir

$$T \cup (P \cap L)$$
$$T \cup (P \cap L) = \{a, m, r, s\}$$

Conclusión: La operación $(T \cup P) \cap L$ es distinta de $T \cup (P \cap L)$.

7.4 Complemento de un conjunto

Cuando se ha establecido un conjunto universal U, la diferencia de $U - A$ se le llama *complemento de A* y se indica A'; el apóstrofo señala que hemos formado el complemento de A.

Cuando el conjunto se expresa por descripción, se usa el símbolo "tal que", el cual se representa en la forma siguiente:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Ejemplo:

$$U = \{a, b, c, d, f, g\}$$
$$A = \{a, b, c\}$$
$$A' = \{d, f, g\}$$

de donde

$$A \cup A' = U$$

Observa las operaciones siguientes:

$$A \cap A' = \varnothing$$
$$A \cup A' = U$$
$$(A')' = A$$
$$\varnothing' = U$$

7.5 Diferencia entre conjuntos

Dados los conjuntos A y B, el conjunto *diferencia* se define en la forma siguiente: la diferencia $A - B$, en este orden, es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Usando el símbolo "tal que", el conjunto se determina por descripción y se representa en la forma siguiente:

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\}$$

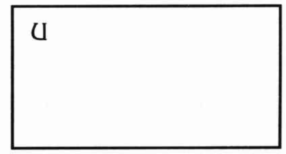
Ejemplos:

$$A = \{a, b, c, d, f\}$$
$$B = \{a, b\}$$
$$A - B = \{c, d, f\}$$

8

Diagramas de Venn-Euler

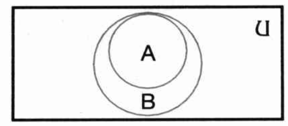
Los diagramas de Venn son representaciones gráficas de los conjuntos porque nos permiten visualizarlos. En ellos el conjunto universal U está representado por puntos, que no se indican, en el interior de un rectángulo.



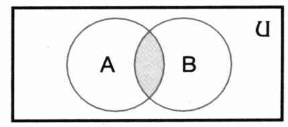
Además, cualquiera de sus conjuntos no vacíos se representa por curvas cerradas.

Ejemplos:

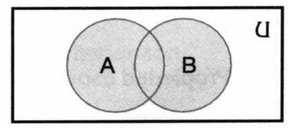
Los subconjuntos A y B de U son tales $A \subset B$.



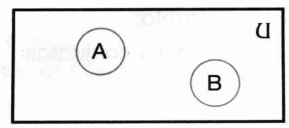
El área sombreada representa el conjunto $A \cap B$.



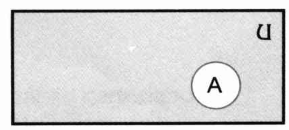
El área sombreada representa el conjunto $A \cup B$.



$$A \cap B = \varnothing$$



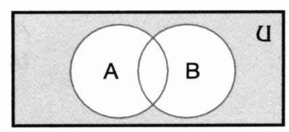
El área sombreada representa el conjunto complementario A' de A en U.



El área sombreada representa el conjunto complementario.

$(A \cup B)'$ de $(A \cup B)$ en U

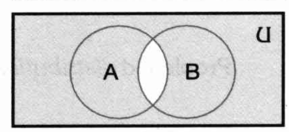
$(A \cup B)' = \{x \in U \mid x \notin A \cup B\}$



El área sombreada representa el conjunto complementario.

$(A \cap B)'$ de $(A \cap B)$ en U

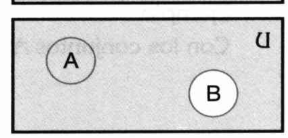
$(A \cap B)' = \{x \in U \mid x \notin A \cap B\}$



El área sombreada representa:

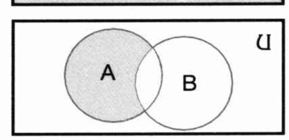
$A \cup B'$

$A \cup B' = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\}$



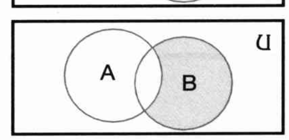
El área sombreada representa $A - B$:

$A - B = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\}$



El área sombreada representa $B - A$:

$B - A = \{x \in U \mid x \in B, x \notin A\}$



A pesar de que algunos teoremas o propiedades se puedan representar por medio de los diagramas de Venn, es inaceptable que un teorema sea demostrado únicamente con el diagrama.

9

Propiedades de las operaciones de intersección y unión de conjuntos

Propiedad *conmutativa*

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 4\}$$

$A \cap B = \{2, 3\}$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
$B \cap A = \{2, 3\}$	$B \cup A = \{1, 2, 3, 4\}$
$\{2, 3\} = \{2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Propiedad *asociativa*

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 4\}$$
$$D = \{4, 5\}$$

$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$	$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$
$A \cap B = \{2, 3\}; B \cap D = \{4\}$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}; B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$
$(A \cap B) \cap D = \varnothing A \cap (B \cap D) = \varnothing$	$(A \cup B) \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\varnothing = \varnothing$	$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
	$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Propiedad *distributiva*

Ejemplo:
Con los conjuntos A, B, D, que se señalaron en el párrafo anterior tenemos:

$$A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$$

$A \cap (B \cup D) =$	$A \cap B = \{2, 3\}$
$B \cup D = \{2, 3, 4, 5\}$	$A \cap D = \varnothing$
$A \cap (B \cap D) = \{2, 3\}$	$(A \cap B) \cup (A \cap D) = \{2, 3\}$

$$\{2, 3\} = \{2, 3\}$$

$$A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$$

$A \cup (B \cap D) =$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
$B \cap D = \{4\}$	$A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A \cup (B \cap D) = \{1, 2, 3, 4\} \; (A \cup B) \cap (A \cup D) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

10

Producto cartesiano

Si tenemos los conjuntos:

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{c, d, f\}$$

El *producto cartesiano* de estos dos conjuntos, $A \times B$ (en este orden), *es el conjunto de todos los posibles pares ordenados*, tales que *la primera* componente del par ordenado es un elemento de A y *la segunda* componente es un elemento de B.

La expresión $A \times B$ se lee *"A cruz B"* y se expresa, por descripción, en la forma siguiente:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

esta expresión se lee: la pareja (x, y) tal que x pertenece al conjunto A, y pertenece al conjunto B. La rayita vertical se lee "tal que".

Si se desarrolla el producto, la expresión queda así:

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f)\}$$

Los elementos del conjunto producto forman *"parejas ordenadas"*; en el ejemplo anterior son:

$$\{(a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f)\}$$

En la pareja (a, c), a se denomina *primera componente* y c *segunda componente.*

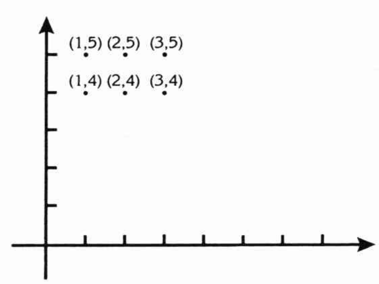
En el caso particular de que los elementos de los conjuntos sean números *reales,* es costumbre llamar a la *primera* componente de la "pareja ordenada" *abscisa* y a la *segunda ordenada.*

Ejemplo:

Sean los conjuntos A y B; obtener el producto cartesiano y representarlo en el plano cartesiano.

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{4, 5\}$$
$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

Las parejas se representan como puntos en el plano cartesiano:



EJERCICIO 1

1. Señala los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

El conjunto de las cinco vocales.
El conjunto de los tres primeros meses del año.

El conjunto de los días de la semana que principian con la letra c.
El conjunto de los alumnos de tu grupo que tienen más de 25 años de edad.
El conjunto de los meses del año cuyo nombre principia con la letra M.

2. Enuncia por descripción, y en la forma más adecuada, los conjuntos que forman los siguientes elementos:

$F = \{x, y, z\}$
$G = \{\text{abril, agosto}\}$
$H = \{2, 4, 6\}$
$J = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
$L = \{\text{primavera, verano, otoño, invierno}\}$

3. Dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{x \in N \mid x < 4\}$
$C = \{x \in N \mid x \text{ divisible entre } 3\}$
$D = \{1, 2, 3\}$
$E = \{a, b, d\}$

Escribe, en el espacio correspondiente, el símbolo que convenga: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, para obtener una proposición verdadera.

a A	0 B	7 D	E A
g A	2 B	18 C	B D
2 C	f E	10 C	D C

Señala cuáles conjuntos son iguales, dos que no sean iguales y uno que sea subconjunto de otro.

Considerando el conjunto D, señala ¿cuántos subconjuntos propios se pueden formar y cuáles son?

4. Dados los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = \{6, 7, 8\}$
$E = \{7\}$
$G = \{5, 9, 0\}$

obtener:

$A \cup D =$
$D \cup A =$
$D \cup E =$
$E \cup G =$
$G \cup A =$
$D \cup D =$
$E \cup \varnothing =$

5. Si $U = \{x \mid x \in N, x \leq 9\}$ (el símbolo $\leq$ se lee "menor e igual a")

$A = \{x \mid x \in N, x \leq 4\}$
$B = \{x \mid x \in N, x < 3\}$
$C = \{x \mid x \in N, 3 \leq x \leq 7\}$

Representa estas expresiones con diagramas de Venn.

$B \subset A$ | $A \cup B$ | $B \cap C$ | A'

B' | C' | $(A \cup C)'$ | $A - B$

6. Con los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 3, 7\}$
$C = \{3, 7, 8, 9\}$

comprobar:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Obtener:

$A \cup \varnothing =$
$(A')' =$
$A \cap A' =$
$A \cup A =$
$A \cup U =$
$A \cap A =$
$A \cap U =$
$A - A =$

Obtener:

$A \times B =$
$B \times C =$
$C \times B =$
$B \times A =$

CAPÍTULO 2

Los números reales

Dios creó el número natural, todo lo demás es obra del hombre.

Kronecker

1 Los números reales en la recta numérica

Nuestra primera experiencia aritmética fue *contar* el número de elementos de un conjunto. Para ello usamos los símbolos designados por 1, 2, 3,..., los cuales se denominan números *enteros positivos*. Estos números también reciben el nombre de *naturales*.

Nuestro siguiente paso consistió en determinar el número total de elementos al reunir dos o más conjuntos, lo que requirió de la operación llamada *adición*.

Se expresa:

$$a + b = c$$

Para determinar el número total de objetos en dos o más conjuntos del mismo número de elementos se emplea la operación llamada *multiplicación*.

La cual se expresa:

$$mn = p$$

Si consideramos el problema de dada la suma c de dos números a y b, y dado uno de ellos, por ejemplo a y tratamos de obtener b, la solución de este problema requiere de la operación inversa de la adición, es decir, la *sustracción*.

$$c - a = b$$

En un sistema limitado a los números enteros positivos es imposible restar un número mayor de otro menor. Para hacer posible la sustracción, en estos casos se introducen los números *enteros negativos*, los cuales designamos con los símbolos -1, -2, -3,...

Si restamos un número entero de sí mismo obtenemos el número *cero*, designado con el símbolo 0. Nótese que *el cero no es un número entero positivo ni entero negativo*.

Los números *enteros* incluyen los enteros positivos, los enteros negativos y el cero.

Dado el producto p de dos números enteros m y n, y dado el factor $n \neq 0$, hallar el otro factor m. La solución de este problema requiere de la operación inversa de la multiplicación, o sea, la *división*, la cual se expresa:

$$\frac{p}{n} = m \text{ con } n \neq 0$$

La división de p entre n se indica con el signo de división, $p \div n$, o escribiendo los dos números en forma de fracción $\frac{p}{n}$, en donde p es el dividendo y se le llama *numerador;* n es el divisor y se le llama *denominador* y m es el resultado de la operación y recibe el nombre de *cociente*.

Debido a que algunas operaciones no son exactas, por ejemplo $\frac{3}{5}$, surgió la necesidad de contar con otro tipo de números, los cuales se llaman *racionales.*

El sistema de numeración se amplía y queda integrado por los números *naturales,* los números *enteros* y los números *racionales.*

Ejemplos:

Números naturales: 3, 4, 7, 12,...
Números enteros positivos: 3, 4, 7, 12,...
Números enteros negativos: -1, -2, -15,...

Números racionales $-\frac{7}{5}, \frac{3}{4}, 4, -7, \ldots$

Efectivamente, los números 4 y -7 son números ***racionales***, ya que:

$$4 = \frac{4}{1}$$

$$-7 = -\frac{7}{1}$$

Observa detenidamente: al obtener $\sqrt{9} = \pm 3$ se cumple, y en operaciones semejantes aun cuando el resultado no es único ya que obtuvimos dos, cumplen la comprobación de la operación: $(+3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$ son *racionales* pues ya indicamos que: $3 = \frac{3}{1}$ y $-3 = -\frac{3}{1}$.

Ahora consideremos el caso en que deseamos obtener la raíz cuadrada de 2, lo que expresamos $\sqrt{2}$. El resultado no podemos expresarlo como el *cociente de dos enteros* y, además, su representación decimal no resulta *periódica;* en consecuencia, su resultado *no es un número racional,* por lo que a números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, π, e,... se les llama *irracionales.*

Conclusión: Los números ***naturales, los enteros,*** los ***racionales*** y los ***irracionales*** constituyen el conjunto de los ***números reales.***

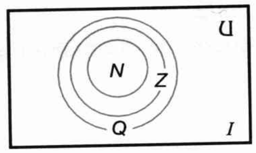
Todos los números reales podemos representarlos en la recta numérica.

Recordemos: la recta con sus puntos que representan números se llama recta numérica, la cual se divide en partes iguales con base en un segmento *"unidad"* escogido convenientemente, sin que sea necesario que, por ejemplo, sea de un centímetro:

En matemáticas, se trabaja frecuentemente con conjuntos de números, por lo que se han reservado las siguientes letras mayúsculas para indicar:

N	al conjunto de los números ***naturales.***
Z	al conjunto de los números ***enteros.***
Q	al conjunto de los números ***racionales.***
I	al conjunto de los números ***irracionales.***
R	al conjunto de los números ***reales.***

Considerando a los números reales como el conjunto U, tenemos:



Los números naturales están incluidos en los enteros y éstos, a su vez, en los racionales; los irracionales son el complemento que se requiere para tener el conjunto de los números *reales.*

2 Orden en los números reales

Si $a, b \in R$ y si existe además $x \in R$, que cumple con $a = b + x$, se dice que a es *"mayor que"* b, lo que se expresa $a > b$, o también que b es *"menor que"* a, lo cual se denota $b < a$.

Ejemplo:

Con 4 y $\frac{5}{3}$ decimos que 4 es mayor que $\frac{5}{3}$ porque existe $\frac{7}{3} \in R$ que cumple con $4 = \frac{5}{3} + \frac{7}{3}$. Esta afirmación se expresa $4 > \frac{5}{3}$ o $\frac{5}{3} < 4$.

3 Ley de tricotomía

Se dice que se cumple con la *ley de tricotomía* si dados $a, b \in R$ se cumple una y sólo una de las proposiciones siguientes:

$$a = b;\ a > b;\ a < b$$

4 Principio del buen orden

Este principio señala que todo subconjunto de los R, no vacío, tiene un *elemento mínimo.*

Ejemplo:

Si $A = \{4, 5, 6\}$ el elemento mínimo es el 4.

5 Propiedades de las operaciones de los números reales

Para estudiar las operaciones que podemos realizar con los números reales recordemos sus propiedades, algunas de ellas las estudiaste en tu curso de segunda enseñanza.

Operación binaria. Es aquella en que tomamos dos elementos de un conjunto y realizada una operación se obtiene como resultado *un solo elemento.*

Propiedad de cerradura o clausura. Se presenta cuando el resultado obtenido con una operación definida *no sale* del conjunto a que pertenecen los elementos tomados.

Propiedad de la existencia del neutro. Se comprueba cuando existe un elemento y sólo uno del conjunto, tal que al realizar con éste la operación definida, y cualquier otro elemento del conjunto, *no se altera* el valor tomado.

Propiedad de la existencia del inverso. Se presenta cuando dado cualquier elemento de un conjunto *existe otro elemento (único)* del mismo conjunto, tal que al aplicar la operación que se haya definido para ambos, por la derecha y por la izquierda, dé como resultado el elemento neutro.

Propiedad conmutativa. Señala que dado cualquier número de elementos de un conjunto, el orden en que se aplique la operación definida *no altera el resultado.*

Propiedad asociativa. Señala que dados tres elementos a, b, c, de un conjunto podemos *asociarlos* como nosotros deseemos sin afectar el resultado de la operación.

Propiedad distributiva. Señala que dados tres elementos a, b, c de un conjunto, *el producto de uno por la suma de los otros dos es igual a la suma de los productos del primero por cada uno de los otros dos* y viceversa.

5.1 Operaciones con el conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales es aquel que *se usa para contar,* se expresa:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Las operaciones fundamentales de los números naturales son la *suma* y la *multiplicación,* las cuales son operaciones *binarias.*

Con $a, b, c \in N$ tenemos:

1 PROPIEDADES DE LA SUMA

Cerradura

$$a + b = c$$

Ejemplo:

$3 + 4 = 7$; por tanto, es cerrada.

Asociativa

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo:

$3 + 4 + 2 = (3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2) = 9$; por tanto, es asociativa.

Existencia del neutro

No existe ningún número a del conjunto de los números N que sumado a cualquier otro número natural b nos dé b.
Es decir, $a + b \neq b$; por tanto, no existe elemento neutro.

2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Cerradura

$$(a)(b) = c$$

Ejemplo:

$3 \times 4 = 12$; por tanto, es cerrada.

Asociativa

$$(a)(b)(c) = a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$$

Ejemplo:

$(2)(3)(4) = 2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)4 = 24$; por tanto, es asociativa.

Distributiva

Por la izquierda $a(b + c) = (a)(b) + (a)(c)$
Por la derecha $(b + c)a = (b)(a) + (c)(a)$

Ejemplos:

$4(3 + 5) = (4)(3) + (4)(5)$	$(3 + 5)4 = (3)(4) + (5)(4)$
$(4)(8) = 12 + 20$	$(8)(4) = 12 + 20$
$32 = 32$	$32 = 32$

por lo tanto, es distributiva.

Existencia del neutro

Existe un número natural, el *uno,* que multiplicado por cualquier otro del conjunto da como resultado el mismo número.

$$1 \cdot a = a$$

Ejemplo:

$1 \times 7 = 7$, por tanto, existe el elemento neutro.

Existencia del inverso

Dado cualquier número en el conjunto, *no existe* ningún otro que al multiplicarse con éste nos dé el elemento neutro que es el *uno.*

Ejemplo:

$3 \times \frac{1}{3} = 1$, pero $\frac{1}{3}$ no es un número natural.

5.2 Operaciones con el conjunto de los números enteros

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Las operaciones fundamentales de los números enteros son la *suma* y la *multiplicación,* las cuales son operaciones binarias.

Con a, b, $c \in Z$ tenemos:

1 PROPIEDADES DE LA SUMA

Cerradura

$$a + b = c$$

Ejemplo:

$-3 + 2 = -1$; por tanto, es cerrada.

Asociativa

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

Ejemplo:

$3 + 4 - 2 = 3 + (4 - 2) = (3 + 4) - 2 = 5$, por tanto, es asociativa.

Existencia del neutro

Existe el elemento neutro, o sea el *cero,* tal que al sumarlo con cualquier otro elemento del conjunto da como resultado el mismo número.

$$a + 0 = a$$

Ejemplo:

$-1 + 0 = -1$, por tanto, existe elemento neutro.

Existencia del inverso

Dado cualquier número en el conjunto, *existe* otro (su simétrico) que al sumarse con el primero nos da como resultado el elemento neutro.

$$a + (-a) = 0$$

Ejemplo:

$-3 + 3 = 0$, por tanto, existe elemento inverso.

Conmutativa

$$a + b = b + a$$

Ejemplo:

$-3 -4 = -4 -3$, por tanto, es conmutativa.

2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Cerradura

$$(a)(b) = (c)$$

Ejemplo:

$(-4)(-6) = 24$; por tanto, es cerrada.

Asociativa

$$(a)(b)(c) = a(bc) = (ab)c$$

Ejemplo:

$(-2)(4)(-2) = [(-2)(4)](-2) = -2[(4)(-2)] = 16$; por tanto es asociativa.

*D*istributiva

Por la izquierda $a(b + c) = ab + ac$
Por la derecha $(b + c)a = ba + ca$

Ejemplo:

$-3(4 + 5) = (-3)(4) + (-3)(5)$	$(4 + 5)(-3) = (4)(-3) + (5)(-3)$
$-3(9) = -12 - 15$	$(9)(-3) = -12 - 15$
$-27 = -27$	$-27 = -27$

por tanto, es distributiva.

*E*xistencia del neutro

Existe el elemento neutro, o sea el *uno*, tal que multiplicado con cualquier elemento del conjunto da como resultado el mismo número.

$$(1)(a) = a$$

Ejemplo:

$(1)(-7) = -7$, por tanto, existe elemento neutro.

*E*xistencia del inverso

Dado cualquier número en el conjunto, *no existe* ningún otro que al multiplicarse por el primero nos dé como resultado el elemento neutro que es el *uno*.

Ejemplo:

$(-2)(-\frac{1}{2}) = 1$, pero $-\frac{1}{2}$ no es un número entero.

5.3 Operaciones con el conjunto de los números racionales

$$Q = \{..., -1, ..., -\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{4}, ..., 0, ..., \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2}, ..., 1...\}$$

Las operaciones fundamentales de los números racionales son la *suma* y la *multiplicación*, las cuales son operaciones binarias.

$$\text{Con } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$$

1 PROPIEDADES DE LA SUMA

*C*erradura

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Ejemplo:

$\frac{5}{4} + \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5-2-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, por tanto, es cerrada.

Asociativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}=\frac{3-2}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$$

$$=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{4}+\left(\frac{-3+4}{6}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12},$$

por tanto, es asociativa.

Conmutativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{4+3}{12}=\frac{3+4}{12}$$

$\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$ de donde es conmutativa.

Existencia del neutro

Existe el elemento neutro, o sea el *cero,* tal que al sumarlo con cualquier otro elemento del conjunto da como resultado el mismo número.

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$, por tanto, existe elemento neutro.

Existencia del inverso

Dado cualquier número en el conjunto, *existe* otro (su simétrico) que al sumarse ambos nos da como resultado el elemento neutro.

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a-a}{b}=0$$

Ejemplo:

$\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=0$, por tanto, existe elemento inverso.

2 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Cerradura

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}, \text{ de donde, es cerrada.}$$

Asociativa

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left[\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right]$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\left[\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right]\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$\left(\frac{2}{12}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{6}{15}\right)$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10}, \text{ por tanto, es asociativa.}$$

Conmutativa

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{15}, \text{ por tanto, es conmutativa.}$$

Distributiva

Por la izquierda $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$

Por la derecha $\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\frac{a}{b}=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{13}{15}\right)=\frac{3}{20}+\frac{6}{12}$$

$$\frac{39}{60}=\frac{39}{60}$$

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{20}+\frac{6}{12}$$

$$\frac{39}{60}=\frac{39}{60}$$

de donde, es distributiva.

Existencia del neutro

Existe el elemento neutro, o sea el *uno,* **tal que al multiplicarlo con cualquier otro elemento del conjunto da como resultado el mismo número.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)(1) = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{3}\right)(1) = \frac{1}{3}, \text{ por tanto, existe elemento neutro.}$$

Existencia del inverso

Dado cualquier número en el conjunto, *existe* **otro (su recíproco) con el que al multiplicarlo nos da como resultado el elemento neutro.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ab} = 1$$

Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{12} = 1, \text{ por tanto, existe elemento inverso.}$$

CAPÍTULO 3

Estructuras numéricas

Las estructuras numéricas son: *grupo, anillo* y *campo.*

1 Grupo

Se dice que un conjunto con *una* operación binaria definida forma grupo si cumple las siguientes propiedades: *cerradura, asociativa, existencia del neutro* y *existencia del inverso;* si además cumple la propiedad *conmutativa* se le llama *grupo abeliano.*

2 Anillo

Un anillo es un conjunto con *dos* operaciones binarias definidas —a una de las operaciones se le llama aditiva y a la otra multiplicativa— que cumplen las propiedades siguientes: la aditiva debe formar *grupo abeliano* (cerradura, asociativa, elemento neutro, elemento inverso, conmutativa); la multiplicativa deberá ser: *cerrada, asociativa* y *distributiva respecto a la aditiva* por la derecha y por la izquierda.

Si, además, la operación multiplicativa es conmutativa se le llama *anillo conmutativo.*

3 Campo

Un campo es un conjunto con *dos* operaciones binarias definidas —a una de las operaciones se le llama aditiva y a la otra multiplicativa— que cumplen las propiedades siguientes: la aditiva debe formar *grupo abeliano* (cerradura, asociativa, elemento neutro, elemento inverso, conmutativa); la multiplicativa debe formar *grupo,* no necesariamente abeliano, pero si lo es se dirá que el campo es *conmutativo.*

Además, la operación multiplicativa debe ser *distributiva,* por la derecha y por la izquierda, respecto a la aditiva.

4

La estructura de los números reales

Con base en las estructuras señaladas (grupo, anillo y campo) y las propiedades de los números naturales, enteros y racionales estudiadas en el capítulo anterior podemos determinar la estructura que tienen cada uno.

Números naturales. Este tipo de números *no* tienen ninguna estructura.

Números enteros. Estos números con la *suma* forman *un grupo abeliano;* con la *multiplicación no tienen* estructura *de grupo*; y con la suma y la multiplicación tienen estructura *de anillo.*

Números racionales. Con la suma y la multiplicación estos números forman *un grupo abeliano;* con la suma y la multiplicación *tienen estructura de anillo;* y con la suma y la multiplicación *tienen estructura de campo.*

Números irracionales. Este tipo de números no forman ninguna estructura, sólo *complementan* a los racionales.

Los números reales *tienen estructura de campo.*

Operaciones con los números reales

Hemos estudiado las propiedades y la estructura numérica de los números reales, ahora veamos las operaciones que podemos realizar con ellos.

1 Operaciones con los números naturales

Las operaciones fundamentales con los números naturales son la *suma* y la *multiplicación.*

Si $a, b \in N$, la suma se expresa $a + b$, la multiplicación $a \times b$, $a \cdot$ b, $(a)(b)$, ab.

Los elementos de la suma se llaman *sumandos* y los de la multiplicación *factores.*

1.1 Múltiplos y divisores

Con $a, b, c \in N$; si $a = bc$ entonces a es *múltiplo* de b y de c; b y c son divisores de a.

Ejemplo:

$7 \times 3 = 21$, en donde 21 es múltiplo de 7 y 3; 7 y 3 son divisores de 21.

La *divisibilidad* es la parte de la aritmética que estudia las condiciones que deben reunir dos números para que uno de ellos sea dividido de manera *exacta* entre el otro; estas condiciones se llaman *caracteres* o *criterios de divisibilidad.*

Suponemos que el alumno conoce los criterios de divisibilidad usuales, por lo que únicamente haremos un breve repaso.

Todo número es divisible entre *uno;* todo número terminado en *cero* o cifra *par* es divisible entre 2; si la *suma* de las cifras que forman un número es divisible entre 3, entonces todo el número es divisible entre 3; todo número terminado en *cero* o en *cinco* es divisible entre 5; si la *suma* de las cifras que forman un número *es divisible* entre 9, entonces todo el número es divisible entre 9.

2 Números primos

Los números *naturales* que sólo son *divisibles* entre *sí mismos* y la *unidad* se llaman *números primos;* los números que no son primos se llaman *compuestos.*

Ejemplo:

Son primos los números 2, 3, 11,...

2.1 Criba de Eratóstenes

Para formar una tabla de los números primos inferiores a cierto límite se usa el método llamado *criba de Eratóstenes* la cual consiste en lo siguiente: se escribe la serie de los números naturales hasta el número que se quiera, supongamos, como ejemplo, hasta el 40.

A continuación, se tachan los números que son múltiplos de los números primos, principiando con 2, 3,...

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~

Los números *no* tachados son *primos.* Dado un número n, para averiguar *si es primo o no,* sin necesidad de construir la tabla, es suficiente con determinar si es divisible entre 2, 3, 5, 7, 11,... (números primos); si se llega hasta un divisor primo p cuyo cuadrado p^2 es mayor que el número dado n, sin lograr división exacta, dicho número es primo, por tanto, hubiera quedado sin tachar en la tabla anterior.

2.2 Teorema de Eratóstenes

Criterio para conocer si un número es primo. *Un número es primo si no es divisible entre ninguno de los números primos cuyo cuadrado sea menor que dicho número.*

Ejemplo:

Determinar si el número 37 es primo.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 3^2 &= 9 \\ 5^2 &= 25 \\ \hline 7^2 &= 49 \end{aligned}$$

37 **no** es divisible entre 2, 3, 5, por tanto, es un número primo.

$$4, 9, 25 < 37$$

2.3 El número primo relativo

Los números *primos relativos* son aquellos cuyo m.c.d. (máximo común divisor) es el uno.

Ejemplo:

Son primos relativos el 4 y el 9.

3 Teorema fundamental de la aritmética

Todo *número compuesto* puede expresarse como *un producto de factores primos* de forma única.

3.1 Descomposición de un número en sus factores primos

Es posible descomponer un número compuesto en el producto de sus factores primos; para ello dividimos el número entre el *menor divisor primo posible,* el cociente obtenido *se vuelve a dividir* entre el menor divisor primo posible y se repite la operación hasta obtener un *cociente* igual a la *unidad.* El *producto* de los *divisores primos* hallados es *igual* al número dado. Es costumbre disponer esta operación escribiendo a la izquierda de una raya vertical el número dado y los cocientes sucesivos; a la derecha de la raya se escriben los divisores primos obtenidos.

Ejemplo:

Descomponer en sus factores primos el número 24.

24	2	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
12	2	
6	2	$24 = 2^3 \cdot 3$
3	3	
1		

Al proceso de descomponer un número en factores, se le llama *factorización.*

4 Mínimo común múltiplo de varios números

Ejemplo:

Sean los números 4 y 6.

Los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,...
Los múltiplos de 6 son: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54,...

Observemos que los múltiplos comunes de 4 y 6 son los números 12, 24 y 36, de ellos el menor es el 12.

El *menor múltiplo común* de 4 y 6 es 12; recibe el nombre de *mínimo común múltiplo* y se acostumbra anotar m.c.m. (4, 6) = 12. Por comodidad, en lo sucesivo nos referiremos a él en la siguiente forma: mcm.

Ejemplo:

Sean los números 2, 4, 12.

Los múltiplos de 2 son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,...
Los múltiplos de 4 son 4, 8, 12, 16,...
Los múltiplos de 12 son 12, 24, 36,...
Por tanto, el mcm (2, 4, 12) = 12.

Si sucede como en el ejemplo, uno de los números propuestos es *múltiplo* de cada uno de los restantes, es el mcm.

El mcm de varios números es el *menor de los múltiplos comunes* a dichos números.

El cálculo puede realizarse por *descomposición* de los números dados en sus factores primos; para ello se procede como se indica a continuación.

Ejemplo:

Obtener el mcm de los números 12 y 18.

12	2		18	2
6	2		9	3
3	3		3	3
1			1	

$12 = 2^2 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3^2$
mcm $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

Definición. *El producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a la mayor potencia es el mcm.*

Los factores primos comunes y no comunes obtenidos deben ser *divisores* del mcm, si no es así la operación está mal.

5
Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

Sean los números 12 y 18.

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12

Los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6, 9, 18

Observamos que los *divisores comunes* de 12 y 18 son 1, 2, 3, 6, de ellos *el mayor divisor común* es 6; éste recibe el nombre de *máximo común divisor* de 12 y 18 y se acostumbra anotar m.c.d(12, 18) = 6. Por comodidad, en lo sucesivo nos referiremos a él en la forma siguiente: mcd.

Ejemplo:

Sean los números 9 y 18; obtener el mcd.

Los divisores de 9 son 1, 3, 9

Los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6, 9, 18

Por tanto, el mcd (9, 18) = 9

Si sucede como en el ejemplo, uno de los números propuestos es *divisor del otro,* éste es el mcd de ambos números.

Ejemplo:

Obtener el mcd de los números 64, 40, 32

Los divisores de 64 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

Los divisores de 40 son 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Los divisores de 32 son 1, 2, 4, 8, 16, 32

Por tanto, el mcd (64, 40, 32) = 8

El máximo común divisor de varios números es el *mayor de los divisores comunes* de dichos números.

El cálculo puede hacerse por descomposición de los números dados en sus factores primos, como se indica a continuación.

Ejemplo:

Obtener el mcd de los números 12 y 18

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2$

mcd $(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Definición. *El producto de los factores primos comunes elevados a la menor potencia es el mcd.*

El mcd debe dividir a los números de los cuales se obtuvo, si no es así la operación está mal.

EJERCICIO 2

1. Expresa por enumeración los siguientes conjuntos:

$$P = \{x \in N \mid x < 7\}$$
$$T = \{a \in Z \mid -2 < a \leq 5\}$$
$$B = \{p \in Z \mid -3 \leq p < 0\}$$
$$F = \{x \in N \mid x < 12, x \text{ es impar}\}$$
$$A = \{x \in Z \mid 5x^2 - 6x = 0\}$$

2. Expresa por descripción, usando el símbolo "tal que", los siguientes conjuntos:

A = {Los números naturales menores que 10}

B = {Los números enteros iguales y mayores que -3 y menores que 2}

Si D es el conjunto de seres humanos, expresa el conjunto de mujeres que estudian en el Instituto Politécnico Nacional.

Si G es el conjunto de los animales, expresa el conjunto de los animales carnívoros y el conjunto de los animales herbívoros.

3. Expresa el concepto del mcm.

4. Expresa el concepto del mcd.

5. **Criba de Eratóstenes.** Escribe una tabla de números del 1 al 100, a continuación tacha los números que son múltiplos de los números primos 2, 3,... Lista los números primos menores al número 100.

6. Da el nombre de la propiedad de los números que justifica cada expresión.

$3(4)(5) = (3 \cdot 4) \cdot 5$

$8 \cdot 1 = 8$

$4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

$-4(3 + 5) = (-4)(3) + (-4)(5)$

$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

$\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)\frac{5}{4} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$

Sol. Asociativa, elemento neutro, inverso multiplicativo, distributiva, conmutativa, distributiva.

7. Obtén el mcm y el mcd de los números listados a continuación:

20, 42, 50	*Sol.* 2 100, 2	144, 72, 36	*Sol.* 144, 36
8, 12, 18	*Sol.* 72, 2	12, 24, 48	*Sol.* 48, 12
10, 14, 25	*Sol.* 350, 1	17, 150, 315	*Sol.* 53 550, 1
3, 5, 7	*Sol.* 105, 1	10, 63, 48	*Sol.* 5 040, 1

6 Operaciones con los números enteros

6.1 Valor absoluto

El valor absoluto de un número entero es *el valor* que tiene el número cuando *prescinde del signo.*

Ejemplos:

Número	Valor absoluto
-3	$\lvert -3 \rvert = 3$
$+6$	$\lvert +6 \rvert = 6$
0	$\lvert 0 \rvert = 0$

Observa que el valor absoluto se representa encerrando el número entre dos rayitas.

6.2 Números simétricos

Números *simétricos u opuestos* son aquellos que tienen el mismo valor absoluto y signo distinto.

Ejemplo:

$(+7)$ y (-7) son simétricos.

6.3 Uso de paréntesis

Cuando un grupo de números sean manejados como un solo número se encierran en *paréntesis* ( ), *corchetes* [ ] o *llaves* { }. Estos símbolos también sirven para indicar que se van a efectuar ciertas operaciones y el *orden* en el cual se realizarán.

Si existen *signos de agrupación* contenidos dentro de otro, iniciamos la solución de la operación *eliminando el que se encuentra más al interior.*

Ejemplo:

$$[(4 \cdot 3) + (7 - 2)] - (8 - 3) + (4 - 2) = 12 + 5 - 5 + 2 = 14$$

En una operación sin signos de agrupación que incluye sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, *efectuamos primero las multiplicaciones y las divisiones, enseguida las sumas y las restas, todo de izquierda a derecha.*

Ejemplo:

$$3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 + 16 \div 8 = 18 - 8 + 2 = 12$$

6.4 Operaciones

1 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

La adición. Ésta es una operación *binaria, cerrada, con inverso aditivo, existe el elemento neutro, es asociativa y conmutativa.*

Ejemplos:

$$4 + 3 + 2 = 9$$
$$-4 + 3 - 5 + 0 - 1 = -10 + 3 = -7$$
$$-7 - 2 - 4 + 3 = -13 + 3 = -10$$

Si debido a la naturaleza de la operación se agrupan varios números dentro de un signo de agrupación precedido de un signo +, cada número *"sale"* con su propio signo.

Ejemplo:

$$(-3 + 4) + (-7 - 4) + 5 = -3 + 4 - 7 - 4 + 5 = -14 + 9 = -5$$

La sustracción. Ésta es la operación inversa de la adición.

Minuendo − sustraendo = resta

Para restar un número de otro, se suma al primero el simétrico de los términos del sustraendo.
Para indicar una resta algebraica siempre es necesario usar los signos de agrupación y colocar el signo − donde corresponda.

Ejemplos:

$$\underbrace{(-1 + 3)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(4)}_{\text{sustraendo}} = -1 + 3 - 4 = -5 + 3 = -2$$

$$\underbrace{(-1)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(-1)}_{\text{sustraendo}} = -1 + 1 = 0$$

$$\underbrace{(-4 - 3 + 5)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(-7 + 2 - 4)}_{\text{sustraendo}} = \underbrace{-4 - 3 + 5 + 7 - 2 + 4 = -9 + 16 = 7}_{\text{operaciones con enteros}}$$

En algunos ejercicios o problemas puede citarse la sustracción en la forma siguiente: de −4 restar 5, la operación queda:

$$-4 - (5) = -4 - 5 = -9$$

En otro tipo de ejercicios o problemas, se aplican la suma y la resta simultáneamente:

Ejemplo:

$$(4 - 7 - 2) + (-1 + 2) - (4 + 7 - 5) = 4 - 7 - 2 - 1 + 2 - 4 - 7 + 5 = 11 - 21 = -10$$

2 LA MULTIPLICACIÓN

Ésta es una operación *binaria, cerrada, existe elemento neutro, es asociativa y distributiva.*

El producto de dos números enteros se obtiene multiplicando sus valores absolutos; el producto será positivo si los signos de ambos factores son iguales y negativo si los factores tienen signos distintos. Además, el producto de *cualquier número por cero es igual a cero.* Para cualquier número a, $b \in Z$ se tiene:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(b) = -ab$$
$$(+a)(+b) = ab$$
$$(a)(0) = 0$$

Ejemplos:

$$(-2)(-5) = 10$$
$$(-2)(5) = -10$$
$$(3)(4) = 12$$
$$(-5)(0) = 0$$

Potencia. *La potencia de un número es el producto de varios factores iguales a él,* en la expresión:

$$b^L = N$$

b se le llama *base*
L se le llama *exponente*
N se le llama *potencia*

El *exponente* indica cuántas veces *la base* se toma *como factor;* se debe tener cuidado al manejar el signo en la multiplicación.

Ejemplos:

$$3^4 = (3)(3)(3)(3) = 81 \qquad (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

3 LA DIVISIÓN

La *división es la operación inversa de la multiplicación,* y, como tal, la regla de los signos queda:

El cociente de dos número de signos iguales es positivo.

El cociente de dos números de signos contrarios es negativo.

El cero en la división

Cuando el *dividendo* es cualquier *número diferente de cero el cociente es cero.*

Ejemplo:

$$\frac{0}{3} = 0$$

Cuando el *dividendo* es cualquier número *diferente a cero* y el *divisor es cero* el cociente *no existe.*

Ejemplo:

$$\frac{2}{0} = \text{no existe}$$

Sin embargo, en algunos textos en la expresión

$$\tan 90° = \frac{a}{0}$$

en lugar de poner *no existe* escriben:

$$\tan 90° = \infty \text{ (símbolo de infinito)}$$

o también:

$$\tan 90° = \pm\infty$$

7

Orden de los números enteros

Para determinar *el orden* entre los elementos del conjunto de los números *enteros* es necesario establecer una relación entre ellos y los puntos de la recta numérica. Además, si $a, b \in Z$, $a < b$, si existe $c \in N$ tal que $a + c = b$.

EJERCICIO 3

1. $3 + 2 - 4 =$ *Sol.* 1
2. $-4 - 3 + 7 + 2 =$ *Sol.* 2
3. $-1 + 0 + 4 - 4 =$ *Sol.* -1
4. $-7 + 2 - 4 + 5 =$ *Sol.* -4
5. $(4)(-2)(3) =$ *Sol.* -24
6. $(-7)(-1)(2) =$ *Sol.* 14

7. $(-8)(-2)(-4) =$ *Sol.* -64
8. $(-9)(0) =$ *Sol.* 0
9. $(-3)(4)(0) =$ *Sol.* 0
10. $7 + (3 - 2) =$ *Sol.* 8
11. $-1 + (3 - 4 + 5) =$ *Sol.* 3
12. $(7 + 2) + (4 - 0) =$ *Sol.* 13
13. $(2 - 1) - (-4 + 3 - 2) =$ *Sol.* 4
14. $3 - (-2) + 5 =$ *Sol.* 10
15. $-(-3) + (7 + 2) - 4 =$ *Sol.* 8
16. $-(7)(4 + 5 - 6) - 9 =$ *Sol.* -30
17. $(4 + 3) - (-1) =$ *Sol.* 8
18. $(-1) + (2) - (-4) =$ *Sol.* 5
19. $(2)(-5) + (-2)(-4) =$ *Sol.* -2
20. $(-3)^2 + (-6)^3 + (-1)^4 =$ *Sol.* 206
21. $(-2 - 7)^2 + (-3)^3 =$ *Sol.* 54
22. $-2\,[3 + 5(2 - 6) + 9]^2 =$ *Sol.* -128
23. $(5 + 2)^3 - 3(4 - 7)^2 + [3 + (-4)]^2 =$ *Sol.* 317
24. $|4 + (-7) + (-5)| + |5 - 2| =$ *Sol.* 11
25. $(-3)(-4)\,[5 + 2(3 - 3)]^2 - 7 =$ *Sol.* 293
26. $|7 + 1 + 3| + 4 + (-5) + (-6)|-3| =$ *Sol.* -8
27. $||(-1)(+4)(-7)| + (-6)(-1)(-4)| =$ *Sol.* 4
28. $|(-4)^2|(-6)^3 + (-1)^4 =$ *Sol.* $-3\,455$
29. $-2\,[3 + 4(5 - 8) + 8]^2 =$ *Sol.* -2
30. $(-4)(-3)\,[4 + 2(2 - 2)]^2 - 8(4 + 1) =$ *Sol.* 152
31. $4(-2) + (-5)(-4) + (7)(-6) =$ *Sol.* -30
32. $8 + (-9) + |(-6) + (-7)| + |5 + 3| =$ *Sol.* 20
33. $|3 + 1| + |3 + 4 + 9 - 2| + |(-5) + (-4) + 0| =$ *Sol.* 27
34. $|(-2)(+3)(-7)| + |(-4)(-3)(-1)| =$ *Sol.* 54
35. $|(-4)^2 + (9 - 2)^3 + (-1)^3| =$ *Sol.* 358

8

Operaciones con los números racionales

Señalamos que al dividir 3 entre 5 el resultado no es exacto, por lo que la división queda indicada en la forma siguiente $\frac{3}{5}$, lo que origina los números racionales.

Un número racional es de la forma $\frac{a}{b}$, donde a, b son números enteros y $b \neq 0$; tanto a como a b se les llaman *términos.*

A los números racionales también se les conoce como *fracciones comunes* y como *quebrados.*

Dos fracciones son equivalentes si y sólo si tanto al multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda como al multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda los dos productos son iguales.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} \text{ con } \frac{15}{25} \text{ son fracciones } \textit{equivalentes}\text{, ya que } 3(25) = 5(15).$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} \text{ son fracciones equivalentes, ya que } 2(2) = 1(4).$$

Las fracciones equivalentes representan el mismo valor.

Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, se multiplica el numerador y el denominador por un mismo número entero diferente de cero:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(n)}{b(n)}, \text{ ya que } ab(n) = ba(n) \text{ con } n \neq 0$$

8.1 Simplificación de una fracción

Ejemplo:

Simplificar $\frac{32}{20}$

$$\frac{32}{20} = \frac{32 \div 4}{20 \div 4} = \frac{8}{5}$$

En toda fracción *irreductible* tanto el numerador como el denominador *son primos relativos.*

En el ejemplo, 8 y 5 son primos relativos, ya que su mcd es 1.

8.2 Fracciones recíprocas

Dos fracciones son *recíprocas* cuando una resulta de la otra si se invierten sus términos. El producto de dos fracciones recíprocas es igual a la *unidad.*

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{2} \text{ son recíprocas, ya que } \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{6} = 1$$

$$2 \text{ y } \frac{1}{2} \text{ son recíprocas, ya que } (2)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

9 Densidad de los números racionales

A los conjuntos de los números *naturales* y de los *enteros* se les considera como *"conjuntos discretos",* lo cual significa que entre dos números consecutivos de estos conjuntos no hay otro número que les pertenezca.

En cambio, el conjunto de los racionales tiene la propiedad de *densidad,* ya que si $a, b \in Q$ existe por lo menos un número $c \in Q$ tal que $a < c$ y $c < b$.

10

Orden de los números racionales

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ será $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si y sólo si $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$, o bien, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$.

Ejemplos:

Con los números racionales $\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{5}$ determinar cuál de ellos es mayor.

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{10-7}{35} = \frac{3}{35} \text{ como } \frac{3}{35} > 0 \text{ de donde } \frac{2}{7} > \frac{1}{5}$$

Con los números racionales $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{7}$ determinar cuál de ellos es el mayor.

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{7} = \frac{7-10}{35} = \frac{-3}{35} \text{ como } -\frac{3}{35} < 0 \text{ de donde } \frac{1}{5} < \frac{2}{7}$$

11

Signo de una fracción y de sus términos

En una fracción hay que considerar tres signos: el signo de la fracción, del numerador y del denominador.

El signo de la fracción es el signo + o el signo −, escritos delante de la raya de la fracción. Cuando delante de la raya no hay signo se sobreentiende que el signo de la fracción es +.

En la fracción $\frac{4}{5}$ el signo de la fracción es +, el del numerador es + y el del denominador +.

En la fracción $-\frac{-3}{7}$ el signo de la fracción es −, el del numerador es − y el del denominador es +.

11.1 Cambios que pueden hacerse en los signos de una fracción sin que la fracción se altere

Es posible cambiar dos de los tres signos de una fracción sin que la fracción se altere, pero si se altera si cambia el signo de uno solo de sus términos.

De donde:

Si se cambia el signo del numerador y el signo del denominador de una fracción, ésta no se altera.
Si se cambia el signo del numerador y el signo de la fracción, ésta no se altera.
Si se cambia el signo del denominador y el signo de la fracción, ésta no se altera.

Observa: Qué se debe hacer cuando el numerador o el denominador es la suma indicada de varios números reales y necesitamos algunos cambios.

Ejemplo:

$$-\frac{-4+3}{7+3} = \frac{4-3}{7+3} = -\frac{4-3}{-7-3}$$

Aceptamos: un número racional $\frac{a}{b}$ es negativo si y sólo si el producto del numerador por el denominador es negativo.

$$\frac{a}{b} < 0 \text{ sí y sólo si } ab < 0$$

Ejemplo:

$$\frac{-2}{3} \text{ es negativo porque } (-2)(3) < 0$$

De donde: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

12

Propiedades de las operaciones de suma y multiplicación en los números racionales

12.1 La adición

Ésta es una operación binaria, cerrada, con inverso aditivo, existe el elemento neutro, es asociativa y conmutativa.

Ejemplos:

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5+4-3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{-9+10-4}{12}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

En estos ejemplos redujimos los denominadores al *mínimo común múltiplo* (al mcm también se le llama, al aplicarlo a las fracciones, común denominador, *mínimo común denominador*).

12.2 La resta

Uso del inverso aditivo

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ la resta de $\frac{a}{b}$ menos $\frac{c}{d}$ es igual a la suma de $\frac{a}{b}$ y el **inverso aditivo** de $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{ab-bc}{bd}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{2-3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-2+3}{4}=\frac{1}{4}$$

12.3 La multiplicación

Ésta es una operación *binaria, cerrada, con inverso multiplicativo, existe elemento neutro, es asociativa, conmutativa y distributiva.*

Se aplican las mismas *reglas de los signos* señaladas para los números enteros.

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{5}\right)=\frac{21}{20}$$

$$\left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{5}{-2}\right)=\frac{-15}{-14}=\frac{15}{14}$$

$$\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

$$\left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

Multiplicamos los numeradores, cuyo resultado se divide entre el producto de los denominadores, y el resultado se simplifica. *No es necesario obtener decimales,* excepto que por la naturaleza del problema sea necesario.

12.4 La división

Uso del recíproco (inverso multiplicativo)

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)\div\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{12}{5};\quad \frac{-7}{4}\div\frac{1}{3}=-\frac{21}{4};\quad \left(-\frac{7}{5}\right)\div(-3)=\frac{7}{15};$$

$$\left(-\frac{-3}{5}\right)\div\left(\frac{-4}{7}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{21}{20}$$

Uso del recíproco del divisor

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\div\frac{7}{5}=\frac{10}{21};\quad \text{usando el recíproco}\quad \frac{2}{3}\div\frac{7}{5}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{10}{21}$$

Observa detenidamente: en algunos casos, muy frecuentes en estudios posteriores, la división se expresa en la siguiente forma:

Ejemplos:

$$\frac{7}{4}\div\frac{3}{2}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{14}{12}\qquad\Bigg|\qquad (-5)\div\frac{4}{3}=\frac{-\frac{5}{1}}{\frac{4}{3}}=-\frac{15}{4}$$

Se dice: el resultado es igual *al producto de los extremos entre el producto de los medios.*

13 Fracciones complejas

Las *fracciones complejas* son aquellas en que sus numeradores o sus denominadores, o ambos, contienen fracciones.

Ejemplos:

$$\frac{\frac{3}{4}}{5};\quad \frac{7}{\frac{1}{3}};\quad \frac{\frac{2}{3}}{9};\quad \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{8-\frac{3}{5}}$$

Para resolver una operación de fracciones complejas, convertimos el numerador y el denominador en una *sola fracción* y se plantea la operación de división.

Ejemplo:

Resolver

$$\frac{4+\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{20+3}{5}}{\frac{8-3}{6}}=\frac{\frac{23}{5}}{\frac{5}{6}}=\frac{138}{25}$$

14
Decimales

14.1 Pasar un número racional a su forma decimal

Señalamos que un número racional es de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in Z$ con $b \neq 0$.

La expresión $\frac{a}{b}$ indica la división de a entre b. Cuando realizamos la división pasamos el número racional a su forma decimal.

Hay números racionales que al pasarlos a su forma decimal se obtiene como residuo 0. A estas formas decimales que tienen un número finito de dígitos a la derecha del número decimal se les llama *decimales finitas.*

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

Otros números racionales al pasarlos a su forma decimal no dan como residuo 0.

Ejemplos:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Es una fracción periódica en la cual el 3 se repite indefinidamente.

$$\frac{1}{11} = 0.090909\ldots$$

Fracción periódica en que el periodo es 09.

A las fracciones cuyo periodo principia inmediatamente después del punto se les llama *periódicas puras,* como los ejemplos anteriores.

Las *periódicas mixtas* son aquellas en que el periodo se inicia después de una parte no periódica.

Ejemplos:

$$\frac{7}{12} = 0.58333\ldots$$

el 3 principia después del 58

$$\frac{1}{14} = 0.0714285\ 714285\ldots$$

el periodo 714285 principia después del 0.

Las fracciones periódicas mixtas tienen dos partes: *anteperiodo y periodo;* el anteperiodo es el número formado por las cifras decimales que preceden al periodo.

Ejemplo:

$$\frac{7}{12} = 0.58333\ldots$$

donde 58 es la cifra del anteperiodo y 333 la cifra del periodo.

Un decimal periódico es infinito. Para indicar que el dígito se repite se coloca una barra sobre el dígito o dígitos que se repiten.

Ejemplos:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Sol. $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

$$\frac{1}{11} = 0.090909\ldots$$

Sol. $\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$

14.2 Pasar una fracción decimal a número racional

Todo decimal finito y todo decimal periódico **es un número** *racional* **y, recíprocamente, todo número racional se puede expresar como un** *decimal finito* **o como un** *decimal periódico.*

Ejemplos:

Si 0.3, obtener su forma racional

Sol. $0.3 = \frac{3}{10}$

Si 2.005, obtener su forma racional.

Sol. $2.005 = \frac{2005}{1000} = \frac{401}{200}$ o también se puede expresar: $2.005 = 2 + \frac{5}{1000}$

Observa que un decimal periódico también se puede escribir como un racional, en la siguiente forma:

Ejemplo:

Obtener el número racional de 0.333...

Sol. si $x = 0.333\ldots$
$10x = 3.333\ldots$

multiplicamos ambos miembros de la igualdad por 10, de donde,

restamos miembro a miembro las dos igualdades.

$$\begin{array}{r} 10x = 3.333\ldots \\ -x = 0.333\ldots \\ \hline 9x = 3.000 \end{array}$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 4

De cada número racional suprime dos signos para obtener una fracción equivalente.

1. $-\frac{-3}{-5} =$

2. $\frac{-4}{-(-7)} =$

3. $\dfrac{-(-5)}{-4} =$

4. $\dfrac{-(-8)}{-3} =$

5. $\dfrac{0}{-(-4)} =$

6. $\dfrac{-8}{-(-1)} =$

Sol., entre otras $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{4}, -\frac{8}{3}, 0, -8$

Con los números racionales citados como parejas, señala cuál de los dos es el mayor.

7. $\frac{2}{7}, \frac{3}{8}$ — *Sol.* $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

8. $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ — *Sol.* $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

9. $-\frac{4}{3}, \frac{-6}{5}$ — *Sol.* $-\frac{4}{3} < \frac{-6}{5}$

10. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ — *Sol.* $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

11. $\frac{-5}{-6}, \frac{-4}{5}$ — *Sol.* $\frac{-5}{-6} > \frac{-4}{5}$

Expresar en forma decimal los números racionales.

12. $\dfrac{7}{12} =$

13. $\dfrac{5}{7} =$

14. $2\dfrac{3}{5} =$

15. $\dfrac{15}{16} =$

16. $\dfrac{12}{25} =$

17. $\dfrac{53}{64} =$

Sol. $0.58\overline{3}$, $0.\overline{714285}$, 2.6, 0.9375, 0.48, 0.828125

Expresar como el cociente de dos enteros

18. $0.\overline{45} =$

19. $0.\overline{142857} =$

20. $0.8\overline{3} =$

21. $0.91\overline{6} =$

Sol. $\frac{5}{11}, \frac{1}{7}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}$

Resolver.

22. $\frac{3}{-4} \div 8 =$ *Sol.* $-\frac{3}{32}$

23. $\left(-\frac{6}{5}\right)7 =$ *Sol.* $-\frac{42}{5}$

24. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) =$ *Sol.* $\frac{3}{8}$

25. $\left(\frac{7}{5}\right)(-2)\left(\frac{4}{3}\right) =$ *Sol.* $-\frac{56}{15}$

26. $(-7)(-2)\left(-\frac{1}{5}\right) =$ *Sol.* $-\frac{14}{5}$

27. $(-1)\left(\frac{3}{4}\right)(0) =$ *Sol.* 0

28. $\dfrac{\frac{7}{3}}{-\frac{4}{5}} =$ *Sol.* $-\frac{35}{12}$

29. $-\dfrac{4}{\frac{2}{3}} =$ *Sol.* -6

30. $-\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{2}} =$ *Sol.* $\frac{8}{15}$

31. $\dfrac{\frac{3}{5}}{-7} =$ *Sol.* $-\frac{3}{35}$

32. $\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2} + 5\left(\frac{1}{5} + 3\right)\right]$ *Sol.* $-\frac{97}{6}$

33. $\frac{2}{3} - \left[5 - 5\left(3 - \frac{1}{4}\right)\right] =$ *Sol.* $\frac{113}{12}$

34. $-5 - \frac{3}{4}\left[-8 + 5\left(\frac{2}{3} - 2\right)\right] =$ *Sol.* 6

35. $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)\left[3 - \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3} - 5\right)\right] =$ *Sol.* $\frac{133}{30}$

36. $\dfrac{\frac{1}{3}}{2}\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{2}\right)\right] =$ *Sol.* $\frac{25}{144}$

37. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{7}\right)}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{5}}=$ *Sol.* $-\dfrac{15}{61}$

38. $\dfrac{\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{1}{3}\right]-2}{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{4}\div\dfrac{1}{2}\right)}=$ *Sol.* $-\dfrac{61}{50}$

39. $\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{-5}\right)\right]-\left[\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right]=$ *Sol.* $-\dfrac{23}{105}$

40. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{5}\right)-\left[\dfrac{5}{4}+\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{3}\right)\right]}{-4+\dfrac{1}{2}-\dfrac{6}{7}}=$ *Sol.* $\dfrac{35}{366}$

CAPÍTULO 5

Exponenciación

1 Potencia

Señalamos que la potencia de un número es el producto de varios factores iguales a él; en la expresión $b^L = N$, b es la base, L es el exponente y N la potencia.

Ejemplo:

$a \cdot a = a^2$ se lee "a cuadrada" o a a la segunda potencia.

En general, si n es un número entero positivo se tiene:

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$ n factores

Esta expresión se lee a a la enésima potencia.

2 Leyes de los exponentes, su uso en la multiplicación

Si $a, b \in R$; $m, n \in Z$ tenemos:

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

Demostración

$$a^m a^n = \underbrace{(aaa\ldots a)}_{m \text{ veces}} \underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ veces}}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $\qquad$ $4^{-3} \cdot 4^5 = 4^{-3+5} = 4^2$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

Demostración

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{aaa\ldots}_{m \text{ veces}} \underbrace{aaa\ldots}_{m \text{ veces}} \ldots \underbrace{aaa\ldots}_{m \text{ veces}}}_{n \text{ veces}}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplo:

$$(4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6 \qquad (-5^2)^3 = (-5)^{2\cdot 3} = -5^6$$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

Demostración

$$(ab)^m = \underbrace{ab\ ab\ ab \ldots ab}_{m \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{aaa\ldots a}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{bbb\ldots b}_{m \text{ veces}}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Ejemplo:

$$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$$

2.1 Uso en la división de las leyes de los exponentes

IV. Si $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a}\ \cancel{a}\ \cancel{a}\ \cancel{a}\ \ldots\ a}^{m \text{ veces}}}{\cancel{a}\ \cancel{a}\ \cancel{a}\ \ldots\ \cancel{a}} = a^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$$

En la división de potencia de la misma base pueden presentarse tres casos:

$m > n$ **el exponente del dividendo es** *mayor* **que el del divisor, da lugar al** *exponente entero positivo.*
$m = n$ **el exponente del dividendo es** *igual* **al del divisor, da lugar al** *exponente cero.*
$m < n$ **el exponente del dividendo es** *menor* **que el del divisor, da lugar al** *exponente entero negativo.*

Ejemplos:

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$$

$$\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

3 Exponente cero

$a^0 = 1$ **por definición.**

Toda cantidad elevada a la *cero potencia* **es igual a** *uno.*

Ejemplos:

$$9^0 = 1, \quad 10^0 = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\frac{d^m}{d^m} = d^0 = 1 \text{ con } d \neq 0 \quad \frac{5^2}{5^2} = 5^0 = 1$$

4

Exponente entero negativo, su interpretación

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$$

Ahora, aseguramos que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

comprobamos en la siguiente forma:

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{-n}$$

$$\frac{a^m}{(\cancel{a^m})(a^n)} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$(52)^{-1} = \frac{1}{52}\ ; \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\frac{10^3(10^{-4})}{10^{-2}} + \frac{10^3 \cdot 10^2}{10^4} = \frac{10^5}{10^4} = 10;$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + 4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2} = \frac{\dfrac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{\dfrac{3}{\frac{1}{9}} + \dfrac{1}{4}}{2 + 2} = \frac{27 + \frac{1}{4}}{4} = \frac{\dfrac{108 + 1}{4}}{4} = \frac{109}{16}$$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\ldots\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\overbrace{aaa\ldots a}^{n \text{ veces}}}{bbb\ldots b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2}$$

5
Leyes de exponentes. Conclusión

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

IV. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$m > n$ con $a \neq 0$

exponente positivo

$a^0 = 1$

$m = n$

exponente cero

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$m < n$

exponente negativo

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$.

6
Radicación

6.1 La radicación como operación inversa a la potenciación

Si tenemos $6^2 = 36$ y queremos obtener $\sqrt{36} = \pm 6$, a esta operación se le llama *extracción* de una *raíz* o *radicación.*

En general, se escribe $\sqrt[n]{b} = a$, lo que establece que a es la raíz enésima de b; el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical, el entero n índice de la raíz y b es el radicando o subradical.

También se llama radical a la raíz indicada de una cantidad.

Ejemplos:

$$\sqrt{3},\ 2\sqrt[3]{5},\ -5\sqrt[3]{3^2} \text{ son radicales.}$$

En cada radical debemos distinguir: *el signo, el coeficiente,* que es el factor que va fuera del signo del radical, *el radicando o subradical y el grado,* el cual viene expresado por el *índice de la raíz.*

La raíz segunda se llama raíz cuadrada, la raíz tercera raíz cúbica; las otras reciben el nombre según el índice, así, se dice raíz quinta, raíz sexta y, en general, raíz n (enésima) cuando el índice es n.

El subradical es igual a la raíz elevada al índice

Ejemplos:

En el radical $-4\sqrt[3]{7^2}$ el signo es $-$, el coeficiente es 4, el subradical es 7^2 y el grado es 3.

En el radical $\sqrt{6}$ el signo es $+$, el coeficiente es 1, el subradical es 6 y el grado es 2.

Observa detenidamente: si el índice del radical es *par* y el número en el subradical es *positivo,* el resultado tendrá *dos raíces* dentro de los números reales, una con signo positivo y otra con signo negativo.

Ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \text{ puesto que } (+2)^2 = 4 \text{ y } (-2)^2 = 4$$

Si el índice de la raíz es *par* y el número en el subradical es *negativo,* y como *no hay* número *positivo ni negativo* que elevado a una potencia par dé un *número negativo,* se dice que aquella cantidad no tiene raíz en los números reales; de este problema surgen los números *imaginarios.*

Ejemplo:

$\sqrt{-4}$, *no hay solución* dentro del conjunto de los números reales.

Si el índice de la raíz es *impar* y el número en el subradical es *positivo* o *negativo,* se tendrá como resultado *una sola raíz,* la cual lleva el mismo signo del número que está en el subradical.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ puesto que } (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \text{ puesto que } (2)^5 = 32$$

6.2 Exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

$$\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$$

La extracción de la raíz de una potencia requiere dividir el exponente entre el índice de la raíz; *si la división no es exacta* se deja *indicada la división,* originándose así el *exponente fraccionario.*

Ejemplos:

Expresar en forma fraccionaria

$$\sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}; \ \sqrt{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$$

7 Leyes de los radicales

I. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Demostración

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}\,b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{a^3}\,\sqrt{b^5} = \sqrt{a^3\,b^5}$$

$$3\sqrt{4}\,2\sqrt{5} = 6\sqrt{20}$$

$$(2\sqrt{10})(-3\sqrt{12}) = -6\sqrt{120}$$

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Demostración

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{2\sqrt{24}}{3\sqrt{13}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{24}{13}}$$

$$\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$$

$$\sqrt{\frac{17}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{17}$$

III. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Demostración

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[6]{3x^2}$$

8 Operación con radicales. Simplificación de radicales

El exponente fraccionario y las leyes de los radicales los podemos emplear para hacer algunos cambios necesarios y útiles en los radicales, los de uso más común son:

1. Sacar *factores* del radical.
2. Introducir *un factor* al radical.
3. *Racionalización* de denominadores.
4. Expresar un radical como otro de *orden (índice) menor.*

Se dice que un radical se ha *simplificado* cuando en él se han efectuado todas las operaciones 1), 3) y 4) que procedan.

Algunos ejercicios de multiplicación y de división pudimos haberlos simplificado, pero no se hizo porque aún no se había mencionado la simplificación de radicales.

9

Obtener factores del radical

Si un *factor* del radicando *es potencia* exacta del índice de la raíz, se puede realizar la operación y sacar el factor como coeficiente del radical. Esta operación se facilita si previamente *factorizamos* el radicando.

Ejemplos:

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$$

10

Introducir un factor al radical

Para introducir un factor, *elevamos* éste a un exponente igual que el índice de la raíz.

Ejemplos:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{75}}$$

11

Racionalización de denominadores

Las operaciones con fracciones que contienen un radical en el denominador se facilitan si antes de trabajar con ellas se *racionaliza* el denominador.

La racionalización de denominadores consiste en transformar una fracción que contiene un radical en el denominador de otra fracción equivalente que no contenga ningún radical en el denominador.

Aplicaremos el principio fundamental de las fracciones: *el valor de un número racional no varía si numerador y denominador se multiplican o dividen por un mismo número distinto de cero.*

Los casos que se presentan son:

Cuando el radicando es una fracción cuyo denominador es un monomio, o si el denominador de una fracción tiene un radical como factor, procedemos de la siguiente forma:

Racionalizar el denominador de

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

multiplicamos cada miembro de la fracción por $\sqrt{7}$.

Racionalizar el denominador de

$$\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 6}=\frac{2\sqrt{6}}{18}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

Racionalizar el denominador de

$$\frac{5}{\sqrt[3]{16}}=\frac{5}{\sqrt[3]{4^2}}=$$

para que el denominador quede una *raíz exacta* debemos multiplicar $\sqrt[3]{4^2}$ por $\sqrt[3]{4}$, y para que la fracción no varíe, se multiplica también el numerador por $\sqrt[3]{4}$

$$=\frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^2}\sqrt[3]{4}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{4}$$

Cuando el denominador es un binomio que contiene radicales en segundo grado (índice 2).
Usemos las excepciones conjugadas.

De $(a+b)(a-b)=(a^2-b^2)$

Tenemos

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=(4\cdot 3)-5=7$$

El producto de dos expresiones conjugadas con radicales de índice 2 es siempre un número sin radical.

Ejemplo:

Racionalice el denominador de

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}}=\frac{3(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{3(1-\sqrt{2})}{(1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3(1-\sqrt{2})}{-1}=-3(1-\sqrt{2})$$

12 Expresar un radical como otro orden (índice) menor

Cuando el índice de la raíz y los exponentes son factores, podemos simplificar un radical usando el exponente fraccionario.

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{3^2}=3^{\frac{2}{6}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$$

$$3\sqrt[4]{25x^2y^2}=3\sqrt[4]{5^2x^2y^2}=3(5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})=3\sqrt{5xy}$$

13 Radicales semejantes

Los radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice de la raíz y el mismo subradical, sólo difieren en el signo y en el coeficiente.

$-\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}$ son semejantes.

Es necesario reducir el subradical al máximo para saber si dos o más radicales son o no semejantes.

Cuando dos radicales son semejantes *se pueden reducir* como términos semejantes sumando algebraicamente sus coeficientes.

Ejemplos:

$$4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(4+5)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

$$8\sqrt{3}-\sqrt{3}=(8-1)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{2}-7\sqrt{2}=(4-7)\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}=\frac{1}{6}\sqrt{5}$$

14 Simplificación de radicales

Simplificar un radical es reducirlo a su más simple expresión. Para hacerlo, y según proceda, *sacamos* del radical los factores que sea posible, *racionalizamos,* y expresamos el radical como otro de *índice menor.*

15 Adición y sustracción de radicales

Para realizar estas operaciones, previamente debemos *simplificar* los radicales. La suma algebraica de radicales semejantes es un radical del mismo grado, cuyo coeficiente resulta de la suma algebraica de los coeficientes. Los radicales *no semejantes* se escriben con su propio signo.

Ejemplos:

$$2\sqrt{5}+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(2+5-3)\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

$$5\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{12}-2\sqrt{27}=5\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6\sqrt{3}=(5-3-6)\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$$

Simplificaciones realizadas en este ejercicio

$$5\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{12}=-\frac{3}{2}\sqrt{(2)^2(3)}=-3\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{27}=-2\sqrt{(3^2)(3)}=-6\sqrt{3}$$

16 Multiplicación de radicales

Del mismo índice. Aplicamos la ley de los radicales $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Ejemplos:

$$(2\sqrt[3]{9})(4\sqrt[3]{5})=8\sqrt[3]{45}\;;$$

$$(-\sqrt{5})(-4\sqrt{3})=4\sqrt{15}\;;$$

$$(2\sqrt{3})(-3\sqrt{7})(\sqrt{3}) = -6\sqrt{63}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{21}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{294}$$

De distinto índice. Los radicales se reducen al *mínimo común índice* y se multiplican como en el caso anterior.

La reducción de los radicales al mínimo común índice requiere obtener el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices, que será el índice común, a continuación se eleva la cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice del subradical.

Usamos el exponente fraccionario.

Ejemplos:

$$\sqrt{5}\,\sqrt[3]{3} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{1125}$$

mcm de 2 y 3= 6

$$\sqrt{7}\,\sqrt[3]{2 \cdot 7^2} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\, 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 7^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{7^3 \cdot 2^2 \cdot 7^4} = \sqrt[6]{7^7 \cdot 2^2} = 7\sqrt[6]{7 \cdot 2^2}$$

17 División de radicales

Del mismo índice. En esta operación aplicamos la ley de los radicales $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}};\quad \sqrt{8} \div \sqrt{4} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2};\quad \sqrt{5} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

De distinto índice. En la realización de esta operación se reducen los radicales al mínimo común índice (mcm) y se dividen como radicales del mismo índice.

Para ejecutar la división usamos el exponente fraccionario.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5} \div \sqrt{2} = 5^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}} \div 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{25}{8}}$$

18 Raíz de un radical

La *raíz enésima* de un radical es otro radical cuyo índice es el *producto* del índice del radical por *n*.

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m}} = \sqrt[nr]{a^m}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{\sqrt{3^4}} = \sqrt[12]{3^4} = (3)^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3};\quad \sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}} = \sqrt[30]{4} = 4^{\frac{1}{30}}$$

Observa.

Ejemplos:

Obtener la raíz cúbica de $5\sqrt{2}$; como el coeficiente de 2 no tiene raíz cúbica exacta, lo introducimos bajo el signo de la raíz cuadrada, de donde:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{50}$$

Resolver.

$\sqrt[3]{8\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$ en este ejemplo el 8 tiene raíz cúbica.

19 Potencia de un radical

Ejemplos:

$$\left(\sqrt{5^3}\right)^4 = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{12}{2}} = 5^6$$

$$\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^5 = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^5 = \left(2^{\frac{15}{4}}\right) = \sqrt[4]{2^{15}}$$

CAPÍTULO 6

Notación científica

En el trabajo científico suele trabajarse con magnitudes muy grandes o muy pequeñas; generalmente ambas se expresan con *notación científica,* en la cual *el número real se cita* con un *número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10.*

Recordamos:

$10^0 = 1$	$10^0 = 1$	Por definición $10^0 = 1$
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0.1$	
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0.01$	
$10^3 = 1000$	$10^{-3} = 0.001$	
.	.	
.	.	
.	.	
$10^7 = 10\,000\,000$	$10^{-7} = 0.0\,000\,001$	

Nota: La separación de 3 en 3 cifras únicamente se hace para facilitar la lectura.

1 Expresar con notación científica

Observa.

Ejemplos:

Expresar con notación científica el número 378500000 $=3.785 \times 10^{8}$ y el número 474000 $= 4.74 \times 10^{5}$.

En el primer ejemplo, de izquierda a derecha se toma el número 3, que está entre el 1 y el 10, se pone un punto y queda 3.785, se cuentan los lugares de las cifras a partir del punto, las cuales son 8 y este número es el exponente de 10.

En el segundo ejemplo, de izquierda a derecha se toma el número 4, que está entre el 1 y el 10, se pone un punto y queda 4.74, se cuentan los lugares de las cifras a partir del punto, las cuales son 5 y este número es el exponente de 10.

El número 0.000 000 534 $= 5.34 \times 10^{-7}$

En este ejemplo, de izquierda a derecha se toma el número 5, ubicado entre el 1 y el 10, se pone un punto y queda 5.34, se cuentan los lugares de las cifras a partir del punto hasta el lugar (inclusive) que ocupa el 5, los cuales son 7 y este número con signo negativo es el exponente de 10.

2
Expresar con notación ordinaria

La conversión de la notación científica a la notación ordinaria requiere *mover* el punto decimal a la derecha si el exponente es positivo y a la izquierda si es negativo; el número de lugares es el indicado por el exponente.

Observa.

Ejemplos:

Expresar con notación ordinaria.

$4.85 \times 10^3 = 4\,850.00$ $\quad$ $3.54 \times 10^0 = 3.54$

$5.20 \times 10^{-2} = 0.0520$ $\quad$ $1.03 \times 10^{-4} = 0.000\,103$

3
Operaciones

Resolver.

$$\frac{(225\ 000\ 000)\ (0.000\ 150)}{2\ 240\ 000\ 000\ 000}$$

Expresamos la operación con notación científica:

$$\frac{(225\,000\,000)\,(0.000\,150)}{2\,240\,000\,000\,000} = \frac{(2.25\times 10^{8})\,(1.50\times 10^{-4})}{2.24\times 10^{12}} =$$
$$= \frac{(2.25)\,(1.50)\,(10^{8-4})}{2.24\times 10^{12}} =$$
$$= \frac{3.375}{2.24}\,(10^{4}\cdot 10^{-12}) = 1.506\times 10^{-8}$$

EJERCICIO 5

Resolver.

1. $-[3 + 2(5 - 9)]\,[7 - (4 - 3)] =$ *Sol.* 30
2. $[-(-5) - 3(4 - 7)]\,[3 + (5 - 2)] =$ *Sol.* 84
3. $[5 - 2(7 - 4)]\,[-2(-3)(-7)(-5)] - [7 + (4 - 8)] =$ *Sol.* -213
4. $(7 + 11) + [(17 + 11)(7 - 3)] =$ *Sol.* 130
5. $(-2)(-5)(-7)(-8) =$ *Sol.* 560
6. $(36 \div 9) + (3 \div 4) + 2 =$ *Sol.* $\frac{27}{4}$
7. $\left[\left(\frac{35+15}{15}\right)\div 5\right] + 4 =$ *Sol.* $\frac{14}{3}$

8. $\dfrac{(7\div 3)(3-2+8)}{(5\div 2)(5\cdot 2)-4}=$ *Sol.* 1

9. $4 + 48 - 8 - 35 \div 7 =$ *Sol.* 39

10. $(4 \cdot 3 - 16 \div 4)2 =$ *Sol.* 16

11. $-4 - (5 - 8)^3 =$ *Sol.* 23

12. $(-5)^2(-1)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 =$ *Sol.* $\dfrac{227}{8}$

13. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{4}\right)^3 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 =$ *Sol.* $-\dfrac{2149}{1600}$

14. $(-0.2)^3(0.001)^2 =$ *Sol.* $-0.000\,000\,008$

15. $(2^3)^2 + (-3)^2 =$ *Sol.* 73

16. $[2(5)^2] - (3)(-6)^2 =$ *Sol.* -58

17. $[3(9)]^2 - [(3)9]^2 =$ *Sol.* 0

18. $5.3(2.1 - 4.2) - [6.8(3.2 + 1.2) + 7.2] =$ *Sol.* -48.25

19. $2 + 28 - 14 - 28 \div 7 =$ *Sol.* 12

20. $-4(6 + 7) + 9 - 24 \div 12 =$ *Sol.* -45

Expresar con exponente fraccionario.

21. $\sqrt[3]{5} =$ *Sol.* $5^{\frac{1}{3}}$

22. $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^5} =$ *Sol.* $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. $7\sqrt[3]{4} =$ *Sol.* $7(4)^{\frac{1}{3}}$

24. $7\sqrt[4]{5^2} =$ *Sol.* $7(5)^{\frac{1}{2}}$

25. $\sqrt{7}\sqrt{\dfrac{3}{2}} =$ *Sol.* $(7)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

26. $12\sqrt[4]{8} =$ *Sol.* $12(8)^{\frac{1}{4}}$

27. $\dfrac{9}{2}\sqrt[3]{(7)^{\frac{1}{2}}} =$ *Sol.* $\dfrac{9}{2}(7)^{\frac{1}{6}}$

28. $2\sqrt[5]{3}\sqrt{7} =$ *Sol.* $2(3)^{\frac{1}{5}}(7)^{\frac{1}{2}}$

Expresar en forma de raíz las siguientes potencias con exponente fraccionario.

29. $7^{\frac{2}{3}} =$ *Sol.* $\sqrt[3]{7^2}$

30. $5(2)^{\frac{3}{2}} =$ *Sol.* $5\sqrt{2^3}$

31. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{3}{5}} =$ *Sol.* $\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{7}\right)^3}$

32. $(12)^{\frac{3}{4}} =$ *Sol.* $\sqrt[4]{(12)^3}$

33. $2(3)^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{3}(7)^{\frac{2}{3}} =$ Sol. $\frac{2}{3}\sqrt[5]{3^2}\,\sqrt[3]{7^2}$

34. $\frac{1}{3}(2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}(6)^{\frac{1}{2}} =$ Sol. $\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{6}$

35. $7^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{2}{3}} =$ Sol. $\sqrt[4]{7} + \sqrt[3]{8^2}$

Sacar de cada radical los factores posibles.

36. $\frac{1}{3}\sqrt{32} =$ Sol. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

37. $3\sqrt{50} =$ Sol. $15\sqrt{2}$

38. $\frac{7}{4}\sqrt{27} =$ Sol. $\frac{21}{4}\sqrt{3}$

39. $(7+\sqrt{2})\sqrt{40} =$ Sol. $2\sqrt{10}\,(7+\sqrt{2})$

40. $\frac{7}{5}\sqrt[3]{128} =$ Sol. $\frac{28}{5}\sqrt[3]{2}$

41. $\sqrt[3]{-54} =$ Sol. $3\sqrt[3]{-2}$

Introducir el factor exterior al radical.

42. $2\sqrt{5} =$ Sol. $\sqrt{20}$

43. $4\sqrt[3]{2} =$ Sol. $\sqrt[3]{128}$

44. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} =$ Sol. $\sqrt{\frac{2}{45}}$

45. $-2\sqrt[3]{3} =$ Sol. $\sqrt[3]{-24}$

46. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} =$ Sol. $\sqrt{\frac{12}{125}}$

47. $-7\sqrt{2} =$ Sol. $\sqrt{98}$

EJERCICIO 5

(Segunda parte)

Exponentes. En los casos que proceda expresar con exponente positivo.

Resolver.

1. $(32)^{\frac{1}{2}} =$ Sol. $4\sqrt{2}$

2. $(16)^{\frac{3}{4}} =$ Sol. 2^3

3. $(256)^{\frac{1}{4}} =$ Sol. 4

4. $\dfrac{10^3(10^{-5})}{10^{-2}} =$ *Sol.* 1

5. $\dfrac{(4 \times 10^2)(4 \times 10^{-5})}{4 \times 10^{-6}} =$ *Sol.* 4000

6. $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}{32^{-\frac{3}{5}}} =$ *Sol.* 1

7. $\left[7 - 3\left(\dfrac{7}{16}\right)^0\right]^{-2}$ *Sol.* $\dfrac{1}{16}$

8. $(8)^{-\frac{3}{4}}(8)^{-\frac{1}{4}}(8)^{\frac{1}{2}} =$ *Sol.* $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

9. $\dfrac{(0.4)^0 - (0.1)^{-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}} =$ *Sol.* $-\dfrac{3}{2}$

10. $\dfrac{6\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 2^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 4} =$ *Sol.* $\dfrac{7}{3}$

11. $\dfrac{3^{-2} + 2^{-3}}{3^{-1}} =$ *Sol.* $\dfrac{17}{24}$

12. $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4}\right]^{-1}$ *Sol.* $\dfrac{4}{9}$

13. $\dfrac{3^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^0 - 12(2^{-2})} =$ *Sol.* $\dfrac{5}{18}$

14. $(2^{-2})(27)^{\frac{1}{3}} =$ *Sol.* $\dfrac{3}{4}$

15. $9^{0.5} - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{0.75} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} =$ *Sol.* $\dfrac{671}{8}$

16. $(-0.03)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 =$ *Sol.* 0.0001

17. $\dfrac{(27^{-2})^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{(4^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$ *Sol.* -224

Multiplicación y división de radicales.

Resolver.

18. $(2\sqrt[3]{5})(4\sqrt[3]{9}) =$ *Sol.* $8\sqrt[3]{45}$

19. $(-\sqrt{3})(-4\sqrt{5}) =$ *Sol.* $4\sqrt{15}$

20. $\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)(-2\sqrt{7})\left(\frac{1}{5}\sqrt{6}\right) =$ *Sol.* $-\frac{3}{10}\sqrt{126}$

21. $\frac{1}{3}\sqrt{5}\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{4}{5}\sqrt{2}\right) =$ *Sol.* $\frac{1}{4}\sqrt{15}+\frac{4}{15}\sqrt{10}$

22. $\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{8}{3}} =$ *Sol.* $2\sqrt{\frac{5}{3}}$

23. $\sqrt[3]{4}\sqrt{8} =$ *Sol.* $4\sqrt[6]{2}$

24. $2\sqrt{7}(3\sqrt{8}-2\sqrt{11}) =$ *Sol.* $12\sqrt{14}-4\sqrt{77}$

25. $\sqrt[3]{2}\sqrt{3} =$ *Sol.* $\sqrt[6]{108}$

26. $\sqrt[4]{2}\,\sqrt[3]{4} =$ *Sol.* $\sqrt[12]{2048}$

27. $\dfrac{\frac{2}{5}\sqrt{3}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}} =$ *Sol.* $\frac{4}{25}$

28. $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{9}} =$ *Sol.* $\sqrt[12]{3}$

29. $\sqrt{3} \div \sqrt[3]{4} =$ *Sol.* $\sqrt[6]{\frac{27}{16}}$

30. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}} =$ *Sol.* $\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$

31. $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}} =$ *Sol.* $3\sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{5^5}}$

32. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}} =$ *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

33. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \div \sqrt[3]{\frac{8}{3}} =$ *Sol.* $\sqrt[3]{\frac{3}{32}}$

34. $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[3]{0.1} =$ *Sol.* $\sqrt[3]{100}$

35. $\sqrt{\frac{1}{4}} \div \sqrt{\frac{1}{12}} =$ *Sol.* $\sqrt{3}$

36. $\sqrt{-0.08} \div \sqrt[3]{-0.1} =$ *Sol.* $\sqrt[6]{\frac{(-0.08)^3}{(-0.1)^2}}$

EJERCICIO 5

(Tercera parte)

Racionalizar.

1. $\sqrt{\dfrac{1}{5}} =$ *Sol.* $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
2. $\sqrt{\dfrac{2}{3}} =$ *Sol.* $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} =$ *Sol.* $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$
5. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} =$ *Sol.* $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$
6. $\dfrac{3}{\sqrt{5}} =$ *Sol.* $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$
7. $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}} =$ *Sol.* $-2-2\sqrt{2}$
8. $\dfrac{4}{\sqrt{6}-2} =$ *Sol.* $2\sqrt{6}+4$
9. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} =$ *Sol.* $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
10. $\dfrac{4}{\sqrt{3}} =$ *Sol.* $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
11. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} =$ *Sol.* $\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}$
12. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$ *Sol.* $-5-2\sqrt{6}$
13. $\dfrac{4}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$ *Sol.* $\dfrac{8\sqrt{3}-12\sqrt{2}}{-6}$

Adición y sustracción de radicales.

Resolver.

14. $17\sqrt[4]{5}-6\sqrt[4]{5} =$ *Sol.* $11\sqrt[4]{5}$
15. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{27}$ *Sol.* $-9-\sqrt[3]{3}$
16. $\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{45} =$ *Sol.* $2\sqrt{5}$
17. $\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{48} =$ *Sol.* $2\sqrt{3}$

18. $\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{8}+\sqrt{50}=$ *Sol.* $\frac{35}{6}\sqrt{2}$

19. $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}=$ *Sol.* $2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

20. $-3\sqrt{63}+8\sqrt{28}+7\sqrt{7}=$ *Sol.* $14\sqrt{7}$

21. $\frac{1}{2}\sqrt{32}-5\sqrt{\frac{1}{2}}=$ *Sol.* $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

22. $\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{12}}{3}=$ *Sol.* $\frac{23}{6}\sqrt{3}$

23. $\sqrt{20}-2\sqrt{75}-4\sqrt{12}=$ *Sol.* $2\sqrt{5}-18\sqrt{3}$

24. $3\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{60}-5\sqrt{\frac{3}{5}}=$ *Sol.* $-2\sqrt{15}$

Resolver.

25. $(\sqrt{5})^2=$ *Sol.* 5

26. $\sqrt[3]{(-7)^3}=$ *Sol.* -7

27. $\sqrt{(3^2)^3}=$ *Sol.* 27

28. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{35}}=$ *Sol.* $\sqrt[15]{35}$

29. $\sqrt{4\sqrt{8}}=$ *Sol.* $4\sqrt{2}$

30. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}=$ *Sol.* $\sqrt[8]{7}$

31. $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}=$ *Sol.* $\sqrt[6]{108}$

32. $\sqrt[4]{2^3\sqrt{5}}=$ *Sol.* $\sqrt[8]{320}$

33. $\sqrt[4]{2^3\sqrt{8}}=$ *Sol.* $2\sqrt[8]{2}$

Cambiar a notación científica.

34. 32 600 000 000 = *Sol.* 3.26×10^{10}

35. 0.000 000 083 = *Sol.* 8.3×10^{-8}

36. 116 700 000 000 = *Sol.* 1.167×10^{11}

37. 0.000 04 = *Sol.* 4×10^{-5}

38. 2.001 = *Sol.* 2.001×10^{0}

39. 0.062 = *Sol.* 6.2×10^{-2}

40. $\frac{4}{1\,000\,000}=$ *Sol.* 4×10^{-6}

41. $\frac{5}{10\,000}=$ *Sol.* 5×10^{-4}

Cambiar a notación ordinaria.

42. $1.64 \times 10^{10} =$ *Sol.* 16 400 000 000

43. $2.90 \times 10^{-6} =$ *Sol.* 0.000 002 90

44. $8.306 \times 10^{-11} =$ *Sol.* 0.000 000 000 083

45. $3.20 \times 10^{-5} =$ *Sol.* 0.000 032

46. $7.71 \times 10^{0} =$ *Sol.* 7.71

47. $3.44 \times 10^{9} =$ *Sol.* 3 440 000 000

Operaciones.

Resolver.

48. $5\,130\,000 \times 0.000\,4 =$ *Sol.* 20.52×10^{2}

49. $(0.000\,52)(30\,000)^2 =$ *Sol.* 46.8×10^{4}

50. $\dfrac{42\,500\,000\,000 \times 0.000\,032}{(130\,000)^2} =$ *Sol.* 8.04×10^{-5}

SEGUNDA PARTE

Álgebra

CAPÍTULO 7

Terminología y notación

1 Notación literal

Además de los números usados en aritmética, en el álgebra se usan letras. Una letra puede representar cualquier número conocido o desconocido o cualquier intervalo numérico; los números representados por letras se llaman *literales.*

Ejemplo:

$$3x + 4 = 0$$
$$x \in Q \mid 8 < x < 12$$

Por lo general, las cantidades conocidas se expresan con las primeras letras del alfabeto: *a, b, c;* las cantidades desconocidas con las últimas letras: *u, v, x, y, z.*

2 Coeficiente

En la expresión $7xy$, 7, x, y, son *factores.* Las literales de un producto como x, y se llaman factores *literales.* Comúnmente, el factor numérico 7 se llama *coeficiente* de los otros valores, pero, en forma más general, cualquier factor o factores pueden considerarse como el coeficiente de los factores restantes; así, en $7xy$, $7x$ es el coeficiente de y y $7y$ es el coeficiente de x.

Ejemplo:

En la expresión

$3a$	3 es el coeficiente numérico y a la literal
a	1 es el coeficiente numérico y a la literal

3 Exponente

Consideremos el caso especial de la multiplicación, en la cual todos los factores que se van a multiplicar son iguales; si multiplicamos el número b por sí mismo obtendremos bb y lo escribimos b^2; en general el producto de n factores, cada uno de ellos iguales a b, se escribe:

$$b^n \text{ o sea } \underbrace{b\,b\,b}_{n \text{ veces}} \ldots b = b^n$$

El número n recibe el nombre de *exponente* y b el nombre de *base*; el exponente indica *las veces que la base se toma como factor.*

En la expresión $4a$, el exponente de a es *uno.*

4

Expresión algebraica. Término

La expresión algebraica es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos:

$$x,\ 5a,\ c(a+b),\ \frac{5x-2y}{y},\ \sqrt{}$$

El signo + o − separan una expresión, cada una de estas partes precedida de un signo + o − se llama *término.*

Ejemplos:

$3x + 2$, los términos son $3x$, 2.

$$\frac{5x-2y}{y} = \frac{5x}{y} - \frac{2y}{y} = \frac{5x}{y} - 2, \text{ los términos son } \frac{5x}{y},\ -2$$

$3x$ es una expresión de *un solo término,* por tanto, es un *monomio.* $x^2 + 2x - 6$ es una expresión de *tres términos,* es decir, es un *trinomio.*

La palabra *polinomio* se usa para indicar una expresión de *dos o más términos.*

5

Valor numérico de las expresiones algebraicas

El *valor numérico* de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las literales por valores numéricos y efectuar las operaciones indicadas. Las operaciones dentro de un símbolo de agrupación *deben efectuarse antes que ninguna otra.*

Ejemplos:

Obtener el valor numérico de $a^2 - 2ab + 3b^3$ para $a = 3$, $b = 4$

$$a^2 - 2ab + 3b^3 = 3^2 - 2(3)(4) + 3(4^3) = 9 - 24 + 192 = 177$$

Obtener el valor numérico de $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x^2 + y}$, para $x = -1$, $y = 3$

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x^2 + y} = \frac{-1 - \frac{1}{3}}{1+3} = \frac{\frac{-3-1}{3}}{4} = -\frac{1}{3}$$

6
Grado y ordenación de un polinomio

El grado particular de un monomio está dado por el exponente de la literal de que se trate; si el monomio tiene más de una literal tendrá un grado por cada una de las literales, y, además, el grado *absoluto* del monomio estará dado por la *suma* de los exponentes de las literales.

Ejemplo:

En el término $3x^2y^5z$

grado respecto de x es 2
grado respecto de y es 5
grado respecto de z es 1

El grado *absoluto* del monomio anterior es 2 + 5 + 1 = octavo grado.

Un monomio está *ordenado* cuando sus literales se encuentran ordenadas según el abecedario.

Ejemplo:

$2zy^2x^4$ término no ordenado
$2x^4y^2z$ término ordenado

El grado de un polinomio que contenga una sola literal está dado por el mayor exponente de la literal.

Ejemplo:

$$-3x^5 - 4x^3 - x + 2$$

es de quinto grado, ya que el término que contiene mayor exponente es $-3x^5$.

Cuando un polinomio tiene varias literales se considera un grado en relación con cada una de ellas; además, tendrá el grado absoluto que está dado por el término de mayor grado absoluto.

Ejemplo:

$$-8xy^3 + 9y^2 - 4x^2yz^3$$

grado respecto a x es 2, respecto a y es 3, para z es 3
grado de $-8xy^3$ es 4
grado de $9y^2$ es 2
grado de $-4x^2yz^3$ es 6, representa el *mayor* grado absoluto, en consecuencia, el *grado absoluto* del polinomio es 6.

Ordenar un polinomio implica escribir sus términos en tal forma que el exponente de una misma literal disminuya o aumente de término a término; en el primer caso, se dice que el polinomio se ordenó en forma *decreciente* y en el segundo que se ordenó en forma *creciente* respecto a la literal de que se trate.

7
Lenguaje algebraico

Al utilizar *el lenguaje algebraico* suelen presentarse los siguientes casos: *escribir* en este lenguaje lo que se expresa verbalmente y *expresar* en lenguaje común lo que se expresa en lenguaje algebraico.

Ejemplos:

"La suma de los cuadrados de dos números": $x^2 + y^2$, $a^2 + b^2$, etcétera.

"El doble de un número":2 x,2 n,2 y, etcétera.

"La raíz enésima de un número": $\sqrt[n]{x}$

"El cuadrado de la mitad de un número": $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Ejemplos:

$4y^2 - 3y$	se lee: "el cuádruplo del cuadrado de un número menos su triple".
$y^2 - (x + z)^3$	se lee: "el cuadrado de un número menos el cubo de la suma de otros dos".
abc	se lee: "el producto de tres números".
$\sqrt{2a}$	se lee: "la raíz cuadrada del doble de un número".
$\frac{1}{xy}$	se lee: "el recíproco del producto de dos números".
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	se lee: "la suma de las raíces cuadradas de dos números".
$\sqrt{x - y}$	se lee: "la raíz cuadrada de la diferencia de dos números".

Es preciso tener cuidado para no confundir las expresiones numéricas con las algebraicas, por ejemplo:

5^2	no representa el cuadrado de un número cualquiera, sino el cuadrado del número cinco.
$12 - 2$	no indica la diferencia de dos números cualesquiera, sino la diferencia entre los números 12 y 2.

EJERCICIO 6

Llenar el siguiente cuadro:

Expresión	*Coeficiente numérico*	*Coeficiente literal*	*El coeficiente numérico representa*
$2x$			
$3y^4$			
$4mn$			
$5a^2b^2$			
$3(x + y)$			

Llenar el siguiente cuadro:

Expresión	*Exponentes*	*La base es*	*El exponente representa*
x^2			
$2x^3$			
$(xy)^2$			
x^2y^3			
$3x^2y^2$			
$(x + y)^2$			

Lenguaje algebraico. Expresar según proceda.

1. Un número cualquiera ______________________
2. La diferencia de dos números ______________________
3. El producto de tres números disminuido en cuatro unidades ______________________
4. El cociente de la suma de dos números entre otro número ______________________
5. La suma de dos números dividida entre su diferencia ______________________
6. El triple del cuadrado de un número ______________________
7. La cuarta parte del cubo de un número ______________________
8. La raíz cuadrada del producto de dos números ______________________
9. El doble de la suma de dos números ______________________
10. El triple de la diferencia de dos números ______________________
11. El producto de un número por la diferencia de otros dos ______________________
12. El producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos ______________________
13. El cuadrado de la diferencia de dos números ______________________
14. La mitad del cuadrado de un número ______________________
15. El cuadrado de la mitad de un número ______________________
16. $x + y$ ______________________
17. $3(x - y)$ ______________________
18. $3x^3$ ______________________
19. $x^2 - y^2$ ______________________
20. $\sqrt{2x}$ ______________________
21. $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4}$ ______________________
22. $x^3 - y^3$ ______________________

Sol. $x,\quad x-y,\quad (abc)-4,\quad \dfrac{x+y}{z},\quad \dfrac{a+b}{a-b},\quad 3x^2,$

$\dfrac{x^3}{4},\quad \sqrt{xy},\quad 2(x+y),\quad 3(x-y),\quad x(y-w),$

$(x+y)(x-y),\quad (a-b)^2,\quad \dfrac{a^2}{2},\quad \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

La suma de dos números; el triple de la diferencia de dos números; el triple del cubo de un número; la diferencia del cuadrado de dos números; la raíz cuadrada del doble de un número; el cociente de la raíz cúbica de un número entre 4; la diferencia de los cubos de dos números.

Obtener el valor numérico de las siguientes expresiones:

23. $F = \dfrac{a-b}{c} + \dfrac{b+m}{d}$ para $a=2,\quad b=5,\quad c=\dfrac{1}{3},\quad d=\dfrac{3}{2},\quad m=6$ *Sol.* $-\dfrac{5}{3}$

24. $M = a^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$ para $a = 2,\ b = 1,\ c = 3,\ m = \frac{2}{3},\ n = \frac{3}{5}$

Sol. $\frac{27}{6}$

25. $G = \sqrt{\frac{b}{c}} + 5(b - a)\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2a}{c}}} - 5(c - a)$ para $a = 32,\ b = 9,\ c = 1$

Sol. -72

26. $H = 5(a - b) - 3(c + b) + \sqrt{\frac{c + b}{a}}$ para $a = 4,\ b = 2,\ c = 5$

Sol. $\frac{-22 + \sqrt{7}}{2}$

27. $E = \left(\frac{a - 1}{a + 1}\right) \div \left(\frac{a - 2}{a}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{1}{3a}\right)$ para $a = -\frac{2}{3}$

Sol. $-\frac{3}{2}$

28. $H = \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \div \left(\frac{x - y}{2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)\right] \frac{xy}{(x - y)^2}$ para $x = -2,\ y = 3$

Sol. $-\frac{36}{385}$

CAPÍTULO 8

Operaciones con expresiones algebraicas

1 Términos semejantes

En las expresiones algebraicas los *términos que tienen los mismos factores literales afectados de iguales exponentes se llaman términos semejantes.*

Ejemplo:

En la expresión $5xy + 3y - 2xy + 2xy^2$, los términos semejantes son: $5xy$ con $-2xy$

$4ac$ con $-6ac^2$ no son semejantes porque aunque tienen iguales literales no tienen los mismos exponentes.
x^{m+1} con $4x^{m+1}$ son semejantes.

Reducir términos semejantes es una operación cuyo objeto es convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

Para realizar esta operación se procede en la forma siguiente:

A. Para reducir términos semejantes *del mismo signo* se suman los coeficientes numéricos y delante de esta suma se pone el signo que tienen todos; enseguida se pone la parte literal.
B. Para reducir dos términos semejantes *de distinto signo* se restan los coeficientes numéricos y delante del resultado de esta diferencia se coloca el signo del mayor; a continuación se escribe la parte literal.
C. Si los términos semejantes *son de signos distintos* se reduce a un solo término, se reúnen todos los positivos y, por separado, todos los negativos; a los dos resultados obtenidos se les aplica el procedimiento anterior.

Para reducir un polinomio que contenga términos semejantes de diversas clases es necesario *reducir* por separado los de cada clase.

Ejemplos:

$$7x + 8x + x = 16x$$
$$-x - 4x + 7x = 2x$$
$$6x^3 - 6x^3 = 0$$
$$3x^2 + x^2 - y + 5y - 6 = 4x^2 + 4y - 6$$

2 Quitar y poner paréntesis

Cuando un grupo de términos en una expresión algebraica vayan a manejarse como un *solo número* deben encerrarse en paréntesis ( ), en corchetes [ ] o en llaves { }; estos símbolos se usan también para indicar que se van *a efectuar ciertas operaciones* y *el orden* en el cual deben efectuarse.

Ejemplo:

$$(2y - 4x) + (3x + 2y - z)$$

significa que el número representado por el primer paréntesis debe sumarse al representado por la expresión del segundo.

Ejemplo:

$$(4x^2) - (x + y)(2x - y)$$

significa que $(x + y)$ debe multiplicarse por $(2x - y)$ y el producto obtenido debe restarse de $4x^2$.

Cuando una expresión algebraica *contiene uno o más pares de símbolos de agrupación, encerrados en otro par, siempre se elimina primero el de más adentro.*

Para suprimir los signos de agrupación se procede como se indica a continuación:

Los que estén *precedidos del signo (+)* se les *quita* el signo de agrupación y se ponen sus términos sin cambiar sus signos de + o de −.

Los signos de agrupación *precedidos del signo (−)* se *quita* el signo de agrupación y se pone el simétrico de cada término.

Los conceptos antes señalados ya fueron mencionados y utilizados en las operaciones con los números reales.

Para *introducir términos* en un signo de agrupación procedemos en la forma siguiente:

Si los términos van a quedar *dentro* de un signo de agrupación *precedido* del signo *(+)*, cada término *queda con su propio signo;* si van a quedar *dentro* de un signo de agrupación *precedido* del signo (−), cada término debe *cambiar* de signo al introducirlo.

Ejemplos:

Quitar los signos de agrupación y simplificar por reducción de términos semejantes.

$$\begin{aligned} 4 - \{3x + [2x - (5y + 2)]\} &= 4 - \{3x + [2x - 5y - 2]\} \\ &= 4 - \{3x + 2x - 5y - 2\} \\ &= 4 - 3x - 2x + 5y + 2 = -5x + 5y + 6 \end{aligned}$$

Introducir los dos últimos términos dentro de un paréntesis precedido del signo (+) en la siguiente expresión:

$$x^2 + 4xy - y^3 + 5 = x^2 + 4xy + (-y^3 + 5)$$

Introducir los tres últimos términos dentro de un paréntesis precedido del signo (−) en la siguiente expresión:

$$x^3 + 5x^2 - 4ab^2 - b^3 = x^3 - (-5x^2 + 4ab^2 + b^3)$$

3

La adición y la sustracción

En la operación de *sumar* se usan las propiedades *conmutativa y asociativa,* y además, *reducimos* términos semejantes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (3x^2y + 12) + (5x^2y - 3x + 4) &= (3 + 5)x^2y - 3x + (12 + 4) \\ &= 8x^2y - 3x + 16 \end{aligned}$$

la operación también puede disponerse en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 3x^2y \qquad\quad + 12 \\ 5x^2y - 3x + \ \ 4 \\ \hline 8x^2y - 3x + 16 \end{array}$$

En la *sustracción* sumamos al minuendo el simétrico del sustraendo (inverso aditivo).

Ejemplo:

$$5x - 2 - (-4x + 5) = 5x - 2 + 4x - 5 = 9x - 7$$

4

La multiplicación y la división

En la *multiplicación* se usan las propiedades *conmutativa, asociativa y distributiva,* las cuales permiten reducir términos semejantes, así como la *regla de los signos* que señala:

El producto de dos números de signos iguales es positivo.
El producto de dos números de signos desiguales es negativo.
El producto de cualquier número multiplicado por cero es igual a cero.

La *división* es la operación inversa de la multiplicación, por lo que la regla de los signos queda:

El cociente de dos números de signos iguales es positivo.
El cociente de dos números de signos contrarios es negativo.

4.1 El cero como divisor

Cuando el *dividendo es cero y el divisor es cualquier número diferente de cero el cociente es cero.*

Ejemplo:

$$\frac{0}{3} = 0$$

Cuando el *dividendo es cualquier número diferente de cero y el divisor es cero el cociente no existe.*

Ejemplo:

$$\frac{2}{0} = \text{no existe}$$

5

Leyes de los exponentes en la multiplicación y en la división

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

$(a^2b^3)(2a^3) = 2a^5b^3$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^0 = 1$

Ejemplo:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}; \quad 2^{-1} = \frac{1}{2};$$

$m > n$ con $a \neq 0$ exponente positivo	$m = n$ exponente cero	$m < n$ exponente negativo

Ejemplo:

$$\frac{2}{a^{-2}\,b^{-3}} = 2a^2b^3$$

III. $(a^m)^n = a^{mn}$

Ejemplo:

$$(a^5)^2 = a^{10}$$

IV. $(ab)^m = a^m b^m$

Ejemplo:

$$(2ab)^3 = 8a^3b^3$$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$

Ejemplo:

$$\left(\frac{5+a}{b}\right)^2 = \frac{(5+a)^2}{b^2}$$

6

Ejemplos

Multiplicar $x^2 - xy + y^2$ por $2x^2$

$$2x^2(x^2 - xy + y^2) = 2x^2(x^2) + 2x^2(-xy) + 2x^2(y^2)$$
$$= 2x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2$$

Multiplicar $x^2 + xy - 2y^2$ por $x^2 - y$

$$(x^2 - y)(x^2 + xy - 2y^2) = x^4 + x^3y - 2x^2y^2 - x^2y - xy^2 + 2y^3$$

La operación de multiplicar también se puede disponer en forma vertical.
Al realizar las operaciones hemos aplicado la propiedad distributiva y una de las leyes de los exponentes.

EJERCICIO 7

Quitar los signos de agrupación y simplificar por reducción de términos semejantes:

1. $7y - (12y - 4y) =$ *Sol.* $-y$
2. $6 + (5 + 3xy) =$ *Sol.* $11 + 3xy$
3. $5xy - (5 + 3xy) =$ *Sol.* $2xy - 5$
4. $(5x + 1) - 1 =$ *Sol.* $5x$
5. $(4 - x) + x =$ *Sol.* 4
6. $-(7 + ab) - ab =$ *Sol.* $-7 - 2ab$
7. $-(xy - 4) + 2 =$ *Sol.* $-xy + 6$
8. $(x + y) - (x - y) =$ *Sol.* $2y$
9. $-(a - b) - (-a + b) =$ *Sol.* 0
10. $(x^2 + y^2 - z^2) - (x^2 - y^2 + z^2) =$ *Sol.* $2y^2 - 2z^2$

11. $2x - (7x - y) + (6x - 4y) =$ *Sol.* $x - 3y$
12. $m - (2mn - m^2) - [m^2 - (2mn + 3)] =$ *Sol.* $m + 3$
13. $2x - \{3x - y + 5 + [8x - (x + y - 1)]\} =$ *Sol.* $-8x + 2y - 6$
14. $7 - \{x - [2x + 3 + (x + 2)] + 5x\} =$ *Sol.* $-3x + 12$
15. $2(5x - y) - (-x + 5y) + 2 + (x - y) + (-2x + 3y) + 2 =$ *Sol.* $10x - 5y + 4$
16. $4x^2 - [5x - 3x(x + 8)] =$ *Sol.* $7x^2 + 19x$
17. $-\{3 + x(5 - x) - [x - (3x - 5)]\} =$ *Sol.* $x^2 - 7x + 2$
18. $x^2 - \{-xy - [-y^2 - x^2 + (-x^2 + 3xy) - x^2] + y^2\} =$ *Sol.* $4xy - 2y^2 - 2x^2$
19. $a - \{2 - a - [3a - 5(4a - 3) + a - 1] - 7(a + 2) - 3\} + 2 =$ *Sol.* $-7a + 31$
20. $-\{x + [-(x + y) - (x - y + z) - (-x + y)] - y\} =$ *Sol.* $z + 2y$
21. $2x[5x - 3x(x + 2) + 3x^2] - 2x^2[2 - x(3 - 2x) - x^2 + x]$ *Sol.* $-6x^2 + 4x^3 - 2x^4$
22. $x\{6 + 3(x - w) - 2[3x - 6w + 6] + w[x - z(x - 5w)]\} =$ *Sol.* $-6x - 3x^2 + 9xw + wx^2 - wzx^2 + 5w^2zx$

Resolver.

23. $x^9x^4 =$
24. $(5^2)(5^3) =$
25. $w^cw^2 =$
26. $z^{c-1}z^2 =$
27. $z^c \div z^2 =$
28. $\dfrac{z^{n+3}}{z^n} =$
29. $\dfrac{5^2}{5^6} =$
30. $(-2)^4 =$
31. $(3)(3)^2 =$
32. $y^4y^m =$
33. $x^rx^s =$
34. $x^{3n-1}x^{n+3} =$
35. $x^a \div x^c =$
36. $\dfrac{7^3}{7} =$
37. $(-5)^2 =$
38. $(-2ab)^2 =$
39. $y^5y^8 =$
40. $y^6 \div y^4 =$
41. $x^8 \div x^5 =$
42. $w^9 \div w^2 =$
43. $y^{2c} \div y^c =$
44. $\dfrac{10^6}{10^3} =$
45. $(-5)^3 =$
46. $(-3y)^3 =$

Obtener el valor numérico para $x = 2$, $y = -3$ de las siguientes expresiones.

47. $x^2 - 2xy + 3y^3 =$ *Sol.* -65
48. $5x^2 + 7y^3 =$ *Sol.* -169
49. $7x^2 - 2y^2 =$ *Sol.* 10
50. $x^3 + y^3 =$ *Sol.* -19
51. $x^2 + 2xy + y^2 =$ *Sol.* 1
52. $x^4 + y^4 =$ *Sol.* 97

53. $x^4 + 3y^4 =$ *Sol.* 259

54. $\dfrac{(x+2y)^2+1}{3x-2} =$ *Sol.* $\dfrac{17}{4}$

55. $\dfrac{y-x+5}{4y} =$ *Sol.* 0

56. $\dfrac{\sqrt{2x}-(x+1)^2}{4y} =$ *Sol.* $\dfrac{7}{12}$

Suma las siguientes expresiones:

57. $\begin{array}{r} 2a - b + 3c \\ \underline{4a - 2b + 2c} \end{array}$

58. $\begin{array}{r} 5x + 3y - 8z \\ \underline{4x - y - 6z} \end{array}$

59. $\begin{array}{rrr} 4x & +2y & +a \\ 6x & & -4a \\ \underline{-5x} & \underline{-7y} & \underline{+2a} \end{array}$

60. $\begin{array}{rrr} 6r & +3s & +2d \\ 3r & -5s & \\ \underline{-5r} & \underline{+4s} & \underline{-4d} \end{array}$

Suma las dos expresiones y a continuación resta la segunda expresión de la primera.

61. $\begin{array}{r} x + 3y - 9 \\ \underline{4x - 4y - 8} \end{array}$ $\begin{array}{r} 2a + 10b + 18 \\ \underline{7a - 8b + 10} \end{array}$ $\begin{array}{r} 7x + 6y \\ \underline{2x - 9y + 6w} \end{array}$ $\begin{array}{r} 5a + 9b - 10x \\ \underline{-7a + 7x} \end{array}$

62. $10x - 17y - 24c$; $13x + 15y - 16c$

63. $13a + 4b - 5c + 8$; $6a + 9b - 8c - 3$

64. De la suma $2a - 4b + 3c$ con $3a + 5b - 8c$ restar la suma de $a - b + 7c$ con $6a + 5b + 9c$

Resolver.

65. $\dfrac{(x^4y^2z)^2\,(xy^3z^2)^3}{(x^2y^3z)^5} =$

66. $(x^{2a+3})(x^{a-1}) =$

67. $(y^{b-1})(y^{3-b}) =$

68. $(c^{3+b})(c^{2+2b}) =$

69. $(y^{x+5})(y^{2x-2}) =$

70. $\dfrac{(a^{x+2})(b^{x-1})}{(a^{x-1})(b^{1+x})} =$

71. $\dfrac{(x^{n-3})(y^{2n+1})}{(x^{2-n})\,(y^{n-2})} =$

72. $\dfrac{(a^{n+2}\,y^{n+1})^2}{a^{2n}b^2} =$

Expresa con exponente positivo. Simplifica.

73. $a^{-2} =$
74. $x^2y^{-4} =$
75. $x^{-4}b^{-2} =$
76. $\dfrac{3m^{-3}n^{-2}}{5m^{-2}n^{-4}} =$
77. $a^{-m} =$
78. $4a^{-5} =$
79. $\dfrac{2a^{-2}b^{-4}}{a^{-3}c^{-1}} =$
80. $\dfrac{3a^2}{7a^{-4}b^2c} =$

7
División

7.1 Polinomio entre monomio

El *cociente* es la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo:

$$\frac{20a^3b + 25a^4c - 15a^5}{-5a^3} = \frac{20a^3b}{-5a^3} + \frac{25a^4c}{-5a^3} - \frac{15a^5}{-5a^3} = -4b - 5ac + 3a^2$$

$$\frac{12x^4y + 5x^2y^3}{4x^2y} = \frac{12x^4y}{4x^2y} + \frac{5x^2y^3}{4x^2y} = 3x^2 + \frac{5y^2}{4}$$

7.2 Polinomio entre polinomio

Procedemos en la siguiente forma:

A. *Ordenamos* el dividendo y el divisor según las potencias descendentes de una misma letra que aparezca en ambos.

B. Para obtener el primer término del cociente *dividimos el primer término* del dividendo entre el *primer* término del divisor.

C. Se *multiplica* el primer término del cociente por todo el divisor y se *resta* algebraicamente del dividendo.

D. El residuo obtenido se trata como un *nuevo* divisor y se repiten los procedimientos B y C.

E. Se *continúa este proceso* hasta obtener un residuo en el cual el mayor exponente de la letra que se escogió en A como base de la ordenación sea menor que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Ejemplos:

Dividir

$2y^3 + 5y^2 + 2y - 1$ entre $y + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2y^2 - y \quad + 5 \\
\hline
y + 3 & 2y^3 + 5y^2 + 2y - 1 \\
 & \underline{-2y^3 - 6y^2} \\
 & \qquad -y^2 + 2y \\
 & \qquad \underline{y^2 + 3y} \\
 & \qquad\qquad 5y - 1 \\
 & \qquad\qquad \underline{-5y - 15} \\
 & \qquad\qquad\quad -16
\end{array}
$$

Sol. $2y^2 - y + 5 - \dfrac{16}{y+3}$

Dividir

$y^2 + \dfrac{47}{12}y + \dfrac{5}{8}$ *entre* $\dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{4}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{2}{3}y + \frac{5}{2} \\
\hline
\frac{3}{2}y + \frac{1}{4} & y^2 + \frac{47}{12}y + \frac{5}{8} \\
 & \underline{-y^2 - \frac{1}{6}y} \\
 & \qquad \frac{15}{4}y + \frac{5}{8} \\
 & \qquad \underline{-\frac{15}{4}y - \frac{5}{8}} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Sol. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{5}{2}$

La división la *comprobamos* con la fórmula:

Dividendo = divisor por cociente más residuo.

EJERCICIO 8

Divide.

1. $\dfrac{32x^2y^3z^4 - 24x^4y^3z^2}{-4x^2y^2z^2} =$ *Sol.* $-8yz^2 + 6x^2y$
2. $\dfrac{-45a^4b^8 + 81a^6b^4}{-9a^3b^2} =$ *Sol.* $5ab^6 - 9a^3b^2$
3. $\dfrac{xy^2z^3 - x^3y^2z + x^2y^2c^2}{xy^2z} =$ *Sol.* $z^2 - x^2 + \dfrac{xc^2}{z}$
4. $4x^3 + 10x^2y - 5xy^2 + 3y^3;\ x + 3y$ *Sol.* $4x^2 - 2xy + y^2$
5. $2m^3 - m^2 - 8m - 2;\ 2m + 3$ *Sol.* $m^2 - 2m - 1 + \dfrac{1}{2m+3}$

6. $m^5 - 5m^4 + 7m^3 + m^2 - 8m + 7;\ m - 2$ *Sol.* $m^4 - 3m^3 + m^2 + 3m - 2 + \dfrac{3}{m-2}$

7. $2m^5 - 5m^4 + 6m^3 + 4m^2 - 11m + 4;\ 2m^2 - 3m + 1$ *Sol.* $m^3 - m^2 + m + 4$

8. $6 + 10m + 3m^2 + m^3 + m^4 + m^5;\ m^2 + m + 2$ *Sol.* $m^3 - m + 4 + \dfrac{8m-2}{m^2+m+2}$

8 Teorema del residuo

Un polinomio como $x^3 - 6x^2 + 2x + 5$ es *entero* porque ninguno de sus términos tiene literales en el denominador, y es *racional* porque ninguno de sus términos tiene una raíz expresada; es un polinomio entero racional en x y su grado es 3, ya que éste es el exponente mayor de la variable x.

Ejemplo:

$a^4 - 5a^3 - a - 3$ es un polinomio entero y racional en a, de grado 4, no importa que falte el término que corresponde a a^2.

Si dividimos un polinomio entero y racional en x entre un binomio de la forma $x - a$, por ejemplo.

Dividir $x^2 - 7x + 3$ entre $x - 4$, la división *no es exacta* y el residuo es -9.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 3 \\ \hline x - 4 & x^2 - 7x + 3 \\ & -x^2 + 4x \\ \hline & \qquad -3x + 3 \\ & \qquad 3x - 12 \\ \hline & \qquad\quad -9 \end{array}$$

El mismo residuo lo obtenemos si en el dividendo $x^2 - 7x + 3$ sustituimos el valor de x por 4.

De $x - 4 = 0$
$x = 4$

$f(x) = x^2 - 7x + 3$
$f(4) = (4)^2 - 7(4) + 3 = 16 - 28 + 3 = -9$

De donde, enunciamos el *teorema del residuo* de la siguiente manera: si un polinomio en función de x se divide entre $x - a$ hasta obtener un *residuo sin* x, este residuo es igual al que se obtiene *sustituyendo* en la función *el valor de a*.

9 Teorema del factor

Con base en el teorema del residuo podemos establecer otra proposición conocida como *teorema del factor*.

Si al realizar la operación para determinar el *residuo* obtenemos que éste es igual a *cero*, podemos aceptar que se trata de una división exacta, en cuyo caso el dividendo es un factor del divisor.

Recordamos que en la división euclidiana:

Dividendo = divisor por cociente más residuo

Ejemplo:

Determinar si $x - 1$ es factor del polinomio $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

De $x - 1 = 0$ $\qquad$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

$x = 1$ $\qquad$ $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 4(1) + 1 = 1 + 2 - 4 + 1 = 0$

Por tanto, podemos asegurar que $x - 1$ sí es factor.

Enunciamos el *teorema del residuo* así: un polinomio entero en x que se *anula* para $x = a$, o sea, sustituyendo el valor de a en el polinomio, es *divisible* entre $x - a$.

10

División abreviada

Aplicando el teorema del residuo podemos saber si un binomio de la forma $x - a$ es divisor exacto o no de un polinomio entero y racional en x; sin embargo, para encontrar el otro factor la operación puede resultar bastante laboriosa si se utiliza el procedimiento de la división ordinaria, por eso usaremos un método para efectuarla rápidamente, la conocida como *división abreviada o sintética,* la cual nos permite *encontrar el cociente* y el *residuo* fácilmente.

Ejemplo:

Obtener el cociente y el residuo usando la división abreviada.

De $x^3 + 4x^2 + 7x - 9$ entre $x + 2$

División ordinaria

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 3 \\
\hline
x + 2 & x^3 + 4x^2 + 7x - 9 \\
 & -x^3 - 2x^2 \\
 & \quad 2x^2 + 7x \\
 & \quad -2x^2 - 4x \\
 & \qquad 3x - 9 \\
 & \qquad -3x - 6 \\
 & \qquad\quad -15
\end{array}
$$

División abreviada

1	+4	+7	−9	−2
	−2	−4	−6	
1	+2	+3	−15	

Cociente $x^2 + 2x + 3$

Residuo -15

Para dividir un polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ entre $x - r$ se procede como sigue:

En la primera línea se escriben en orden los coeficientes $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$ tomados del dividendo; el número r previamente despejado lo colocamos a la derecha; si alguna potencia de x no aparece en $f(x)$, su coeficiente se escribe como cero (si el *término independiente no está* también *se pone cero* en su *lugar,* corresponde a x con exponente cero).

Se escribe el coeficiente principal de a_0 como primer término de la tercera línea, y se multiplica por r; escribimos el producto a_0r en la segunda línea debajo de a_1.

Se suma a_1 con el producto $a_0 r$ y se escribe la suma en la tercera línea, se continúa de esta manera; el último número de la tercera línea es el residuo.

Los números que se obtienen en la tercera línea son los coeficientes del cociente y corresponden a potencias descendentes de x.

El cociente es un polinomio en x cuyo grado es *uno menos* que el *grado del dividendo.*

Ejemplo:

Obtener el cociente y el residuo usando la división abreviada (en este ejemplo el dividendo carece del término x^2):

$2x^4 + 3x^3 - x - 8$ entre $x + 2$

División ordinaria

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 - x^2 + 2x - 5 \\
\hline
x+2 & 2x^4 + 3x^3 - x - 8 \\
 & \underline{-2x^4 - 4x^3} \\
 & -x^3 - x \\
 & \underline{x^3 + 2x^2} \\
 & 2x^2 - x \\
 & \underline{-2x^2 - 4x} \\
 & -5x - 8 \\
 & \underline{5x + 10} \\
 & 2
\end{array}
$$

División abreviada

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & +3 & 0 & -1 & -8 & -2 \\
 & -4 & +2 & -4 & +10 & \\
\hline
2 & -1 & +2 & -5 & \boxed{+2} &
\end{array}
$$

Cociente $2x^3 - x^2 + 2x - 5$

Residuo 2

EJERCICIO 9

Sin efectuar la división obténgase el residuo de dividir la primera expresión entre la segunda.

1. $3x^2 - 4x - 6,\ x + 2$ *Sol.* 14
2. $x^4 - x^2 + 5,\ x - 2$ *Sol.* 17
3. $a^4 - 3a^3 + a^2 - 4,\ a + 3$ *Sol.* 167
4. $m^3 + 2m,\ m - 4$ *Sol.* 72
5. $-3x^4 + 4x^2 + 2,\ x - 2$ *Sol.* -30
6. $-2x^3 - 9x^2 + 1,\ x + 4$ *Sol.* -15
7. $-3x^3 + 5x^2 - 4,\ x + \frac{1}{2}$ *Sol.* $-\frac{19}{8}$

Determínese en cada caso, sin efectuar la división, si el binomio dado es factor o no del polinomio.

8. $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$; entre $x + 1$, entre $x - 1$, entre $x + 2$.
9. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; entre $a + 3$, entre $a - 1$, entre $a + 1$.
10. $x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; entre $x + 1$, entre $x - 1$, entre $x + 2$.

11. $a^4 - 5a^3 + 5a^2 + 5a - 6$, entre $a - 1$, entre $a - 2$, entre $a + 1$.
12. $x^3 - 11x^2 + 23x + 35$; entre $x - 5$, entre $x + 1$, entre $x - 7$.

Empleando la división abreviada, obténgase el cociente y el residuo de dividir la primera expresión entre la segunda.

13. $3x^3 + 10x^2 + 5x + 2,\ x + 2$ *Sol.* $3x^2 + 4x - 3;\ 8$
14. $5y^4 + 5y^3 - y^2 + 2,\ y + 1$ *Sol.* $5y^3 - y + 1;\ 1$
15. $2a^4 + 2a^3 + a + 2,\ a + 2$ *Sol.* $2a^3 - 2a^2 + 4a - 7;\ 16$
16. $x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 8x + 8,\ x + 3$ *Sol.* $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 11x - 25;\ 83$
17. $5x^3 - 4x^2 + 8x - 6,\ x - 3$ *Sol.* $5x^2 + 11x + 41;\ 117$
18. $3x^4 - x^2 + 5x - 7,\ x + 2$ *Sol.* $3x^3 - 6x^2 + 11x - 17;\ 27$
19. $2x^3 + 5x^2 + 10x - 8,\ x + 3$ *Sol.* $2x^2 - x + 13;\ -47$

CAPÍTULO 9

Operaciones con expresiones algebraicas (cont.)

1 Productos y cocientes notables

1.1 El cuadrado de un binomio

El *cuadrado* de un binomio es un trinomio, y sus términos se obtienen en la forma siguiente:

Elevamos al cuadrado el primer término del binomio.
Obtenemos el *doble producto* de los términos del binomio.
Elevamos al cuadrado el segundo término del binomio.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplos:

Dar directamente el producto de:

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$
$$(3a + 4b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(4b) + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$$

1.2 El cuadrado de un polinomio

El *cuadrado* de un polinomio es igual a la *suma* de los cuadrados de cada término por separado, más *el doble* producto de todos los términos tomados de dos en dos.

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$(x + y + w + z)^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 + 2xy + 2xw + 2xz + 2yw + 2yz + 2wz$$

Ejemplo:

Dar directamente el producto de:

$$(x + 3y - 4)^2 = x^2 + 9y^2 + 16 + 6xy - 8x - 24y$$

1.3 El producto de la suma y la diferencia de dos números (binomio conjugado)

El *producto* de un binomio conjugado es igual al *cuadrado* del primer término *menos* el cuadrado del segundo.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Ejemplo:

Dar directamente el producto de:

$$(3a + 4b)(3a - 4b) = (3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2$$

1.4 El producto de dos binomios con términos semejantes

El *producto* de dos binomios con términos semejantes es igual al *producto de los semejantes, más el producto de la suma algebraica de los no semejantes con el semejante, más el producto de los no semejantes.*

$$(y + a)(y + b) = y^2 + (a + b)y + ab$$

Ejemplo:

Dar directamente el producto de:

$$(y + 6)(y - 2) = y^2 + (6 - 2)y + (6)(-2) = y^2 + 4y - 12$$

El diagrama siguiente es un medio mnemotécnico para recordar fácilmente el procedimiento citado:

$$\begin{array}{c} 6y \\ (y + 6)(y - 2) = y^2 + 4y - 12 \\ -2y \end{array}$$

1.5 El cubo de un binomio

El *cubo* de un binomio tiene cuatro términos que se obtienen así:

Elevamos al cubo el primer término del binomio.
Obtenemos el *triple* producto del cuadrado del primer término por el segundo.
Obtenemos el *triple* producto del primer término por el cuadrado del segundo.
Elevamos al cubo el segundo término del binomio.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Ejemplo:

Dar directamente el producto de:

$$\begin{aligned}(2x - 3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(-3y) + 3(2x)(-3y)^2 + (-3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3\end{aligned}$$

EJERCICIO 10

(Primera parte)
Obtener directamente el producto de:

1. $(x + 2)^2 =$
2. $(3 + y)^2 =$
3. $(5x + y)^2 =$
4. $(4 + 3y)^2 =$
5. $(a + b)^2 =$
6. $(2 - x)^2 =$

7. $(4 - b)^2 =$

8. $(2x - 3y)^2 =$

9. $(a - b + c)^2 =$

10. $(x + y - 2c)^2 =$

11. $(a^2 + 2b)^2 =$

12. $(b^x + c^x + 1)^2 =$

13. $(2x^2 - 4y)^2 =$

14. $(x - 3)^2 =$

15. $(a^2 - 2)^2 =$

16. $(3a - b^m)^2 =$

17. $(2a + b - 2c)^2 =$

18. $(x^2 - 2y - x + 2)^2 =$

19. $(3x + 2w + y - 3)^2 =$

20. $(4a - 2b)\,(4a + 2b) =$

21. $(2x + 4y)\,(2x - 4y) =$

22. $(3a - 5b)\,(3a + 5b) =$

23. $(m + 3)\,(m - 3) =$

24. $(x + 2y)\,(x - 2y) =$

25. $(4a - 1)\,(4a + 1) =$

26. $(3x + 4y)\,(3x - 4y) =$

27. $(x^m + y^n)\,(x^m - y^n)$

28. $(2a^{y+1} + b^{y-1})\,(2a^{y+1} - b^{y-1}) =$

Considera los factores de cada operación como el producto de la suma y la diferencia de dos cantidades. Da directamente el producto:

28. $(x + y + w)\,(x + y - w) =$

29. $(a + b - 2)\,(a + b + 2) =$

30. $(x + 2y - 3w)\,(x + 2y + 3w) =$

31. $(a - 2b + 2c)\,(a - 2b - 2c) =$

32. $(4m + 2n - 2)\,(4m + 2n + 2) =$

Obtener directamente el producto de:

33. $(a + 4)\,(a + 2) =$

34. $(x - 5)\,(x - 4) =$

35. $(2x + 2)\,(x + 3) =$

36. $(3y + 1)\,(y - 4) =$

37. $(2a + c)(a - 3c) =$

38. $(2m - n)(m - 2n) =$

39. $(5a - 2b)(3a + 4b) =$

40. $(2x + 5y)(6x - 2y) =$

41. $(5m - 8n)(6m + 10n) =$

42. $(7c + 3d)(5c + 7d) =$

43. $(a + 1)^3 =$

44. $(x - 2)^3 =$

45. $(1 - 5y)^3 =$

46. $(2x + 3y)^3 =$

47. $(4a + 5b)^3 =$

48. $(b - 3c)^3 =$

49. $(y + 4)^3 =$

50. $(2 - b)^3 =$

51. $(2y + 1)^3 =$

52. $(3 - w)^3 =$

1.6 Binomio a la enésima potencia

Observa:

$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Conclusiones:

1. El número de términos es igual al *exponente* del binomio *más uno*.
2. El grado del primer término es igual al *grado* del binomio, *disminuye* sucesivamente en uno en cada uno de los siguientes términos y es factor en todos los términos, menos en el último.
3. El segundo término, *y* en los ejemplos, aparece en el segundo término del desarrollo con *exponente uno, aumenta* sucesivamente en uno en cada uno de los términos siguientes hasta llegar al exponente del binomio, el cual es el último del resultado.
4. El coeficiente del primer término del resultado *es uno,* y el del segundo es el exponente del binomio; el último término también *es uno.*
5. El coeficiente de un término cualquiera es igual al *coeficiente* del *término inmediato anterior* por el exponente de *x* en este término y dividido entre el número de términos desarrollados.
6. El *grado* de cada término es igual al grado del binomio.
7. Los términos que *equidistan* de los extremos tienen coeficientes iguales.
8. Cada *término* del binomio se considera con coeficiente y signo.

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}\,y^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + y^n$$

1.7 Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las mismas cantidades

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{\cancel{(x + y)}\,(x - y)}{\cancel{x + y}} = x - y$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)\,\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} = x + y$$

Ejemplos:

Dar directamente el cociente de:

$$\frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y} = x - 2y$$

$$\frac{16 - 36x^4}{4 - 6x^2} = 4 + 6x^2$$

1.8 Cociente de la suma o diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las mismas cantidades

Si realizamos la división se comprueba que: la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades es igual (respecto al denominador) al *cuadrado* de la primera cantidad *menos* el *producto* de la primera por la segunda más el *cuadrado* de la segunda cantidad.

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

Ejemplo:

Dar directamente el cociente de:

$$\frac{1 + a^3}{1 + a} = 1 - a + a^2$$

La diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades es igual (respecto al denominador) al *cuadrado* de la primera cantidad *más* el *producto* de la primera por la segunda más el *cuadrado* de la segunda cantidad.

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Ejemplo:

Dar directamente el cociente de:

$$\frac{1 - a^3}{1 - a} = 1 + a + a^2$$

EJERCICIO 10

(Segunda parte)

Dar directamente el cociente de:

1. $\dfrac{y^2-1}{y+1} =$

2. $\dfrac{1-a^2}{1+a} =$

3. $\dfrac{4-y^2}{2+y} =$

4. $\dfrac{x^4-9}{x^2+3} =$

5. $\dfrac{16-25y^4}{4+5y^2} =$

6. $\dfrac{9x^2-4a^2b^2}{3x-2ab} =$

7. $\dfrac{4-9x^{2m+16}}{2+3x^{m+8}} =$

8. $\dfrac{9-(x+y)^2}{3-(x+y)} =$

9. $\dfrac{4-(a+b)^2}{2-(a+b)} =$

10. $\dfrac{4-y^2}{2+y} =$

11. $\dfrac{x^4-9}{x^2+3} =$

12. $\dfrac{16-25y^4}{4+5y^2} =$

13. $\dfrac{9-(x+y)^2}{3-(x+y)} =$

14. $\dfrac{4-(a+b)^2}{2-(a+b)} =$

CAPÍTULO 10

Operaciones con polinomios. Factorización

1 Descomponer polinomios en factores

Ya estudiamos los productos notables, ahora consideraremos el problema de encontrar los *factores* cuando se da el *producto.*

1.1 Por entidades

De $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

invirtiendo el proceso obtenemos la factorización

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Un trinomio ordenado en relación con una literal es cuadrado perfecto cuando el primero y último términos tienen *raíz cuadrada* exacta y son positivos y, además, el segundo término es el *doble* del producto de las raíces cuadradas.

Ejemplo:

Determinar si $a^2 + 6ab + 9b^2$ es cuadrado perfecto.

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{9b^2} = 3b$$

doble producto de las raíces $2(a)(3b) = 6ab$ segundo término.

Por tanto, aseguramos que es un cuadrado perfecto.

$a^2 + 6ab + 9ab^2 = (a + 3b)^2$

En general procedemos en la forma siguiente, *extraemos* la raíz cuadrada al primero y tercer términos del trinomio y separamos estas raíces con el *mismo signo* del segundo término. El binomio formado así es la raíz cuadrada del trinomio y se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplo:

Factorizar $a^2 - 2ab + b^2$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

La diferencia de dos cuadrados.

Ya estudiamos que el producto de la suma y la diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados.

De $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

invirtiendo el proceso obtenemos la factorización.

Se extrae la *raíz cuadrada* al primer y segundo términos y se multiplica la *suma* de estas raíces cuadradas por su *diferencia.*

Ejemplo:

Factorizar $9a^2 - 4b^2$

$$\sqrt{9a^2} = 3a$$
$$\sqrt{4b^2} = 2b$$
$$9a^2 - 4b^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$$

El procedimiento también es aplicable a la *diferencia* de cuadrados en que uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas.

Ejemplos:

Factorizar $(x + y)^2 - z^2$

$$\sqrt{(x + y)^2} = (x + y)$$
$$\sqrt{z^2} = z$$
$$[(x + y) + z][(x + y) - z] = (x + y + z)(x + y - z)$$

Factorizar $(a + y)^2 - (y + 2)^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + y)^2} &= a + y \\ \sqrt{(y + 2)^2} &= y + 2 \\ (a + y)^2 - (y + 2)^2 &= [(a + y) + (y + 2)]\,[(a + y) - (y + 2)] \\ &= (a + y + y + 2)(a + \cancel{y} - \cancel{y} - 2) \\ &= (a + 2y + 2)(a - 2) \end{aligned}$$

2

Cubo perfecto de binomios

De $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

invirtiendo el proceso obtenemos la factorización

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

Un polinomio ordenado en relación con una literal es cubo perfecto cuando:

Tiene *cuatro* términos.
El primero y el último términos son *cubos* perfectos.

El segundo término es + o − y el *triple* del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la *raíz cúbica* del segundo.

El tercer término es + el *triple* de la raíz cúbica del primero por el cuadrado de la raíz cúbica del segundo.

Si todos los términos son positivos, la expresión dada corresponde al cubo de la *suma* de dos términos; si los términos son, alternativamente, positivos y negativos, la expresión dada es el cubo de la *diferencia* de dos términos.

Ejemplo:

Factorizar $8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$

analizamos la expresión para ver si cumple con las condiciones señaladas:

Tiene *cuatro* términos.
Raíz *cúbica* de $8y^3$ es $2y$
Raíz *cúbica* de 1 es 1
Segundo término $3(2y)^2(1) = 12y^2$
Tercer término $3(2y)(1)^2 = 6y$

Cumple las condiciones; como todos sus términos son positivos la expresión es el cubo de $(2y + 1)$.

EJERCICIO 11

Factorizar.

1. $x^2 + 2x + 1 =$ Sol. $(x + 1)^2$
2. $x^2 - 2x + 1 =$ Sol. $(x - 1)^2$
3. $a^4 + 2a^2 + 1 =$ Sol. $(a^2 + 1)^2$
4. $y^2 - 6y + 9 =$ Sol. $(y - 3)^2$
5. $49b^2 - 14b + 1 =$ Sol. $(7b - 1)^2$
6. $a^2 + 2ac + c^2 =$ Sol. $(a + c)^2$
7. $b^2 - 4bc + 4c^2 =$ Sol. $(b - 2c)^2$
8. $y^2 - 8y + 16 =$ Sol. $(y - 4)^2$
9. $\dfrac{x^2}{4} + xy + y^2$ Sol. $\left(\dfrac{x}{2} + y\right)^2$
10. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{2y}{3} + 1 =$ Sol. $\left(\dfrac{y}{3} - 1\right)^2$
11. $9a^2 - b^2 =$ Sol. $(3a - b)(3a + b)$
12. $x^2 - 25 =$ Sol. $(x + 5)(x - 5)$
13. $1 - 16a^2 =$ Sol. $(1 + 4a)(1 - 4a)$
14. $4a^2 - 36c^2 =$ Sol. $(2a - 6c)(2a + 6c)$
15. $m^2n^2 - 4 =$ Sol. $(mn + 2)(mn - 2)$
16. $(a - 2)^2 - b^2 =$ Sol. $(a - 2 + b)(a - 2 - b)$
17. $x^2 - (y + 3)^2 =$ Sol. $(x + y + 3)(x - y - 3)$
18. $9a^2 - (2b - 4)^2 =$ Sol. $(3a + 2b - 4)(3a - 2b + 4)$
19. $(x + y)^2 - (m + n)^2 =$ Sol. $(x + y + m + n)(x + y - m - n)$
20. $(x + y)^2 - (m - n)^2 =$ Sol. $(x + y + m - n)(x + y - m + n)$
21. $(2a - 1)^2 - (b - 1)^2 =$ Sol. $(2a + b - 2)(2a - b)$
22. $a^4 - b^4 =$ Sol. $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
23. $y^4 - 1 =$ Sol. $(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$
24. $25 - x^4 =$ Sol. $(5 + x^2)(5 - x^2)$
25. $1 - 36x^4 =$ Sol. $(1 + 6x^2)(1 - 6x^2)$

26. $81x^4 - 1 =$ *Sol.* $(9x^2 + 1)(9x^2 - 1)$

27. $16y^4 - 16x^4 =$ *Sol.* $(4y^2 + 4x^2)(2y + 2x)(2y - 2x)$

28. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$ *Sol.* $(x + 1)^3$

29. $1 - 3b + 3b^2 - b^3 =$ *Sol.* $(1 - b)^3$

30. $27 - 27a + 9a^2 - a^3 =$ *Sol.* $(3 - a)^3$

31. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 =$ *Sol.* $(x + y)^3$

3
Por agrupamientos

3.1 Factor común monomio

Si cada término de un polinomio tienen un *factor común,* **el polinomio puede escribirse como el producto de dos factores, uno de los cuales es el factor común.**

Ejemplo:

Factorizar $2ay + 4by + 6cy$

Cada término tiene el factor común $2y$, si dividimos la expresión dada entre $2y$, obtenemos el otro factor que es $(a + 2b + 3c)$, de donde,

$$2ay + 4by + 6cy = 2y(a + 2b + 3c)$$

3.2 Factor común binomio

En algunos casos el factor común de cada término de una expresión puede tener *más* **de un término.**

Ejemplo:

Factorizar $x(a + b) + y(a + b)$

Un término es $x(a + b)$, el otro es $y(a + b)$; cada término tiene $(a + b)$ como factor, si dividimos la expresión dada entre $(a + b)$ obtenemos el cociente $x + y$, que es el otro factor.

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

3.3 Agrupando

Factorizar $ax + ay + bx + by$

Los dos primeros términos tienen el *factor común a* **y los dos últimos el** *factor común b agrupamos* **los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo correspondiente.**

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

La agrupación puede hacerse de varias formas, pero debe ser de tal modo que los términos agrupados tengan *algún* **factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis, después de sacar el factor común en cada grupo sean** *exactamente* **iguales; si esta condición es imposible después de varios intentos, la expresión recibida no puede factorizarse por este método.**

Ejemplos:

Factorizar $3x^2 - 6xy + 4x - 8y$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6xy + 4x - 8y &= (3x^2 - 6xy) + (4x - 8y) \\ &= 3x(x - 2y) + 4(x - 2y) \\ &= (3x + 4)(x - 2y) \end{aligned}$$

los dos primeros términos tienen el factor común $3x$ y los dos últimos el factor común 4.

Factorizar $2a^2 - 3ab - 4a + 6b$

$$\begin{aligned} 2a^2 - 3ab - 4a + 6b &= (2a^2 - 3ab) - (4a - 6b) \\ &= a(2a - 3b) - 2(2a - 3b) \\ &= (a - 2)(2a - 3b) \end{aligned}$$

Los dos primeros términos tienen el factor común a y los dos últimos el factor común 2; los agrupamos, pero introducimos los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo $-$, para lo cual hay que *cambiarle el signo* a los términos que quedan dentro del paréntesis con el fin de obtener como factor común $(2a - 3b)$.

4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Los trinomios de esta forma son como los siguientes; en ellos el coeficiente del término cuadrático es *uno*.

$x^2 + 6x + 8$, $b^2 - b - 12$, $a^2 + 8a + 15$, $m^2 + 2m - 8$

Factorizar $x^2 + 7x + 10$

El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo *primer* término es x, el cual corresponde a la *raíz cuadrada* del primer término del trinomio. El *producto* de otros términos debe ser 10; este valor es el producto de

$$2 \text{ y } 5, \ -2 \text{ y } -5, \ 10 \text{ y } 1, \ -10 \text{ y } -1, \ldots$$

para determinarlo debemos considerar al segundo término del trinomio dado. Observamos que los términos cuyo producto es 10 deben dar como *suma* $+7$; sólo el par $+2$ y $+5$ da la suma requerida. De donde:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

Ejemplos:

Factorizar $x^2 - 13x + 40$
$x^2 - 13x + 40 = (x - 5)(x - 8)$

buscamos un par de números cuyo *producto* sea $+40$ y *sumen* -13, sólo el par -5 y -8 reúne las condiciones.

Factorizar $a^2 + 5a - 14$

$a^2 + 5a - 14 = (a + 7)(a - 2)$

buscamos un par de números cuyo *producto* sea -14 y *sumen* $+5$, sólo el par $+7$ y -2 reúne las condiciones.

Factorizar $b^2 - b - 12$

$b^2 - b - 12 = (b - 4)(b + 3)$

buscamos un par de números cuyo *producto* sea -12 y *sumen* -1, sólo el par -4 y $+3$ reúne las condiciones.

Otro caso de este tipo de factorización es:

Factorizar $a^4 + 5a^2 + 4$

$a^4 + 5a + 4 = (a^2 + 1)(a^2 + 4)$

buscamos un par de números cuyo *producto* sea $+4$ y *sumen* $+5$, sólo el par $+1$ y $+4$ reúne las condiciones.

Factorizar $y^6 + 7y^3 - 44$

$y^6 + 7y^3 - 44 = (y^3 + 11)(y^3 - 4)$

buscamos un par de números cuyo *producto* sea -44 y *sumen* $+7$, sólo el par $+11$ y -4 reúne las condiciones.

5

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Los trinomios de esta forma son como los siguientes, en ellos el coeficiente del término de segundo grado es un número *distinto de uno.*

$3x^2 - x - 2,\ 2a^2 + 11a + 5,\ 5y^2 - 8y + 3,\ 3x^2 + 7x - 6$

Para factorizar este tipo de expresiones usaremos dos procedimientos que se aplicarán a continuación, pero después veremos con qué facilidad se resuelven por evaluación.

5.1 Primer procedimiento

Factorizar $2x^2 + 5x + 3$

Si multiplicamos el trinomio por el coeficiente de x^2 (en este caso es 2), y dejamos *indicado* el producto de 2 por $5x$, se tiene:

$4x^2 + 2(5x) + 6$

como

$4x^2 = (2x)^2$

$2(5x) = 5(2x)$ podemos escribir

$(2x)^2 + 5(2x) + 6 = (2x + 2)(2x + 3)$

hemos factorizado como en el caso anterior, buscamos dos números cuyo *producto* fuera $+6$ y la *suma* $+5$.

$$\frac{(2x+2)(2x+3)}{(2)(1)} = (x+1)(2x+3)$$

como al principio *multiplicamos* por 2, ahora hemos *dividido* entre 2 para *cancelar* la multiplicación.

$2x^2 + 5x - 3 = (x + 1)(2x + 3)$

5.2 Segundo procedimiento

Factorizar $6x^2 - 7x - 3$

Los factores de $6x^2$ son $6x$ y x, $-6x$ y $-x$, $3x$ y $2x$, $-3x$ y $-2x$.

Los factores de -3 son 3 y -1, -3 y 1.

Combinamos los números de manera que la *suma* de sus *productos* en cruz sea igual a $-7x$, esto implica la necesidad de hacer varios planteamientos; los números se colocan en la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} 2x & -3 \\ 3x & 1 \end{array} \quad (2x)(1) + (3x)(-3) = 2x - 9x = -7x$$

Por tanto, los factores son $(2x-3)(3x+1)$

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

Ejemplo:

Factorizar $4y^2 + 8y + 3$

Con el primer procedimiento:

$$16y^2 + 4(8y) + 12$$
$$16y^2 + 8(4y) + 12 = (4y + 6)(4y + 2)$$
$$\frac{(4y+6)(4y+2)}{(2)(2)} = (2y+3)(2y+1)$$

De donde,

$$4y^2 + 8y + 3 = (2y + 3)(2y + 1)$$

Con el segundo procedimiento:

$$4y^2 + 8y + 3$$

Los factores de $4y^2$ son $4y$ con y, $-4y$ con $-y$, $2y$ con $2y$, $-2y$ con $-2y$.
Los factores de 3 son 3 con 1, -3 con -1.

$$\begin{array}{ll} 2y & 3 \\ 2y & 1 \end{array} \quad (2y)(1) + (2y)(3) = 2y + 6y = 8y$$

De donde, los factores son $(2y + 3)(2y + 1)$

$$4y^2 + 8y + 3 = (2y + 3)(2y + 1)$$

EJERCICIO 12

Factorizar.

1. $x^2 + xy =$ *Sol.* $x(x+y)$
2. $a - a^2 =$ *Sol.* $a(1-a)$
3. $4m^2 + 12m^3 =$ *Sol.* $4m^2(1+3m)$
4. $xyz - xyz^2 =$ *Sol.* $xyz(1-z)$
5. $5x^3 - 10x^2 + 15x =$ *Sol.* $5x(x^2 - 2x + 3)$
6. $x^2 + x^3 - x^5 =$ *Sol.* $x^2(1 + x - x^3)$
7. $7a^2b^2 - 14b^2 + 28b =$ *Sol.* $7b(a^2b - 2b + 4)$
8. $x(a+1) + y(a+1) =$ *Sol.* $(a+1)(x+y)$
9. $3(x-1) + b(x-1) =$ *Sol.* $(x-1)(3+b)$
10. $y(a-b) + (a-b)z =$ *Sol.* $(a-b)(y+z)$
11. $y(b+2) + b + 2 =$ *Sol.* $(b+2)(y+1)$
12. $x(b+1) - b - 1 =$ *Sol.* $(b+1)(x-1)$
13. $x^2 + 2 - y(x^2+2) =$ *Sol.* $(x^2+2)(1-y)$
14. $3 - y + 2a(3-y) =$ *Sol.* $(3-y)(1+2a)$

15. $x^3(a-c+2)-y^2(a-c+2)=$ Sol. $(a-c+2)(x^3-y^2)$
16. $(a+2)(a-3)+3b(a-3)=$ Sol. $(a-3)(a+2+3b)$
17. $(x+2)(x+1)-5(x+1)=$ Sol. $(x+1)(x-3)$
18. $ax-bx+ay-by=$ Sol. $(a-b)(x+y)$
19. $a^5+2a^2+a^3b+2b=$ Sol. $(a^3+2)(a^2+b)$
20. $a^2+2a+ab+2b=$ Sol. $(a+2)(a+b)$
21. $m^2+m+mn+n=$ Sol. $(m+1)(m+n)$
22. $a^3+a^2-9a-9=$ Sol. $(a+1)(a+3)(a-3)$
23. $y^2-b^2+y-b^2y=$ Sol. $(y+1)(y-b^2)$
24. $4b^3-1-b^2+4b=$ Sol. $(4b-1)(b^2+1)$
25. $1+x+3xy+3y=$ Sol. $(x+1)(3y+1)$
26. $6bx+3b+1+2x=$ Sol. $(3b+1)(2x+1)$
27. $x^2+8x+15=$ Sol. $(x+5)(x+3)$
28. $y^2-5y-14=$ Sol. $(y-7)(y+2)$
29. $a^2-5a-6=$ Sol. $(a-6)(a+1)$
30. $x^2-x-6=$ Sol. $(x-3)(x+2)$
31. $a^2+2a-24=$ Sol. $(a+6)(a-4)$
32. $a^2+5ab-36b^2=$ Sol. $(a+9b)(a-4b)$
33. $m^2+mn-12n^2=$ Sol. $(m+4n)(m-3n)$
34. $x^2+xy-72y^2=$ Sol. $(x+9y)(x-8y)$
35. $x^2+xy-56y^2=$ Sol. $(x+8y)(x-7y)$
36. $a^2+a-20=$ Sol. $(a+5)(a-4)$
37. $3y^2-y-2=$ Sol. $(y-1)(3y+2)$
38. $6y^2+7y+2=$ Sol. $(3y+2)(2y+1)$
39. $12a^2-5a-2=$ Sol. $(3a-2)(4a+1)$
40. $12y^2-7y+1=$ Sol. $(3y-1)(4y-1)$
41. $3a^2-2a-5=$ Sol. $(3a-5)(a+1)$
42. $4y^2+13y+3=$ Sol. $(y+3)(4y+1)$
43. $4b^2+16b+7=$ Sol. $(2b+7)(2b+1)$
44. $8y^2-5ay-3a^2=$ Sol. $(y-a)(8y+3a)$
45. $8x^2+14xy-15y^2=$ Sol. $(2x+5y)(4x-3y)$
46. $6y^2+17ay+12a^2=$ Sol. $(2y+3a)(3y+4a)$
47. $2a^2+5ab+2b^2=$ Sol. $(a+2b)(2a+b)$
48. $6x^2+10xy-4y^2=$ Sol. $(2x+4y)(3x-y)$

6 Factorizar en tres factores

Lo primero que debe hacerse es observar si hay algún *factor común*, si lo hay, debe factorizarse de inmediato.

Ejemplo:

Factorizar $3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

7 Factorización de expresiones compuestas

Combinación de trinomios cuadrados perfectos y diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

Factorizar $x^2 + 2xy + y^2 - 4$

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 4 &= (x^2 + 2xy + y^2) - 4 \\ &= (x + y)^2 - 4 \\ &= (x + y + 2)(x + y - 2) \end{aligned}$$

Factorizar $x^2 - 2x + 1 - b^2$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 - b^2 &= (x^2 - 2x + 1) - b^2 \\ &= (x - 1)^2 - b^2 \\ &= (x - 1 + b)(x - 1 - b) \end{aligned}$$

EJERCICIO 13

Factorizar.

1. $2b^2 - 2 =$ *Sol.* $2(b+1)(b-1)$
2. $x^3 - 3x^2 - 28x =$ *Sol.* $x(x-7)(x+4)$
3. $a^3 - a^2 - 2a =$ *Sol.* $a(a-2)(a+1)$
4. $5x^2 - 45y^2 =$ *Sol.* $5(x+3y)(x-3y)$
5. $a^3 + 2a^2b + ab^2 =$ *Sol.* $a(a+b)(a+b)$
6. $x^3 - 4xa^2 =$ *Sol.* $x(x+2a)(x-2a)$
7. $m^4 - 16n^4 =$ *Sol.* $(m^2+4n^2)(m-2n)(m+2n)$
8. $x^3 + x^2 - 9x - 9 =$ *Sol.* $(x+1)(x+3)(x-3)$
9. $a^3 - a + a^2y - y =$ *Sol.* $(a+1)(a-1)(a+y)$
10. $y^3 + 3y^2 - 16y - 48 =$ *Sol.* $(y+3)(y+4)(y-4)$
11. $y^4 - y^3 + y - 1 =$ *Sol.* $(y-1)(y+1)(y^2-y+1)$
12. $ax^2 - a - x^2 + 1 =$ *Sol.* $(a-1)(x+1)(x-1)$
13. $a^2 + 2ab + b^2 - y^2 =$ *Sol.* $(a+b+y)(a+b-y)$
14. $a^2 - 2ab + b^2 - y^2 =$ *Sol.* $(a-b+y)(a-b-y)$
15. $x^2 + 6x + 9 - c^2 =$ *Sol.* $(x+3+c)(x+3-c)$
16. $x^2 - 4x + 4 - 9b^2 =$ *Sol.* $(x-2+3b)(x-2-3b)$
17. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4c^2 =$ *Sol.* $(x-3y+2c)(x-3y-2c)$
18. $x^2 - b^2 - 2bc - c^2 =$ *Sol.* $(b+c-x)(b+c+x)$

8 Factorización de suma o diferencia de cubos perfectos

De los cocientes notables tenemos que:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

En la división exacta el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor, por lo cual aceptamos que

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

La suma de dos cubos perfectos se descompone en *dos* factores:

La *suma* de las raíces cúbicas de sus términos, y el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las dos raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

La *diferencia* de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

La diferencia de sus raíces cúbicas de sus términos, y el cuadrado de la primera raíz cúbica, más el producto de las dos raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

Ejemplos:

Factorizar $x^3 + 8$.

La raíz cúbica de x^3 es x, la raíz cúbica de 8 es 2.

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Factorizar $x^3 - 27$.

La raíz cúbica de x^3 es x, la raíz cúbica de 27 es 3.

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

9

Factorización de un polinomio por el método de evaluación: por divisores binomios

La aplicación de este procedimiento de factorización resulta de gran utilidad, ya que permite obtener fácilmente las raíces de ecuaciones de cualquier grado.

Al aplicar el teorema del residuo, si el residuo era cero, aceptamos que se trataba de una división exacta. Ahora, queremos factorizar por evaluación la expresión $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Observa que si tratamos de aplicar el teorema del residuo no tenemos el divisor $(x - r)$ y desconocemos el valor de r, para determinarlo procedemos así:

Factorizar por evaluación $x^3 - 4x^2 + x + 6$, Disponemos la *división abreviada*, anotando los coeficientes de x así como el término independiente, el cual es el coeficiente de x^0; si después de ordenar el polinomio en forma descendente no hay alguno o varios términos de x, en su lugar ponemos *cero*.

$$\begin{array}{cccc|} 1 & -4 & +1 & +6 \\ \hline \end{array}$$

Para determinar el valor de r debemos considerar los factores del término independiente 6, sus factores son $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$; ahora debemos probar con cada uno de estos factores hasta obtener un residuo igual a *cero*.

probamos con $+1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & +1 & +6 & 1 \\ & 1 & -3 & -2 & \\ \hline 1 & -3 & -2 & \boxed{+4} & \end{array}$$

no se anula

probamos con -1

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & +1 & +6 & -1 \\ & -1 & +5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & +6 & \boxed{0} & \end{array}$$

se anula

Se anula para $x = -1$, por lo que el polinomio dado es divisible entre $x - (-1) = x + 1$

El cociente de dividir $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x + 1$ será de segundo grado y sus coeficientes son $1, -5, +6$. El cociente siempre será de un grado menor al grado que tenga el polinomio dado.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$$

La expresión $x^2 - 5x + 6$ podemos factorizarla por cualquiera de los métodos ya estudiados que sea aplicable, o bien, de nuevo por evaluación.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

Ejemplo:

Factorizar por evaluación $3x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 9x + 9$

Los factores de 9 son: $+1, -1, +3, -3, +9, -9$

probamos con $+1$

3	−9	−4	+9	+9	1
	+3	−6	−10	−1	
3	−6	−10	−1	$\boxed{+8}$	

no se anula

probamos con -1

3	−9	−4	+9	+9	−1
	−3	+12	−8	−1	
3	−12	+8	+1	$\boxed{+8}$	

no se anula

probamos con $+3$

3	−9	−4	+9	+9	3
	+9	0	−12	−9	
3	0	−4	−3	$\boxed{0}$	

se anula

Se anula para $x = 3$, de donde, el polinomio dado es divisible entre $x - (3) = x - 3$

El cociente de dividir $3x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 9x + 9$ entre $x - 3$ será de tercer grado y sus coeficientes son 3, 0, -4, -3.

$$3x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 9x + 9 = (x - 3)(3x^3 - 4x - 3)$$

Ejemplo:

Factorizar por evaluación $y^5 - 25y^3 + y^2 - 25$

Como no hay términos en y^4 ni en y, en el lugar de cada uno ponemos *cero*.

Los factores de 25 son: $+1, -1, +5, -5, +25, -25$.

probamos con $+1$

1	0	−25	+ 1	0	−25	1
	1	+ 1	−24	−23	−23	
1	+1	−24	−23	−23	$\boxed{-48}$	

no se anula

probamos con-1

1	0	−25	+ 1	0	−25	−1
	−1	+ 1	+24	−25	+25	
1	−1	−24	+25	−25	$\boxed{0}$	

se anula

Se anula para $y = -1$, de donde, el polinomio dado es divisible entre $y - (-1) = y + 1$.
El cociente de dividir $y^5 - 25y^3 + y^2 - 25$ entre $y + 1$ será de cuarto grado y sus coeficientes son $1, -1, -24, +25, -25$, por lo que queda

$$y^5 - 25y^3 + y^2 - 25 = (y + 1)(y^4 - y^3 - 24y^2 + 25y - 25)$$

Ahora, probamos factorizar $y^4 - y^3 - 24y^2 + 25y - 25$: los factores de 25 son: $+1$, -1, $+5$, -5, $+25$, -25.

probamos con $+1$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -24 & +25 & -25 & 1\\ & +1 & 0 & -24 & +1 & \\ \hline 1 & 0 & -24 & +1 & \boxed{+24} & \end{array}$$

no se anula

probamos con -1

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -24 & +25 & -25 & -1\\ & -1 & +2 & +22 & -47 & \\ \hline 1 & -2 & -22 & +47 & \boxed{-72} & \end{array}$$

no se anula

probamos con $+5$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -24 & +25 & -25 & 5\\ & +5 & +20 & -20 & +25 & \\ \hline 1 & +4 & -4 & +5 & \boxed{0} & \end{array}$$

se anula

Se anula para $y = 5$, de donde, el polinomio es divisible entre $y - (+5) = y - 5$

El cociente de dividir $y^4 - y^3 - 24y^2 + 25y - 25$ entre $y - 5$ será de tercer grado y sus coeficientes son: 1, $+4$, -4, $+5$. Por lo que queda

$$y^5 - 25y^3 + y^2 - 25 = (y + 1)(y - 5)(y^3 + 4y^2 - 4y + 5)$$

Ahora tratemos de factorizar $y^3 + 4y^2 - 4y + 5$

Los factores de 5 son: $+1$, -1, $+5$, -5

probamos con $+1$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +4 & -4 & +5 & 1\\ & +1 & +5 & +1 & \\ \hline 1 & +5 & +1 & \boxed{+6} & \end{array}$$

no se anula

probamos con -1

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +4 & -4 & +5 & -1\\ & -1 & -3 & +7 & \\ \hline 1 & +3 & -7 & \boxed{+12} & \end{array}$$

no se anula

probamos con $+5$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +4 & -4 & +5 & 5\\ & +5 & +45 & +205 & \\ \hline 1 & +9 & +41 & \boxed{+210} & \end{array}$$

no se anula

probamos con -5

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +4 & -4 & +5 & -5\\ & -5 & +5 & -5 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & \boxed{0} & \end{array}$$

se anula

Se anula para $y = -5$, de donde, el polinomio es divisible entre $y - (-5) = y + 5$

El cociente de dividir $y^3 + 4y^2 - 4y + 5$ entre $y + 5$ será de segundo grado, y sus coeficientes son: 1, -1, $+1$.

De donde tenemos que

$$y^5 - 25y^3 + y^2 - 25 = (y + 1)(y - 5)(y + 5)(y^2 - y + 1)$$

el resultado queda como está, ya que la expresión $y^2 - y + 1$ no es factorizable.

EJERCICIO 14

Factorizar.

1. $1 + b^3 =$ *Sol.* $(1 + b)(1 - b + b^2)$
2. $1 - y^3 =$ *Sol.* $(1 - y)(1 + y + y^2)$
3. $a^3 + b^3 =$ *Sol.* $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4. $y^3 - 1 =$ Sol. $(y - 1)(y^2 + y + 1)$
5. $27x^3 - 8 =$ Sol. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$
6. $8y^3 + 125 =$ *Sol.* $(2y + 5)(4y^2 - 10y + 25)$
7. $64 + b^6 =$ *Sol.* $(4 + b^2)(16 - 4b^2 + b^4)$

Factorizar por evaluación.

8. $y^3 + y^2 - y - 1 =$ *Sol.* $(y - 1)(y + 1)^2$
9. $x^3 - 12x + 16 =$ *Sol.* $(x - 2)(x + 4)(x - 2)$
10. $y^3 - 7y + 6 =$ *Sol.* $(y - 2)(y + 3)(y - 1)$
11. $y^4 - 4y^3 + 3y^2 + 4y - 4 =$ *Sol.* $(y - 2)^2(y - 1)(y + 1)$
12. $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 =$ *Sol.* $(x + 3)(x - 4)(x + 2)(x - 1)$
13. $4y^3 - 4y^2 - y + 1 =$ *Sol.* $(y - 1)(2y + 1)(2y - 1)$

CAPÍTULO 11

Operaciones algebraicas con exponentes y radicales

Para resolver y simplificar expresiones algebraicas con *exponentes y radicales,* se aplican las mismas *leyes* desarrolladas en las páginas anteriores y que como recordatorio se citan a continuación:

Leyes de los exponentes

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

IV. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$m > n$ con $a \neq 0$

exponente positivo

$a^0 = 1$
$m = n$

exponente cero

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$m < n$

exponente negativo

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$

exponente fraccionario

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Leyes de los radicales

I. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

III. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Observa detenidamente los siguientes ejercicios en los cuales, además de números *reales,* los ejercicios incluyen *literales.*

Ejemplos:

Expresar con exponente positivo y simplificar.

1. $\left(\dfrac{3x^{-2}y^2}{x^3w^{-3}}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3x^{-2}y^2}{x^3w^{-3}}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3y^2w^3}{x^2x^3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{9y^4w^6}{(x^5)^2}} = \dfrac{x^{10}}{9y^4w^6}$

2. $\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2y}{x}$

3. $\dfrac{x^1 - x^{-2}}{x^{-3}} = \dfrac{x^{-1}}{x^{-3}} - \dfrac{x^{-2}}{x^{-3}} = \dfrac{x^3}{x} - \dfrac{x^3}{x^2} = \dfrac{x^4 - x^3}{x^2} = \dfrac{\cancel{x^2}(x^2 - x)}{\cancel{x^2}} = x(x-1)$

4. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{y^{-1} - x^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{x-y}{xy}} = \dfrac{\cancel{xy}(y+x)}{\cancel{xy}(x-y)} = \dfrac{y+x}{x-y}$

5. $\dfrac{y^{-2} + x^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \dfrac{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{y+x}{xy}} = \dfrac{xy(x^2 + y^2)}{x^2y^2(y+x)} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy(y+x)}$

Conclusión: Cualquier *factor* de un miembro de una fracción se puede pasar al otro miembro de la misma fracción cambiando el signo del exponente del factor.

1 Simplificación de radicales

1.1 Sacar factores del radical

Ejemplos:

$$\sqrt{4x^5} = \sqrt{2^2x^2x^2x} = 2xx\sqrt{x} = 2x^2\sqrt{x};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^4y} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3^3x^3xy} = \frac{2}{3}\,3x\sqrt[3]{xy} = 2x\sqrt[3]{xy};$$

$$\sqrt{9a^2b^4 - 18ab^4} = \sqrt{9ab^4(a-2)} = \sqrt{3^2ab^2b^2(a-2)} = 3bb\sqrt{a(a-2)}$$
$$= 3b^2\sqrt{a(a-2)}$$

1.2 Introducir los factores en el radical

Ejemplos:

$$5x\sqrt{y} = \sqrt{(5x)^2 y} = \sqrt{25x^2 y}; \quad 3a\sqrt[3]{2b^2} = \sqrt[3]{(3a)^3(2)b^2} = \sqrt[3]{54a^3b^2}$$

1.3 Expresar un radical como otro de orden (índice) menor

Ejemplo:

$$3\sqrt[4]{25x^2y^2} = 3\sqrt[4]{5^2x^2y^2} = 3\left(5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) = 3\sqrt{5xy}$$

1.4 Racionalizar denominadores

Ejemplos:

$$\frac{4}{\sqrt{3x}} = \frac{4\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\,\sqrt{3x}} = \frac{4\sqrt{3x}}{3x}; \quad \sqrt{\frac{4}{x+y}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x+y}} = \frac{2\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}\,\sqrt{x+y}} = \frac{2\sqrt{x+y}}{x+y};$$

$$\frac{3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} = \frac{3\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)} =$$

$$\frac{3\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{(x+y)-(x-y)} = \frac{3\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{2y}$$

1.5 Reducir un radical

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{4xy}} = \sqrt[2\cdot 3]{4xy} = \sqrt[6]{4xy}; \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3-1}} = \sqrt[4\cdot 3]{x^3-1} = \sqrt[12]{x^3-1}$$

Conclusión: Simplificar un radical es *reducirlo* a su más simple expresión; para hacerlo, y según proceda, sacamos del radical los factores que sea posible, racionalizamos y expresamos el radical como otro de índice menor.

2 Radicales semejantes

Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice de la raíz y el mismo subradical, sólo difieren en el signo y en el coeficiente.

$-\sqrt{2}, \quad 5\sqrt{2}, \quad -3\sqrt{2}$ son semejantes

Es necesario reducir el subradical al máximo para saber si dos o más radicales son semejantes. Cuando dos lo son se pueden reducir como términos semejantes sumando algebraicamente sus coeficientes.

3 Adición y sustracción de radicales

Para realizar estas operaciones, previamente debemos *simplificar* los radicales. La suma algebraica de radicales *semejantes* es un radical del mismo grado cuyo coeficiente resulta de la suma algebraica de los coeficientes. Los radicales *no semejantes* se escriben con su propio signo.

Ejemplos:

$$2\sqrt{x}+5\sqrt{x}-3\sqrt{x}=(2+5-3)\sqrt{x}=4\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{12x^4y}-5\sqrt{3x^2y}+\sqrt{75x^6y^3}=8x^2\sqrt{3y}-5x\sqrt{3y}+5x^3y\sqrt{3y}$$

$$=(5x^3y+8x^2-5x)\sqrt{3y}$$

4 Multiplicación de radicales

Aplicamos la ley de los radicales

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

4.1 Multiplicación de radicales del mismo índice

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^2y}\,\sqrt[3]{4x}=\sqrt[3]{4x^3y}=x\sqrt[3]{4y}$$

4.2 Multiplicación de radicales de distinto índice

Previamente se reducen los radicales al *mínimo común índice* y se multiplican como en el caso anterior.

Para reducir los radicales al mínimo común índice obtenemos el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices, que será el *índice común;* a continuación se eleva la cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice del subradical. Entonces usamos el exponente fraccionario.

Ejemplos:

$$\sqrt{y}\,\sqrt[3]{2y^2}=y^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=y^{\frac{3}{6}}2^{\frac{2}{6}}y^{\frac{4}{6}}=\sqrt[6]{y^3 2^2 y^4}\text{ mcm de 2 y 3 = 6}$$

$$\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[3]{a^2b}=a^{\frac{3}{4}}(a^2b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{9}{12}}(a^2b)^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{a^9}\,\sqrt[12]{(a^2b)^4}=$$

$$\sqrt[12]{a^9(a^8b^4)}=\sqrt[12]{a^{17}b^4}=a\sqrt[12]{a^5b^4}$$

5 División de radicales

Aplicamos la ley de los radicales

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{5y} \div \sqrt{3y} = \sqrt{\frac{5y}{3y}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

División de radicales de distinto índice

Se reducen los radicales al *mínimo común índice* (mcm) y se dividen como radicales del mismo índice. Entonces usamos el exponente fraccionario.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{5xy}}{\sqrt[3]{-x^2y}} = \frac{(5xy)^{\frac{1}{2}}}{(-x^2y)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(5xy)^{\frac{3}{6}}}{(-x^2y)^{\frac{2}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{(5xy)^3}}{\sqrt[6]{(-x^2y)^2}} = \sqrt[6]{\frac{(5xy)^3}{(-x^2y)^2}} = \sqrt[6]{\frac{5^3y}{x}}$$

EJERCICIO 15

Expresa con exponentes positivos las siguientes expresiones algebraicas. Simplifica.

1. $(a^3b^2)^{-3} =$ *Sol.* $\frac{1}{a^9b^6}$

2. $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-2} =$ *Sol.* y^6x^4

3. $\left(\frac{x^0}{y^2}\right)^{-3} =$ *Sol.* y^6

4. $\left(\frac{8^{-1}a^{-2}b^{-3}}{4^{-2}c^{-1}b}\right)^3 =$ *Sol.* $\frac{8c^3}{a^6b^{12}}$

5. $\left(\frac{b^{-2}a^{-1}c^0}{b^{-3}a^{-2}c^{-1}}\right)^2 =$ *Sol.* $a^2b^2c^2$

6. $\frac{3^{-2}+2^{-3}}{3^{-1}} =$ *Sol.* $\frac{17}{24}$

7. $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-2}y^{-2}} =$ *Sol.* y^2-x^2

8. $3y^{-1}-\frac{2}{y} =$ *Sol.* $\frac{1}{y}$

9. $\frac{x}{y^{-1}}+\frac{y}{x^{-1}} =$ *Sol.* $2xy$

10. $\frac{x^{-2}-y^{-2}\,x^{-1}}{y^{-1}x^{-2}-y^{-2}} =$ *Sol.* $\frac{y^2-x}{y-x^2}$

11. $\frac{y^{-1}x^{-2}+y^{-2}x^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} =$ *Sol.* $\frac{1}{y-x}$

Expresar con exponente fraccionario.

12. $\sqrt[3]{b^4} =$

13. $\sqrt[3]{y^5} =$

14. $\sqrt{a} =$

15. $3\sqrt[3]{y^5} =$

16. $\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{y^5} =$

17. $2\sqrt[4]{a^5}\sqrt[4]{b^6} =$

18. $3\sqrt[6]{xy^3z^4} =$

19. $5\sqrt[5]{x^6}\sqrt[5]{y^6} =$

20. $a\sqrt{m}b^2\sqrt{n} =$

21. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} =$

Expresar en forma de raíz las siguientes potencias con exponentes fraccionarios.

22. $a^{\frac{2}{3}} =$

23. $ab^{\frac{1}{2}} =$

24. $(3b)^{\frac{1}{3}} =$

25. $b^{\frac{3}{4}} =$

26. $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} =$

27. $(5c)^{\frac{1}{2}} =$

28. $3m^{\frac{1}{2}} =$

29. $5y^{\frac{3}{2}} =$

30. $6^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} =$

Simplificar. (Expresa cada radical como otro de orden menor.)

31. $\sqrt[4]{25} =$

32. $\sqrt[9]{27} =$

33. $\sqrt[6]{125a^6} =$

34. $3\sqrt[6]{9x^2y^4} =$

35. $\sqrt[6]{9} =$

36. $\sqrt[4]{16x^6} =$

37. $\sqrt[4]{81x^2y^2} =$

38. $\sqrt[4]{81a^4} =$

EJERCICIO 15

(Segunda parte)

Simplificar. (Radicación de radicales.)

1. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2}} =$
2. $\sqrt{\sqrt{2xy}} =$
3. $\sqrt{2\sqrt{3}} =$
4. $\sqrt[3]{\sqrt{7}} =$
5. $\sqrt{\sqrt[4]{16b^2}} =$
6. $\sqrt{3\sqrt[3]{2}} =$

Simplificar. (Sacar de cada radical los factores posibles.)

7. $\sqrt{32} =$
8. $\sqrt{72x^2y} =$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{64a^3b^5} =$
10. $\frac{2}{3x}\sqrt[3]{27x^4y^2} =$
11. $2\sqrt{27} =$
12. $\sqrt{40ab^2} =$
13. $2x\sqrt[3]{27x^2y^5} =$
14. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{16a^4c} =$

Introducir al radical el factor.

15. $2\sqrt{5} =$
16. $3\sqrt{2} =$
17. $a\sqrt{b} =$
18. $3x\sqrt{y} =$
19. $4x\sqrt{3x^2} =$
20. $2a^2b\sqrt{5} =$
21. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2} =$
22. $3x\sqrt[3]{2x^2} =$

Racionaliza el denominador de cada expresión.

23. $\dfrac{5}{\sqrt{9y}} =$ Sol. $\dfrac{5\sqrt{y}}{3y}$

24. $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}} =$ Sol. $-2(1+\sqrt{2})$

25. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} =$ Sol. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

26. $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} =$ Sol. $-10\sqrt{5}-22$

27. $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{3}} =$ Sol. $2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+3\sqrt{2}-4$

28. $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}} =$ Sol. $\dfrac{\sqrt{x}(x+y)}{x}$

29. $\dfrac{y-2}{\sqrt{y}-\sqrt{2}} =$ Sol. $\sqrt{y}+\sqrt{2}$

30. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x-y}} =$ Sol. $\sqrt{x-y}$

31. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{3b}} =$ Sol. $\dfrac{\sqrt{3ab}}{3b}$

32. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$ Sol. $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$

Racionalizar el numerador de cada expresión.

33. $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1} =$ Sol. $\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

34. $\dfrac{\sqrt{5y}}{\sqrt{x}} =$ Sol. $\dfrac{5y}{\sqrt{5xy}}$

35. $\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y} =$ Sol. $\dfrac{x+y}{(x-y)\sqrt{x+y}}$

36. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$ Sol. $\dfrac{x-y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}$

37. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} =$ Sol. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x+y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$

Resolver las operaciones siguientes.

38. $\dfrac{1}{5}\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\dfrac{4}{3}\sqrt{a}\right) =$ Sol. $\dfrac{1}{5}\sqrt{ab}-\dfrac{4a}{15}$

39. $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{a+b}\right)a\sqrt{b} =$ Sol. $2a\sqrt{ab}-3a\sqrt{ab+b^2}$

40. $\sqrt{a}\sqrt{3a^2} =$ Sol. $a\sqrt{3a}$

41. $\sqrt{2xy}\,4\sqrt[4]{6x^3} =$ Sol. $4x\sqrt[4]{24xy^2}$

42. $\left(x + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{y}\right) =$ Sol. $x^2 - y$

43. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) =$ Sol. $a - b$

44. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{x^3}\right) =$ Sol. $x + 3x^2$

45. $x\sqrt{2b}x\sqrt{2a} =$ Sol. $2x^2\sqrt{ab}$

46. $\frac{1}{5}\sqrt{a}\left(\sqrt{b} - \frac{4}{3}\sqrt{a}\right) =$ Sol. $\frac{1}{5}\sqrt{ab} - \frac{4}{15}a$

47. $\sqrt[3]{4ab} \div 2\sqrt[3]{16a^2} =$ Sol. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$

48. $\sqrt[5]{y^2} \div \left(\sqrt{y}\right)^3 =$ Sol. $\frac{1}{y\sqrt[10]{y}}$

49. $\sqrt[3]{x^2} \div \left(\sqrt[3]{x}\right)^5$ Sol. $\frac{1}{x}$

50. $3\sqrt{b} + 9\sqrt{b} =$ Sol. $12\sqrt{b}$

51. $-15\sqrt[3]{x^2} + 9\sqrt[3]{x^2} =$ Sol. $-6\sqrt[3]{x^2}$

52. $3\sqrt{x^4y} + x\sqrt{4x^2y} - x^2\sqrt{9y} =$ Sol. $2x^2\sqrt{y}$

53. $\sqrt{9ab^3} + \sqrt{4a^3b} - \sqrt{16a^3b^3} =$ Sol. $(3b + 2a - 4ab)\sqrt{ab}$

54. $\sqrt{x^5y} - \sqrt{9x^3y^3} - \sqrt{xy^5} =$ Sol. $(x^2 - 3xy - y^2)\sqrt{xy}$

55. $\frac{y\sqrt{8y}}{x} - \frac{\sqrt{18y^3}}{x} - \frac{10y^2}{x\sqrt{2y}} =$ Sol. $-\frac{6y}{x}\sqrt{2y}$

56. $x\sqrt{50x} - \sqrt{18x^3} - \sqrt{8x^2y} =$ Sol. $2x\sqrt{2x} - 2x\sqrt{2y}$

CAPÍTULO 12

Operaciones con fracciones algebraicas

1 Principio fundamental de las fracciones

El valor de un número racional no varía si su numerador y su denominador se *multiplican* o *dividen* por un mismo número distinto de cero.

Este principio se aplica para *reducir* una fracción a su misma expresión.

Ejemplo:

Simplificar

$$\frac{15}{21}=\frac{(\cancel{3})(5)}{(\cancel{3})(7)}=\frac{5}{7}$$

dividimos el numerador y el denominador entre 3 y cancelamos el 3.

Con frecuencia, el alumno comete el siguiente error al tratar de simplificar

$\frac{9\cancel{x}-5}{7\cancel{x}}$, expresión que no admite simplificación.

2 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

Al referirnos a estos conceptos en páginas precedentes concluimos que:

El producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a la *mayor* potencia es el mcm.
El producto de los factores primos comunes elevados a la *menor* potencia es mcd.

Asimismo, señalamos que cada número racional tiene *tres* signos y que podemos cambiar *dos* de ellos sin que la fracción se altere.

Para obtener el mcm de dos o más expresiones algebraicas se factoriza cada una de ellas.

Ejemplo:

Obtener el mcm de $8xy^2z$; $6xy^2z$; $12y^2z^2$

$8xy^2z = 2^3xy^2z$
$6xy^2z = 2 \cdot 3xy^2z$
$12y^2z^2 = 2^2 \cdot 3y^2z^2$

$\text{mcm} = 2^3 \cdot 3xy^2z^2 = 24xy^2z^2$

El mcm obtenido debe ser *divisible* entre cada una de las expresiones, si no es así el resultado está mal.

Para obtener el mcd de dos o más expresiones algebraicas se factoriza cada una de ellas.

Ejemplo:

Obtener el mcd de $8x^2y^3z$; $4x^3y^2z^2$; $36xyz^3$

$8x^2y^3z = 2^3x^2y^3z$
$4x^3y^2z^2 = 2^2x^3y^2z^2$
$36xyz^3 = 2^2 \cdot 3^2xyz^3$

$\text{mcd} = 2^2xyz$

El mcd obtenido debe *dividir* a cada una de las expresiones, si no es así, el resultado está mal.

3 Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción *equivalente* en la cual el numerador y el denominador *no tienen factores comunes.*

Para reducir una expresión a su forma más simple, primero, si es necesario, factorizamos el numerador y el denominador y a continuación cancelamos los factores comunes; de hecho, dividimos el numerador y el denominador entre cada factor que le sea común.

Cuando al simplificar se cancelan todos los factores del numerador y éste queda en *uno no debe suprimirse.* Si el denominador queda en *uno se puede suprimir,* ya que el resultado es una expresión entera.

Ejemplos:

Simplificar

$$\frac{4a^3b^3}{16a^5b^6} = \frac{1}{4a^2b^3} \quad \Bigg| \quad \frac{4x^2y^4}{6x^3y^2z} = \frac{2y^2}{3xz} \quad \Bigg| \quad \frac{3a^2b}{ab} = 3a$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}$$

4 Multiplicación de fracciones

En aritmética

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

En álgebra aplicamos el mismo procedimiento: se multiplican los numeradores cuyo resultado se divide entre el producto de los denominadores y el resultado se simplifica.

Si procede, antes de realizar la operación se *factorizan* el numerador y el denominador para facilitar la simplificación.

Ejemplos:

$$\left(\frac{2x}{3y^2}\right)\left(\frac{3y^2}{4a}\right)\left(\frac{a^2}{2x^2}\right)=\frac{6a^2xy^2}{24ax^2y^2}=\frac{a}{4x}$$

$$\left(\frac{2a-2}{2a+4}\right)\left(\frac{a^2+4a+4}{a^2-a}\right)=\frac{2(a-1)(a+2)^2}{2(a+2)a(a-1)}=\frac{a+2}{a}$$

5 División de fracciones, uso del recíproco

Fracciones recíprocas. Dos fracciones son recíprocas cuando una resulta de la otra invirtiendo sus términos. El *producto* de dos fracciones recíprocas es igual a la *unidad.*

$\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son recíprocas ya que $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{6}=1$

2 y $\frac{1}{2}$ son recíprocas ya que $2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2}=1$

En aritmética

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

En álgebra aplicamos el mismo procedimiento. Si es posible el resultado se simplifica.

$$\frac{2a^3}{3b^2}\div\frac{5ax^2}{4b^3}=\frac{8a^3b^3}{15ab^2x^2}=\frac{8a^2b}{15x^2}$$

Usando el recíproco del divisor.

$$\frac{2a^3}{3b^2}\div\frac{5ax^2}{4b^3}=\left(\frac{2a^3}{3b^2}\right)\left(\frac{4b^3}{5ax^2}\right)=\frac{8a^3b^3}{15ab^2x^2}=\frac{8a^2b}{15x^2}$$

6 Suma y resta de fracciones

En aritmética

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5+4+3}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$\frac{7}{3}-\frac{2}{5}=\frac{35-6}{15}=\frac{29}{15}$$

En álgebra procedemos de igual forma; reducimos los denominadores al mínimo común múltiplo (al mcm también se le llama, al aplicarlo a las fracciones, común denominador, mínimo común denominador).

Ejemplos:

Sumar

$$\frac{3}{2x}+\frac{x-2}{6x^2}=\frac{9x+x-2}{6x^2}=\frac{10x-2}{6x^2}$$

$2x = 2x$

$6x^2 = (2)(3)x^2$

$\text{mcm} = 6x^2$

Restar

$$\frac{x+2y}{3x}-\frac{4xy^2-3}{6x^2y}=\frac{2xy\left(x+2y\right)-\left(4xy^2-3\right)}{6x^2y}=\frac{2x^2y+4xy^2-4xy^2+3}{6x^2y}=\frac{2x^2y+3}{6x^2y}$$

EJERCICIO 16

Simplificar.

1. $\frac{3a^2}{6ab}=$ Sol. $\frac{a}{2b}$

2. $\frac{a^2b^2}{a^3b^3}=$ Sol. $\frac{1}{ab}$

3. $\frac{ax^3}{3x^4y}=$ Sol. $\frac{a}{3xy}$

4. $\frac{4a^4b^3c}{12ab^2c}=$ Sol. $\frac{a^3b}{3}$

5. $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}=$ Sol. $\frac{x+y}{x-y}$

6. $\frac{5x^3y-5x^2y^2}{x^2y^2-xy^3}=$ Sol. $\frac{5x}{y}$

7. $\frac{3a^2-11a+6}{3a^2+a-2}=$ Sol. $\frac{a-3}{a+1}$

8. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=$ Sol. $\frac{x-2}{x+2}$

9. $\frac{2xy}{2x^2a+2x^3}=$ Sol. $\frac{y}{x(a+x)}$

10. $\frac{ab}{2a^2b-2ab^2}=$ Sol. $\frac{1}{2(a-b)}$

11. $\dfrac{a^2+4a+3}{a^2+x-6}=$ Sol. $\dfrac{a+1}{a-2}$

12. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=$ Sol. $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$

Obtener el mcm.

13. 12; 36; 45 Sol. 180

14. a^2b^2; c^2b; $12abc$ Sol. $12a^2b^2c^2$

15. $a^2+2ab+b^2$; a^2-b^2; $3a+3b$ Sol. $3(a+b)^2(a-b)$

16. x^2-x; x^2-1 Sol. $x(x-1)(x+1)$

17. $b-3$; $a-3$; $ab-3a-3b+9$ Sol. $(b-3)(a-3)$

18. $xy-y^2$; $3y^2$ Sol. $3y^2(x-y)$

19. a^2-a-6; a^2-4a+3; a^2+a-2 Sol. $(a-3)(a+2)(a-1)$

20. $12(x^2-y^2)$; $15(x+y)$; $20(x-y)$ Sol. $60(x+y)(x-y)$

Obtener el mcd.

21. y^2x; yx^2 Sol. yx

22. $4a^2b$; a^2b^3 Sol. a^2b

23. $8x^2y^3$; $15x^3y^5$ Sol. x^2y^3

24. $6y^2-6xy$; $2y^2+2yx$ Sol. $2y$

25. $9a^3b^2+18a^2b$; $6a^3b-6a^2b$ Sol. $3a^2b$

26. $3y^2+3y$; $6y^2-18y-24$ Sol. $3y+3$

27. a^3-9a^2+20a; a^2-a-12; a^2-2a-8 Sol. $a-4$

28. $w^4(x^2-y^2)$; $w^3(x-y)^2$ Sol. $w^3(x-y)$

Multiplicación y división de fracciones; el resultado debe reducirse a su mínima expresión.

29. $\left(\dfrac{3a^2b}{2a}\right)\left(\dfrac{5ab^2}{3a^2b^3}\right)=$ Sol. $\dfrac{5}{2}$

30. $\left(\dfrac{2a^2-a}{5}\right)\left(\dfrac{4}{4a+2}\right)=$ Sol. $\dfrac{2a(2a-1)}{5(2a+1)}$

31. $\left(\dfrac{4x+3}{5}\right)\left(\dfrac{2x+2}{7x-7}\right)=$ Sol. $\dfrac{2(x+1)(4x+3)}{35(x-1)}$

32. $\dfrac{2x+4y}{bx-3ba}\bullet\dfrac{2x-6a}{ax+2ay}=$ Sol. $\dfrac{4}{ab}$

33. $\dfrac{x^2-x}{x-1}\bullet\dfrac{x+y}{x}=$ Sol. $x+y$

34. $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \bullet \frac{2x-x^2}{2-x} =$ Sol. $\frac{x(x+2)}{x-2}$

35. $\frac{w-1}{w-2} \bullet \frac{w^2-3w+2}{w^2-2w+1} =$ Sol. 1

36. $\frac{x^2-x-12}{x^2+7x-30} \bullet \frac{x^2+7x-30}{x^2+2x-24} =$ Sol. $\frac{x+3}{x+6}$

37. $\frac{x^2-x-6}{3x^2-7x+2} \bullet \frac{6x^2+x-1}{2x^2+3x-2} =$ Sol. $\frac{x-3}{x-2}$

38. $(x^2-3x+2) \div \frac{x^2-1}{x} =$ Sol. $\frac{x(x-2)}{x+1}$

39. $\frac{x}{x-3} \div (x^2-3x) =$ Sol. $\frac{1}{(x-3)^2}$

40. $\frac{2a^2+7a+3}{4a^2-1} \div (a+3) =$ Sol. $\frac{1}{2a-1}$

41. $\frac{6x^2y}{2x-6} \div \frac{30xy}{5x-10} =$ Sol. $\frac{x(x-2)}{2(x-3)}$

42. $\frac{2x^2+6x}{x^3-x} \div \frac{2x+6}{5x^2-5x} =$ Sol. $\frac{5x}{x+1}$

43. $\frac{1}{x^2-x-30} \div \frac{3}{x^2+x-42} =$ Sol. $\frac{x+7}{3(x+5)}$

44. $\left(\frac{x-2y}{2x+6y}\right)\left(\frac{x+3y}{3x-6y}\right) =$ Sol. $\frac{1}{6}$

45. $\frac{3a^2xy}{5axy^0} \div \frac{5a^3xy^2}{7a^2xy^2} =$ Sol. $\frac{21y}{25}$

46. $\frac{a^2-4}{a+2} \div (2a-3) =$ Sol. $\frac{a-2}{2a-3}$

47. $\frac{a^2-1}{2a+5} \div (3a-3) =$ Sol. $\frac{a+1}{3(2a+5)}$

48. $(x^2-4x+4) \div \frac{x^2+2x}{x} =$ Sol. $\frac{(x-2)^2}{x+2}$

49. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x+y}{y}} =$ Sol. $\frac{y}{x}$

50. $\dfrac{x+\frac{x}{y}}{x-\frac{x}{y}} =$ Sol. $\frac{y+1}{y-1}$

51. $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{a-\dfrac{1}{b}}=$ Sol. $\dfrac{ab+1}{ab-1}$

52. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}=$ Sol. $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$

53. $\dfrac{x-1-\left(\dfrac{5}{x+3}\right)}{x+5-\dfrac{35}{x+3}}=$ Sol. $\dfrac{x+4}{x+10}$

54. $\dfrac{x}{2-\dfrac{3}{x}}=$ Sol. $\dfrac{x^2}{2x-3}=$

55. $\dfrac{4-\dfrac{a}{3}}{\dfrac{a}{b}}=$ Sol. $\dfrac{b(12-a)}{3a}$

56. $\dfrac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+y}{x}+\dfrac{x+y}{y}}$ Sol. $\dfrac{1}{y+x}$

Suma y resta de fracciones; el resultado debe reducirse a su mínima expresión.

57. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3}=$ Sol. $\dfrac{3}{2}$

58. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{5}{2}=$ Sol. 3

59. $\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{12}=$ Sol. $\dfrac{7}{6}$

60. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{14}-\dfrac{3}{4}=$ Sol. $-\dfrac{3}{28}$

61. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{6x}{4}-\dfrac{5x}{12}=$ Sol. $\dfrac{17x}{12}$

62. $\dfrac{a}{5}-\dfrac{2a}{3}+\dfrac{3a}{15}=$ Sol. $-\dfrac{4a}{15}$

63. $\dfrac{3x}{2yz}-\dfrac{3y}{5xyz^0}+\dfrac{4z}{3x^2y}=$ Sol. $\dfrac{45x^3-18yxz+40z^2}{30yx^2z}$

64. $\dfrac{3}{5a}-\dfrac{2}{10b}+\dfrac{5b-a}{15ab}=$ Sol. $\dfrac{2(7b-2a)}{15ab}$

65. $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=$ Sol. $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}$

66. $\dfrac{3a}{a-b}-\dfrac{b}{a^2-b^2}=$ Sol. $\dfrac{3a^2+3ab-b}{a^2-b^2}$

67. $\dfrac{4}{a}-\dfrac{3}{3a+2}-\dfrac{2}{a(3a+2)}=$ Sol. $\dfrac{3}{a}$

68. $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2x^2+1}{x(x^2-1)}=$ Sol. $\dfrac{x}{x(x^2-1)}$

CAPÍTULO 13

Ecuaciones lineales

1 Igualdad

Es la expresión de que dos cantidades tienen el mismo valor; esta relación se indica con el símbolo =, el cual se lee *"igual a"* o *"es igual a"*.

La igualdad entre dos expresiones algebraicas puede ser de dos tipos: *identidades o ecuaciones.*

Una *identidad* es una igualdad que se verifica para cualquier valor que se le asigne a las literales que están en ambas expresiones.

Ejemplos:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2; \quad (a + b)(a - b) = a^2 + b^2$$

Son identidades porque se verifican para cualquier valor que se le asigne a las letras x, y en el primer ejemplo, y a las letras a, b del segundo.

La *ecuación* es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas a las cuales se les llama *incógnitas,* y cuyo valor sólo se verifica para determinados valores de ellas.

Ejemplo:

$$3x - 4 = 8$$
$$3x = 8 + 4$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Comprobación:

$$3(4) - 4 = 8$$
$$12 - 4 = 8$$
$$8 = 8$$

La ecuación se satisface únicamente para $x = 4$.

2 Propiedades de la igualdad

1ª. Propiedad reflexiva o idéntica. "Toda cantidad es *idéntica* a sí misma."

Ejemplos:

$$a = a; \quad a + b = a + b; \quad \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

2ª. Propiedad simétrica o recíproca. "Los miembros de una igualdad pueden *permutar* sus lugares sin que la igualdad se altere."

Ejemplos:

Si $a = b$;	Si $x + 4 = 9$
de donde $b = a$	de donde $9 = x + 4$

3ª. Propiedad transitiva. "Si dos cantidades son *iguales* a una tercera cantidad, son iguales entre sí."

Ejemplos:

Si $a = b$	Si $x + 5 = 12$
$b = p$	$12 = m + n$
de donde $a = p$	de donde $x + 5 = m + n$

4ª. "En una igualdad toda cantidad puede *sustituirse* por su igual."

Ejemplo:

Si $x + 3 = 12$

y $x = 9$

de donde $9 + 3 = 12$

5ª. "En una misma igualdad se pueden efectuar las *mismas* operaciones a sus miembros sin que la igualdad se altere."

Ejemplos:

En la suma y en la resta

Dada la igualdad $a = b$	Si $a = b$
de donde $a + c = b + c$	de donde $a - c = b - c$

En la multiplicación y en la división

Si $a = b$	Si $a = b$
de donde $ac = bc$	de donde $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ con $c \neq 0$

En la potencia y en la raíz

Si $a = b$	Si $a = b$
de donde $a^2 = b^2$	de donde $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

6ª. "Dos o más igualdades se pueden *sumar* miembro a miembro, de lo cual resulta una nueva igualdad."

Ejemplo:

Si $a = b$

y $x = y$

de donde $a + x = b + y$

7ª. "Dos igualdades pueden *restarse* miembro a miembro, de lo cual resulta una nueva igualdad."

Ejemplo:

$$\text{Si } m = n$$
$$\text{y } x = y$$
$$\text{de donde } m - x = n - y$$

3

Fórmulas: despeje de una de las literales

Fórmula es la expresión de una ley o de un principio general, por medio de símbolos o letras.

Las fórmulas son fáciles de recordar y aplicar, y señalan la relación que existe entre las literales (variables) que intervienen en ella.

Una fórmula es una ecuación en la que podemos despejar cualquiera de las literales (variables) que intervienen en ella considerándolas como incógnitas (variable independiente).

El *sujeto* de una fórmula es la literal cuyo valor se obtiene por medio de la fórmula. Podemos despejar cualquiera de las otras literales considerándola como nueva incógnita, con ello habremos cambiado el sujeto de la fórmula.

Para despejar una de las literales se utilizan las *propiedades de los números reales y de la igualdad* en la misma forma como las estudiaste en tu curso de secundaria.

Ejemplo:

Dada la fórmula del área de un triángulo.

$A = \dfrac{bh}{2}$, hace de h el sujeto de la fórmula.

Despejamos h de esta ecuación literal; h será la nueva incógnita.

$$2A = bh$$
$$h = \frac{2A}{b}$$

EJERCICIO 17

Despejar en cada fórmula la literal que se indica.

1. $e = vt$, despejar t — *Sol.* $\dfrac{e}{v}$
2. $A = \left(\dfrac{b+d}{2}\right)h$, despejar d — *Sol.* $\dfrac{2A}{h} - b$
3. $e = \dfrac{1}{2}at^2$, despejar a — *Sol.* $\dfrac{2e}{t^2}$
4. Volumen de una pirámide; despejar h: $V = \dfrac{Bh}{3}$ — *Sol.* $\dfrac{3V}{B}$
5. Movimiento uniformemente variado: $d = \dfrac{at^2}{2}$, despejar t — *Sol.* $\sqrt{\dfrac{2d}{a}}$
6. Energía cinética: $Ec = \dfrac{mV^2}{2}$, despejar V — *Sol.* $\sqrt{\dfrac{2Ec}{m}}$

7. Ley general del estado gaseoso: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ despejar V_2 Sol. $\frac{T_2P_1V_1}{T_1P_2}$

8. Movimiento circular uniforme: $V = \frac{2\pi r}{t}$ despejar t Sol. $\frac{2\pi r}{V}$

9. Principio de Arquímedes: $E = (Pe)V$, despejar V Sol. $\frac{E}{Pe}$

10. Ley de Boyle-Mariotte: $P_1V_1 = P_2V_2$, despejar V_2 Sol. $\frac{P_1V_1}{P_2}$

11. Coeficiente de dilatación de un líquido:

$K = \frac{V_2 - V_1}{V_1 t}$, despejar V_2 Sol. $(V_1 tK) + V_1$

12. Ley de Ohm. Hacer R el sujeto de la fórmula $I = \frac{V}{R}$ Sol. $\frac{V}{I}$

13. Teoría de la relatividad: $E = mc^2$, despejar c Sol. $\sqrt{\frac{E}{m}}$

14. Ecuación de la hipérbola: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, despejar y Sol. $\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + x^2}$

15. $A = \pi R^2$, despejar R Sol. $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

16. $b^2 + c^2 - 2b(x) = a^2$, despejar x Sol. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$

17. $\upsilon = \frac{1}{3} h\pi R^2$, despejar h Sol. $\frac{3\text{v}}{\pi R^2}$

18. $e = \frac{V^2}{2a}$, despejar V Sol. $\sqrt{2ae}$

19. $I = \frac{nE}{R + nr}$, despejar n Sol. $\frac{IR}{E - Ir}$

4

Ecuación (cont.)

La ecuación tiene *dos* miembros, el de la izquierda se llama primer miembro y el de la derecha segundo miembro.

Las ecuaciones tienen, generalmente, una o más letras que se consideran como desconocidas y se les llama *incógnitas,* las cuales se indican, en minúsculas, con las últimas letras del alfabeto.

Cuando un conjunto de números se pone en lugar de las incógnitas e iguala los dos miembros, se dice que satisface la ecuación. Al conjunto de números se le llama *solución o raíces* de la ecuación.

El *grado* de una ecuación lo determina el exponente de mayor grado de la incógnita.

Ejemplos:

$3x + 4 = 10$, es de *primer grado* ya que tiene *una sola solución.*

$y^2 + 2y = 6$, es de *segundo grado* porque tiene *dos soluciones.*

$x^5 - x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 3x - 5 = 0$, es de *quinto grado* porque tiene *cinco soluciones.*

El grado de la ecuación determina el *número* de soluciones por encontrar.

$3x + 4y = 6$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Como esta ecuación es de primer grado tiene una sola solución, para encontrarla es necesaria otra ecuación de primer grado con las mismas dos incógnitas, esto con el fin de formar un sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas.

Al encontrar el valor de cada una de las incógnitas, ambas forman una solución a las ecuaciones dadas, por lo que la pareja cumple el problema.

Dos ecuaciones son *equivalentes* si sus soluciones son exactamente las mismas. En el proceso para encontrar la solución de una ecuación es necesario efectuar operaciones que conducen a otras ecuaciones equivalentes a la ecuación original.

5

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación de primer grado es preciso aplicar las propiedades de la igualdad y, en general, debemos:

A) *Efectuar,* si las hay, las *operaciones indicadas.*
B) *Reunir* en un miembro todos los *términos* que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
C) *Reducir* los *términos semejantes* en cada miembro.
D) *Despejar* la incógnita.
E) Los resultados se *comprueban* sustituyendo en los dos miembros de la ecuación, la incógnita por el valor obtenido, si éste es correcto la ecuación se convertirá en una *identidad.*

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 6x + 2x - x - 5 &= 30 \\ 7x - 5 &= 30 \\ 7x &= 30 + 5 \\ 7x &= 35 \\ x &= \frac{35}{7} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 6x + 2x - x - 5 &= 30 \\ 6(5) + 2(5) - 5 - 5 &= 30 \\ 30 + 10 - 10 &= 30 \\ 30 &= 30 \end{aligned}$$

6

Cambios de signo

$$\begin{aligned} -3x - 5 &= x - 21 \\ 3x + 5 &= -x + 21 \\ 3x + x &= 21 - 5 \\ 4x &= 16 \\ x &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden *cambiar* sin que la ecuación varíe, ya que equivale a multiplicar a los dos miembros por –1.

Comprobación:

$$-3x - 5 = x - 21$$
$$-3(4) - 5 = 4 - 21$$
$$-12 - 5 = -17$$
$$-17 = -17$$

7

Ecuaciones con signos de agrupación

$$(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6)$$
$$5 - 3y + 4y - 6 = 8y + 11 - 3y + 6$$
$$-3y + 4y - 8y + 3y = 11 + 6 - 5 + 6$$
$$-11y + 7y = 23 - 5$$
$$-4y = 18$$
$$-y = \frac{18}{4}$$
$$y = -\frac{9}{2}$$

Comprobación:

$$(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6)$$
$$\left[5 - 3\left(-\frac{9}{2}\right)\right] - \left[-4\left(-\frac{9}{2}\right) + 6\right] = \left[8\left(-\frac{9}{2}\right) + 11\right] - \left[3\left(-\frac{9}{2}\right) - 6\right.$$
$$\left(5 + \frac{27}{2}\right) - (18 + 6) = (-36 + 11) - \left(-\frac{27}{2} - 6\right)$$
$$\frac{10 + 27}{2} - 24 = -25 - \left(\frac{-27 - 12}{2}\right)$$
$$\frac{37}{2} - 24 = -25 + \frac{39}{2}$$
$$\frac{37 - 48}{2} = \frac{-50 + 39}{2}$$
$$-\frac{11}{2} = -\frac{11}{2}$$

8

Ecuación con productos indicados

$$2(y - 7) - 4(5 - 3y) = 2(4y - 1) + 5(1 + 2y)$$
$$2y - 14 - 20 + 12y = 8y - 2 + 5 + 10y$$
$$2y + 12y - 8y - 10y = -2 + 5 + 14 + 20$$
$$14y - 18y = 39 - 2$$
$$-4y = 37$$
$$-y = \frac{37}{4}$$
$$y = -\frac{37}{4}$$

9
Ecuación que incluye fracciones

$$\frac{2y-15}{3}=\frac{18-y}{9}$$

Para resolverla, se *multiplica* cada miembro por el mcm de los *denominadores.*

mcm = 9

$$\begin{aligned}\frac{9(2y-15)}{3} &= \frac{9(18-y)}{9}\\ 3(2y-15) &= 18-y\\ 6y-45 &= 18-y\\ 6y+y &= 18+45\\ 7y &= 63\\ y &= \frac{63}{7}\\ y &= 9\end{aligned}$$

La operación que hemos efectuado, multiplicar cada miembro por el mcm de los denominadores, equivale a dividir el mcm de los denominadores entre el denominador de cada miembro y multiplicar el cociente por el numerador respectivo.

Ejemplo:

$$\frac{y}{2}=\frac{y}{6}-\frac{1}{4}$$

mcm = 12

$$\begin{aligned}12\left(\frac{y}{2}\right) &= 12\left(\frac{y}{6}\right)-12\left(\frac{1}{4}\right)\\ 6y &= 2y-3\\ 6y-2y &= -3\\ 4y &= -3\\ y &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

10
Ecuación con la incógnita en el denominador

$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}$$

mcm = $x^2 - 1$

$$(x^2-1)\left(\frac{4}{x^2-1}\right) = (x^2-1)\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$4 = (x-1)(x+1)\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$4 = (x+1)2$$

$$4 = 2x+2$$

$$4-2 = 2x$$

$$x = 1$$

11

Ecuaciones literales. Ecuación con otras letras, aparte de la incógnita

Estas ecuaciones son aquellas en las que algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas son representadas por letras; éstas generalmente *son a, b, c, d*; pero las últimas letras del alfabeto representan las incógnitas.

Ejemplo:

$$2(y-a) - 6 = 4(ay-4)$$

$$2y - 2a - 6 = 4ay - 16$$

$$2y - 4ay = -16 + 6 + 2a$$

$$2y(1-2a) = 2a - 10$$

$$2y = \frac{2a-10}{1-2a}$$

$$y = \frac{\frac{2a-10}{1-2a}}{2}$$

$$y = \frac{2(a-5)}{2(1-2a)}$$

$$y = \frac{a-5}{1-2a}$$

12

Ecuaciones con radicales

Este tipo de ecuaciones son aquellas en las cuales la incógnita está en el subradical.

Ejemplo:

$$\sqrt{4x^2-3} - 2x = 1$$

$$\sqrt{4x^2-3} = 2x+1$$

En el primer miembro debe quedar el radical.

$4x^2 - 3 = (2x+1)^2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros con el fin de cancelar la raíz cuadrada.

$$4x^2 - 3 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$4x^2 - 4x^2 - 4x = 1 + 3$$
$$-4x = 4$$
$$x = -1$$

EJERCICIO 17

(Segunda parte)
Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x + 7 + 3x = 9$ — *Sol.* $x = \frac{1}{2}$
2. $6 - x = 4$ — *Sol.* $x = 2$
3. $9 - x = 6$ — *Sol.* $x = 3$
4. $3y + 2 = y + 8$ — *Sol.* $y = 3$
5. $3x - 5 = x + 1$ — *Sol.* $x = 3$
6. $7m + 20 = 2m + 5$ — *Sol.* $m = -3$
7. $5y - 7 = 6 + 2(y + 2)$ — *Sol.* $y = \frac{17}{3}$
8. $5x - 2 = 4 - 3(x + 2)$ — *Sol.* $x = 0$
9. $5m + 4 = 3 - 4(m + 2)$ — *Sol.* $m = -1$
10. $14 + 3x = -(2 + 14x)$ — *Sol.* $x = -\frac{16}{17}$
11. $3(4 - 6y) + 4 = 2(y + 4)$ — *Sol.* $y = \frac{2}{5}$
12. $m - 2m^2 = m(2 - 2m) - 4$ — *Sol.* $m = 4$
13. $17 - \frac{4y-5}{2} = 12 - 5y$ — *Sol.* $y = -\frac{5}{2}$
14. $17 = 12 - 16y + \frac{4y-18}{2}$ — *Sol.* $y = -1$
15. $\frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{3}$ — *Sol.* $x = -4$
16. $\frac{y+3}{y-5} = 9$ — *Sol.* $y = 6$
17. $\frac{x+1}{2} = \frac{2x+3}{6}$ — *Sol.* $x = 0$
18. $\frac{4x-1}{3} = \frac{x-4}{6} + \frac{3x+5}{4}$ — *Sol.* $x = \frac{11}{5}$
19. $\frac{5x}{5} - \frac{x+5}{10} = 7x - \frac{x+3}{2}$ — *Sol.* $x = \frac{5}{28}$
20. $3x = \frac{x+3}{2}$ — *Sol.* $\frac{3}{5}$

21. $\dfrac{2x+5}{4} = 3 + \dfrac{5x-3}{3}$ Sol. $x = -\dfrac{9}{14}$

22. $\dfrac{58-8y}{2} = 3y - \dfrac{6-2y}{2}$ Sol. $y = 4$

23. $2y - \dfrac{3}{5} = y - \dfrac{y}{10}$ Sol. $y = \dfrac{6}{11}$

24. $5x + \dfrac{3}{4} = x - \dfrac{x}{2}$ Sol. $x = -\dfrac{1}{6}$

25. $\dfrac{8x+9}{4} = 3x + \dfrac{5}{3}$ Sol. $x = \dfrac{7}{12}$

26. $\dfrac{y-3}{3} + 4 = \dfrac{3y-2}{2}$ Sol. $y = \dfrac{24}{7}$

27. $\dfrac{3}{4y-1} = \dfrac{2}{4y+1}$ Sol. $y = -\dfrac{5}{4}$

28. $\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$ Sol. $x = 1$

29. $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ Sol. $x = \dfrac{3}{2}$

30. $5m + \dfrac{7}{2} = \dfrac{12-5m}{4}$ Sol. $m = -\dfrac{2}{25}$

31. $\dfrac{6x^2-3x+4}{3x^2+5x-9} = 2$ Sol. $x = \dfrac{22}{13}$

32. $ax - 6 = bx - 2$ Sol. $x = \dfrac{4}{a-b}$

33. $2(a-x) + ax = a + 9$ Sol. $x = -\dfrac{9-a}{2-a}$

34. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{a}$ Sol. $x = \dfrac{a}{3}$

35. $x(3+4b) - 4 = 0$ Sol. $x = \dfrac{4}{3+4b}$

36. $x(5-3a) = 2 + 3b$ Sol. $x = \dfrac{2+3b}{5-3a}$

37. $\sqrt{x-6} = 3$ Sol. $x = 15$

38. $2 - \sqrt{4x+2} = 0$ Sol. $x = \dfrac{1}{2}$

39. $2(y-a) - 6 = 3(ay-4)$ Sol. $x = \dfrac{2a-6}{2-3a}$

40. $5 + \sqrt{3x-5} = 4$ Sol. $x = 2$

41. $\sqrt{x^2-5x+6} = x - 3$ Sol. $x = 3$

42. $ax + 3 = 2 - bx$ Sol. $x = -\dfrac{1}{a+b}$

13 Gráfica de una ecuación de primer grado

Una *ecuación* (*función*) lineal de la forma $y = mx + b$, en la cual m y b son constantes, se demuestra, en geometría analítica, que su gráfica es una línea recta y, como tal, su gráfica la determinan dos puntos. Es recomendable determinar otro punto que sirva para comprobar las dos anteriores.

Ejemplo:

Construir la gráfica de la *ecuación* $f(x) = 2x - 4$

Solución:

Se *iguala la ecuación* con y y se obtiene: $y = 2x - 4$.

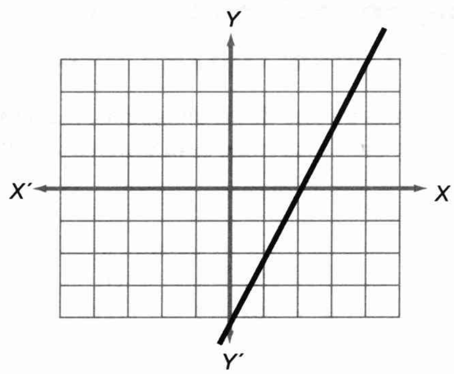
Se asignan valores a x para obtener los correspondientes valores de y, disponiéndolos en una tabla como la siguiente.

x	1	3	0
y	-2	2	-4

Si $f(x) = y$ entonces
$f(x) = 2x - 4$
para $x = 1$, $x = 3$, $x = 0$

$f(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$
$f(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$
$f(0) = 2(0) - 4 = 0 - 4 = -4$

Si estos puntos se representan gráficamente y se unen entre sí por medio de una línea recta se obtiene la gráfica correspondiente.



El punto donde la línea recta interseca al eje XX' proporciona un número real que es la solución de la ecuación.

En la ecuación del ejemplo:

$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = 2$

Si los tres puntos obtenidos *no* están en línea recta, debemos comprobar el valor de cada uno, ya que por lo menos la solución de uno de ellos es errónea.

Observa: $2x - 4 = f(x)$
$2x - 4 = 0$, de donde $f(x) = y = 0$

Nota: para encontrar la solución de una ecuación se hace $f(x) = 0$, es decir $y = 0$, o sea que cuando y vale cero la recta corta al eje XX'.

CAPÍTULO 14

Resolución de sistemas lineales con dos incógnitas

Dos ecuaciones lineales cuyas dos incógnitas sean iguales, considerándolas al mismo tiempo, constituyen un sistema de ecuaciones. Un par de valores x, y que satisfaga a ambas ecuaciones se llama solución del sistema.

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario obtener *una sola* ecuación con una incógnita. Esta operación se llama *eliminación.* Existen tres métodos de eliminación:

1. Por adición y sustracción.
2. Por sustitución.
3. Por igualación o comparación.

1 Resolución, por adición y sustracción, de un sistema lineal con dos incógnitas

En este método se *igualan* los coeficientes de una de las incógnitas, la que sea más sencilla, y a continuación se suman o restan las dos ecuaciones, según convenga, para eliminar una de las incógnitas.

Ejemplo:

Resolver el sistema.

$$
\begin{array}{rl}
7y - 15x = 1 & (1)\\
-y - 6x = 8 & (2)\\
\hline
7y - 15x = 1 & \\
-7y - 42x = 56 & \\
\hline
-57x = 57 & \\
-x = \dfrac{57}{57} & \\
x = -1 &
\end{array}
$$

Multiplicamos (2) por 7 para igualar los coeficientes de y. Sumamos miembro a miembro.
Sustituyendo el valor de $x = -1$ en la ecuación (2), se tiene:

$$
\begin{array}{rl}
-y - 6x = 8 & (2)\\
-y - 6(-1) = 8 & \\
-y + 6 = 8 & \\
-y = 8 - 6 & \\
y = -2 &
\end{array}
$$

Los valores de las incógnitas se comprueban sustituyéndolos en ambas ecuaciones; si el resultado es correcto ambas se convierten en identidades.

$$\begin{aligned} 7y - 15x &= 1 \qquad (1) \\ -y - 6x &= 8 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|r} 7(-2) - 15(-1) = 1 & -(-2) - 6(-1) = 8 \\ -14 + 15 = 1 & 2 + 6 = 8 \\ 1 = 1 & 8 = 8 \end{array}$$

2 Resolución, por sustitución, de un sistema lineal con dos incógnitas

En este método *despejamos* **cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones y** *sustituimos* **su valor en la otra ecuación.**

Ejemplo:

Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} x + 7y &= 26 \qquad (1) \\ 2x + 3y &= 19 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$x = 26 - 7y$$

Despejamos x en la ecuación (1), por ser la más fácil, y su valor lo sustituimos en (2).

$$\begin{aligned} 2(26 - 7y) + 3y &= 19 \\ 52 - 14y + 3y &= 19 \\ -11y &= 19 - 52 \\ -11y &= -33 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de $y = 3$ en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} x + 7y &= 26 \\ x + 7(3) &= 26 \\ x + 21 &= 26 \\ x &= 26 - 21 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} x + 7y &= 26 \qquad (1) \\ 2x + 3y &= 19 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 + 7(3) &= 26 \\ 5 + 21 &= 26 \\ 26 &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(5) + 3(3) &= 19 \\ 10 + 9 &= 19 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$$

3

Resolución, por igualación o comparación, de un sistema lineal con dos incógnitas

En este método *despejamos* **cualquiera de las incógnitas en** *ambas* ecuaciones, **a continuación,** se *igualan entre sí* **los dos valores de la incógnita que hemos obtenido (propiedad transitiva).**

Ejemplo:

Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \qquad (1) \\ 5x - y &= 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

Despejamos cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

$$3x + 2y = 7 \qquad\qquad 5x - y = 3$$

$$3x = 7 - 2y \qquad\qquad 5x = 3 + y$$

$$x = \frac{7 - 2y}{3} \qquad\qquad x = \frac{3 + y}{5}$$

Se igualan entre sí los dos valores de x que hemos obtenido.

$$\begin{aligned} \frac{7 - 2y}{3} &= \frac{3 + y}{5} \\ 5(7 - 2y) &= 3(3 + y) \\ 35 - 10y &= 9 + 3y \\ -10y - 3y &= 9 - 35 \\ -13y &= -26 \\ -y &= \frac{-26}{13} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $y = 2$ en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \qquad (1) \\ 3x + 2(2) &= 7 \\ 3x + 4 &= 7 \\ 3x &= 7 - 4 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \qquad (1) \\ 5x - y &= 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(1) + 2(2) &= 7 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(1) - (2) &= 3 \\ 5 - 2 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

4 Resolución de un sistema de ecuaciones fraccionarias

Conocidos los métodos de eliminación, podemos resolver sistemas con ecuaciones *fraccionarias.*

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\frac{x+y}{7}+\frac{2x-y}{5}=2 \qquad (1)$$

$$\frac{9x-5y}{3}=7 \qquad (2)$$

Suprimimos los denominadores.

En (1), mcm = 35 se tiene

$$35\left(\frac{x+y}{7}\right)+35\left(\frac{2x-y}{5}\right)=(35)(2)$$

$$5(x+y)+7(2x-y)=35(2)$$

$$5x+5y+14x-7y=70$$

$$19x-2y=70 \qquad (3)$$

En (2), mcm = 3

se tiene

$$9x-5y=(3)(7)$$

$$9x-5y=21 \qquad (4)$$

Con (3) y (4) formamos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rl} 19x-2y=70 & (3) \\ 9x-5y=21 & (4) \end{array}$$

El sistema lo resolvemos por cualquiera de los procedimientos de eliminación; por ejemplo, por sustitución.

En (4) despejamos x y el valor obtenido lo sustituimos en (3):

$$9x-5y=21$$

$$9x=21+5y$$

$$x=\frac{21+5y}{9}$$

$$19\left(\frac{21+5y}{9}\right)-2y=70$$

$$\frac{399+95y}{9}-2y=70$$

$$399+95y-18y=630$$

$$77y=630-399$$

$$y=\frac{231}{77}$$

$$y=3$$

Sustituimos el valor de $y = 3$ en (4) y se obtiene.

$$9x - 5y = 21 \qquad (4)$$
$$9x - 5(3) = 21$$
$$9x - 15 = 21$$
$$9x = 21 + 15$$
$$9x = 36$$
$$x = \frac{36}{9}$$
$$x = 4$$

Comprobación:

$$\frac{x+y}{7} + \frac{2x-y}{5} = 2 \qquad (1)$$
$$\frac{9x-5y}{3} = 7 \qquad (2)$$

$$\frac{4+3}{7} + \frac{2(4)-3}{5} = 2$$
$$1 + 1 = 2$$
$$2 = 2$$

$$\frac{9(4)-5(3)}{3} = 7$$
$$\frac{36-15}{3} = 7$$
$$\frac{21}{3} = 7$$
$$7 = 7$$

5 Resolución gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas

La solución *gráfica* se obtiene por el punto de *intersección* de las dos rectas, ya que sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones.

Ejemplo:

Resolver gráficamente el sistema.

$$3x + y = 8 \qquad (1)$$
$$5x - y = 16 \qquad (2)$$

Para construir la gráfica de cada ecuación debemos despejar y; enseguida asignar cuando menos dos valores a x.

El procedimiento se facilita si calculamos las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados, en donde $x = 0$, $y = 0$.

Para la ecuación

$$3x + y = 8$$
$$\text{Si } x = 0$$
$$3(0) + y = 8$$
$$y = 8$$

Coordenadas del punto $A(0, 8)$

Para la ecuación

$$5x - y = 16$$
$$\text{Si } x = 0$$
$$5(0) - y = 16$$
$$y = -16$$

Coordenadas del punto $C(0, -16)$

Si

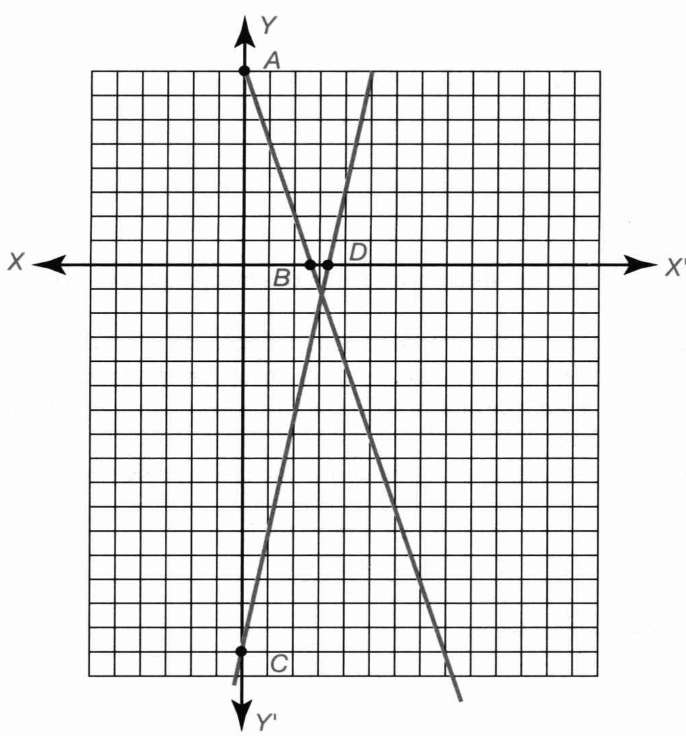
$$y = 0$$
$$3x + 0 = 8$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

Coordenadas del punto $B\left(\frac{8}{3}, 0\right)$

Si

$$y = 0$$
$$5x - 0 = 16$$
$$5x = 16$$
$$x = \frac{16}{5}$$

Coordenadas del punto $D\left(\frac{16}{5}, 0\right)$



El punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema: $x = 3$; $y = -1$, coordenadas del punto $(3, -1)$.

Si la gráfica de las ecuaciones son dos rectas que se *intersecan,* el sistema tiene una solución; se dice entonces que las ecuaciones son *compatibles.*

Si las gráficas son rectas *paralelas* no existe solución, las ecuaciones son *incompatibles.*

Cuando las gráficas de las ecuaciones *coinciden,* entonces existe un número infinito de soluciones; entonces se dice que las ecuaciones son *equivalentes.*

6

Resolución, mediante el uso del determinante, de un sistema lineal con dos incógnitas

El determinante de segundo orden es un arreglo de cuatro números colocados en un cuadro con rectas verticales a cada lado. Los cuatro números forman dos filas y dos columnas.

El determinante es el valor obtenido al multiplicar el número de la primera fila y de la primera columna por el número diagonalmente opuesto; a continuación se resta el producto de los números de la otra diagonal.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$- \quad +$$

Cada flecha indica el producto de las letras que conecta; el signo menos al final de la flecha que va del extremo superior derecho al extremo inferior izquierdo indica que ese producto debe restarse del otro.

Ejemplos:

Calcular el valor de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (4)(2) = 15 - 8 = 7$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) - (7)(-3) = -10 + 21 = 11$$

Para resolver con determinantes un sistema lineal con dos incógnitas, procedemos en la siguiente forma:

A) Escribimos la ecuación de tal manera que cada incógnita de una ecuación esté justo debajo de la *misma* incógnita de la otra; los términos constantes deben formar los segundos miembros del sistema.
B) El determinante del numerador de una incógnita se forma *reemplazando* los coeficientes de la incógnita por los términos constantes.
C) El determinante del *denominador* se forma con los coeficientes de las incógnitas.

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

determinante de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

el valor de x se obtiene

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

el valor de y se obtiene

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Ejemplo:

Resolver, por determinantes, el sistema

$$\begin{aligned} x+7y&=26 \\ 2x+3y&=19 \end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 26 & 7 \\ 19 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{(26)(3)-(7)(19)}{(1)(3)-(7)(2)}=\frac{78-133}{3-14}=\frac{-55}{-11}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 26 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{(1)(19)-(26)(2)}{(1)(3)-(7)(2)}=\frac{19-52}{3-14}=\frac{-33}{-11}=3$$

EJERCICIO 18

Resolver por cualquiera de los procedimientos de eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $3x-4y=1$, $2x-y=4$ — *Sol.* $x=3$, $y=2$
2. $3y-1=5x$, $5x+3y=5$ — *Sol.* $x=\frac{2}{5}$, $y=1$
3. $5x+2y=54$, $2x+5y=51$ — *Sol.* $x=8$, $y=7$
4. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=8$ — *Sol.* $x=6$, $y=12$
5. $\frac{5y-14}{y+3}=\frac{5x-4}{x+5}$, $\frac{y+7}{y+5}=\frac{2x-3}{2x-1}$ — *Sol.* $x=-2$, $y=0$

6. $\frac{x}{2} - 5y = 11$
$4x - 3y = 14$

Sol. $x = 2$
$y = -2$

7. $5x - 4y = 11$
$\frac{3x + 2y}{2x - y} = -\frac{11}{2}$

Sol. $x = -1$
$y = -4$

8. $\frac{x - 3y}{7} = 2x + 7$
$\frac{x + y}{3} = \frac{x - y}{5}$

Sol. $x = -4$
$y = 1$

9. $\frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{3} = 10$
$\frac{x + y}{8} = 5 - \frac{x - y}{6}$

Sol. $x = 20$
$y = 20$

10. $\frac{x - y}{5} + y = 6$
$\frac{x + y}{3} + x = 10$

Sol. $x = 6$
$y = 6$

11. $\frac{35y + x}{7} = 26$
$7x - \frac{y}{5} = 48$

Sol. $x = 7$
$y = 5$

12. $\frac{x}{2} + \frac{x + y}{9} = 5$
$\frac{x + y}{3} + \frac{y - x}{2} = 9$

Sol. $x = 6$
$y = 12$

Resolver gráficamente los siguientes sistemas lineales con dos incógnitas.

13. $x + 2y = 7$
$x + y = 4$

14. $\frac{x - y}{5} + y = 6$
$\frac{x + y}{3} + x = 15$

15. $2x + y = 14$
$3x - y = 11$

16. $3x + 7y = 2$
$4x + 9y = 3$

17. $-6x + 4y = 9$
$-2x = 6 - 3x$

18. $\begin{aligned} 3x+9y &= -18 \\ x-3y+6 &= 0 \end{aligned}$

Resolver, por determinantes, los siguientes sistemas lineales con dos incógnitas.

19. $\begin{aligned} 3x-4y &= 1 \\ 5x-3y &= 20 \end{aligned}$ *Sol.* $x=7$, $y=5$

20. $\begin{aligned} x-y &= -1 \\ x-2y &= -6 \end{aligned}$ *Sol.* $x=4$, $y=5$

21. $\begin{aligned} 7x+16 &= y \\ 5x-3y &= 0 \end{aligned}$ *Sol.* $x=-3$, $y=-5$

7 Resolución de sistemas lineales con tres incógnitas

El método algebraico utilizado para resolver un sistema lineal con dos incógnitas también sirve para dar solución a los sistemas lineales con tres incógnitas, para ello procedemos en la siguiente forma:

Seleccionamos *un par* de ecuaciones de las tres ecuaciones dadas y, por adición o sustracción, cancelamos una de las incógnitas.

A) Seleccionamos *un par* de ecuaciones de las tres ecuaciones dadas y, por adición o sustracción cancelamos una de las incógnitas.
B) Seleccionamos *una* de las ecuaciones del par anterior y la ecuación *no usada,* y cancelamos en ellas, por adición o sustracción, la *misma incógnita.*
C) Resolvemos, por cualquier procedimiento de eliminación, las *dos* ecuaciones resultantes de *A)* y *B),* obtenemos el valor de las dos incógnitas que contienen.
D) *Sustituimos* estos valores en una de las ecuaciones dadas para obtener la incógnita que falta.
E) *Comprobamos.*

Un sistema lineal con tres incógnitas puede, al igual que los sistemas lineales con dos incógnitas, tener *una* solución, *ninguna* solución o un *número infinito* de soluciones.
Consideraremos el caso en que tienen una solución.

Ejemplo:

Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 && (1) \\ 6x+2y-2z &= 6 && (2) \\ 2x+4y+z &= 12 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+2y+2z &= 14 \\ 6x+2y-2z &= 6 \\ \hline 8x+4y &= 20 && (4) \end{aligned}$$

Podemos cancelar z en (1) y (2), multiplicamos (1) por 2 para igualar los coeficientes de z; sumamos miembro a miembro.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 7 \\ -2x-4y-z &= -12 \\ \hline -x-3y &= -5 && (5) \end{aligned}$$

Cancelamos z en (1) y (3), multiplicamos (3) por -1.

$$\begin{array}{r} 8x + 4y = 20 \\ \underline{-8x - 24y = -40} \\ -20y = -20 \\ y = 1 \end{array}$$

Formamos un sistema con dos incógnitas con (4) y (5), multiplicamos (5) por 8 para igualar los coeficientes de x.

$$\begin{aligned} -x - 3y &= -5 \\ -x - 3(1) &= -5 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $y = 1$ en (5)

$$\begin{aligned} -x - 3 &= -5 \\ -x &= -5 + 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $y = 1$, $x = 2$ en (1).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 2 + 1 + z &= 7 \\ 3 + z &= 7 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Comprobación:

Comprobamos en (2).

$$\begin{aligned} 6x + 2y - 2z &= 6 \\ 6(2) + 2(1) - 2(4) &= 6 \\ 12 + 2 - 8 &= 6 \\ 14 - 8 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

8

Resolución, mediante el uso del determinante, de un sistema lineal en tres incógnitas

El determinante de tercer orden es un arreglo de nueve números colocados en un cuadrado de tres filas y tres columnas y con rectas verticales a cada lado.

Ejemplo:

Calcular el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Para facilitar su desarrollo aplicamos, al disponer la operación, el artificio siguiente, observa que el determinante continúa limitado por rectas verticales a cada lado:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{|ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ \hline - & - & - & + & + \; + \end{array}$$

Cada flecha indica el producto de los números que conecta; los signos + al final de las flechas que van del extremo superior izquierdo al extremo inferior derecho indican que estos productos deben *sumarse.*

El signo − al final de las flechas que van del extremo superior derecho al extremo inferior izquierdo indica que esos productos deben *restarse* de los que se sumaron.

Desarrollo:

$$= (20) + (-12) + (1) - (8) - (2) - (-15) = 36 - 22 = 14$$

Para resolver un sistema lineal en tres incógnitas se procede en forma semejante que con el de dos incógnitas.

El uso del determinante es aplicable cuando las ecuaciones son *compatibles*, no lo es cuando las ecuaciones son incompatibles o equivalentes.

Ejemplo:

Resolver, por determinantes, el siguiente sistema.

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 7 & (1) \\ 3x - 3 + y = z & (2) \\ 2x + 4y - 12 = -z & (3) \\ \hline x + y + z = 7 & \\ 3x + y - z = 3 & \\ 2x + 4y + z = 12 & \\ \hline \end{array}$$

Ordenamos las ecuaciones para poder usar determinantes.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 12 & 4 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right.} =$$

$$= \frac{(7) + (-12) + (12) - (12) - (-28) - (3)}{(1) + (-2) + (12) - (2) - (-4) - (3)} =$$

$$= \frac{7 - 12 + 12 - 12 + 28 - 3}{1 - 2 + 12 - 2 + 4 - 3} = \frac{35 - 15}{17 - 7} = \frac{20}{10}$$

$x = 2$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 7 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 12 & 1 & 2 & 12 \end{array}\right.}{10} =$$

$$= \frac{(3) + (-14) + (36) - (6) - (-12) - (21)}{10} =$$

$$= \frac{3 - 14 + 36 - 6 + 12 - 21}{10} = \frac{51 - 41}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$y = 1$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 12 & 2 & 4 \end{array}\right.}{10} =$$

$$= \frac{(12) + (6) + (84) - (14) - (12) - (36)}{10} =$$

$$= \frac{12 + 6 + 84 - 14 - 12 - 36}{10} = \frac{102 - 62}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

$z = 4$

Comprobación en (1)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 2 + 1 + 4 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

EJERCICIO 19

Resolver los siguientes sistemas.

1. $$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ 3x - 5y + 8z &= 17 \end{aligned}$$ *Sol.* $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

2. $$\begin{aligned} 2D \quad + F &= 2 \\ 3E - 2F &= 22 \\ 2D \quad - E &= 13 \end{aligned}$$ *Sol.* $D = \frac{13}{2}$, $E = 0$, $F = -11$

3. $$7 - \frac{5x + 3y - 6z}{2} = 2(3 - y)$$ $$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ 6x - y - 5z &= 0 \end{aligned}$$ $$45$$ *Sol.* $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$

4. $$\begin{aligned} 3D + 4E + F &= -9 \\ E + F &= 0 \\ -2D + 9E + F &= -4 \end{aligned}$$ *Sol.* $D = -2$, $E = -1$, $F = 1$

5. $$\begin{aligned} 2D + 5E - 5F &= -5 \\ D \quad + 4F &= 3 \\ E + 3F &= 9 \end{aligned}$$ *Sol.* $D = -5$, $E = 3$, $F = 2$

6. $$\begin{aligned} 2D - E \quad &= 1 \\ D \quad + 3F &= -3 \\ 2E - F &= 12 \end{aligned}$$ *Sol.* $D = 3$, $E = 5$, $F = -2$

7. $$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 3x \quad - 5z &= -1 \\ 2x + 7y \quad &= 6 \end{aligned}$$ *Sol.* $x = 3$, $y = 0$, $z = 2$

8. $$\begin{aligned} 4y + 3z &= 25 \\ 2x + 3y \quad &= 9 \\ 4x \quad - 2z &= -2 \end{aligned}$$ *Sol.* $x = 3$, $y = 1$, $z = 7$

Calcular el valor de cada uno de los siguientes determinantes de tercer orden.

9. $$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & -6 \end{vmatrix} =$$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$

14. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$

Resolver por determinantes los siguientes sistemas de ecuaciones.

15. $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 12 \\ 4x - 3y - 1 &= -z \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} \frac{5(x+y+z)}{2} &= \frac{3z+1}{5} \\ 4y - z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 2y + z &= 9 \\ z - 2y &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

9 Problemas de aplicación de las ecuaciones lineales

En uno de sus libros René Descartes señala que es conveniente:

"Separar y jerarquizar las dificultades, procediendo de la menor a la mayor cuando se aborda un tema nuevo [...]" Por tanto, "conviene dirigir toda la fuerza del espíritu a las cosas más sencillas y fáciles de entender y detenerse en ellas largo tiempo hasta acostumbrarse a intuir la verdad con claridad y distinción."

Se acepta fácilmente que una vez que se ha aprendido cierto conocimiento o la solución completa de un problema, uno debe practicarlo, si se trabaja con ese conocimiento el tiempo necesario, entonces se podrán resolver otros problemas semejantes e incluso un poco más complicados.

No existen normas rígidas para determinar la *ecuación* que solucione un problema, pero sí es conveniente atenerse a ciertos lineamientos que facilitan el trabajo:

A) Leer con cuidado el problema y entender con claridad las relaciones existentes entre las distintas cantidades; si es necesario se debe trazar una figura auxiliar.
B) Identificar las *proposiciones* que incluyen el problema y expresarlas en términos de una o más variables, las que se representan, generalmente, con x, y, etcétera.
C) Establecer ecuaciones que relacionen la incógnita o incógnitas con los datos de las proposiciones.
D) Resolver las ecuaciones y comprobar el resultado con *el enunciado del problema* y no a partir de las ecuaciones, éstas pueden estar mal planteadas.

PROPOSICIONES

A. Puesto que los problemas incluyen proposiciones que es necesario escribir en forma de expresiones matemáticas a continuación se presentan como ejemplos las que se incluyen con mayor frecuencia en problemas del nivel medio superior, cuyo estudio, como lo señala Descartes, facilitará el aprendizaje de las proposiciones que dicte el profesor.

Ejemplos:

1. Un número n que disminuido en 3 es igual a 35. *Sol.* $n - 3 = 35$

2. Un número que aumentado en 5 es igual a 45. *Sol.* $x + 5 = 45$

3. Un número tal que sus tres cuartas partes sean igual a 24. *Sol.* $\frac{3n}{4} = 24$

4. Un número x que al restar 28 a 5 veces el mismo número; es igual a 27. *Sol.* $5x - 28 = 27$

5. Un número x que al restar su sexta parte de 12 se obtiene 4. *Sol.* $12 - \frac{x}{6} = 4$

6. El promedio de la suma de cuatro números. *Sol.* $P = \frac{1}{4}(x + y + z + w)$

7. El doble de la diferencia de dos números. *Sol.* $2(x - n)$

8. Un número n que al restar 22 a dicho número es igual a 18. *Sol.* $n - 22 = 18$

9. La suma de dos números es 59, el mayor excede al menor en 9. *Sol.* $x + (x + 9) = 59$

10. Un número que al sumarle su cuarta parte es igual a 35. *Sol.* $x + \frac{x}{4} = 35$

B. Con números enteros consecutivos
Cuando se citan en un problema números enteros consecutivos siempre se les debe expresar en *orden creciente.*

Ejemplos:

11. Expresar dos conjuntos de números enteros consecutivos. *Sol.* A = {3, 4, 5, 6}
B = {−5, −4, −3, −1}

Observa que *la diferencia de dos números consecutivos es uno.*

$$4 - 3 = 1; \quad 5 - 4 = 1; \quad 6 - 5 = 1; \quad -4 - (-5) = 1; \quad -3 - (-4) = 1; \quad -1 - (-2) = 1$$

Algunos problemas de números enteros consecutivos se condicionan a que el conjunto debe ser de enteros consecutivos pares o bien de impares; en estos casos *la diferencia* entre dos números consecutivos será de *dos*.

Además, *los pares siempre tienen la forma $2n$ y los impares $2n + 1$ con $n \in Z$.*

12. Escribir dos conjuntos de números *enteros pares* consecutivos. *Sol.* A = {2, 4, 6}
B = {−4, −2, 0, 2, 4}

Observa que se puso el *cero* y que la diferencia es de *dos*.

$$6 - 4 = 2, \quad 4 - 2 = 2, \quad 2 - 0 = 2, \quad 0 - (-2) = 2, -2 - (-4) = 2$$

13. Expresar dos conjuntos de números *enteros impares* consecutivos. *Sol.* A = {1, 3, 5, 7}
B = {−3, −1, 1, 3, 5}

Observa que no se puso el *cero* y que la diferencia es de *dos*.

$$7 - 5 = 2, 5 - 3 = 2, 3 - 1 = 2, 1 - (-1) = 2, -1 - (-3) = 2$$

Expresa en forma matemática las siguientes proposiciones:

14. La suma de dos números enteros consecutivos.

Datos

n	primer número
$n + 1$	segundo número

Resolución

$n + (n + 1)$ *Sol.* $n + (n + 1)$

15. Expresar cuatro números enteros impares consecutivos y su suma.

Datos

$(2n + 1)$	primer número
$(2n + 1) + 2$	segundo número
$[(2n + 1) + 2] + 2$	tercer número
$\{[(2n + 1)+ 2] + 2\} + 2$	cuarto número

Sol. $(2n + 1) + (2n + 1) + 2 + [(2n + 1) + 2] + 2 + \{[(2n + 1) + 2] + 2\} + 2 = 8n + 15$

Resolución

$$[(2n + 1) + 2] + 2 + \{[(2n + 1) + 2] + 2\} + 2 = (2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 6) = 8n + 15$$

16. Calcular tres números enteros pares consecutivos que sumen 42.

Datos

$(2n)$	primer número
$(2n) + 2$	segundo número
$[(2n) + 2] + 2$	tercer número

Sol. 12, 14, 16 números enteros, pares consecutivos y suman 42.

Resolución

$$(2n) + (2n + 2) + [(2n + 2)] + 2 = 42$$

Comprobación

$$(2n) + (2n+ 2) + (2n+ 4) = 42$$
$$6n + 6 = 42$$
$$6n = 42 - 6$$
$$n = \frac{36}{6}$$
$$n = 6$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de n

12	primer número
14	segundo número
16	tercer número

Comprobación

Los números 12, 14, 16 son consecutivos pares, suman 42 y su diferencia es *dos*.

17. Un conjunto de cuatro números enteros impares consecutivos. ¿Cuál es el segundo? y ¿cuál es la suma del primero y el cuarto?

Datos

$(2n + 1)$	primer número
$(2n + 1) + 2$	segundo número
$[(2n + 1) + 2] + 2$	tercer número
$\{[(2n + 1) + 2 + 2] + 2\}$	cuarto número

Suma del primero y el cuarto $(2n + 1) + (2n + 1) + 6 = 4n + 8$

Sol. $(2n + 1) + 2;\quad 4n + 8$

Resolución

El segundo número es $(2n + 1) + 2$

la suma del primero y el cuarto es

$(2n + 1) + \{[(2n + 1) + 2 + 2] + 2\} = 2n + 1 + 2n + 7 = 4n + 8$

18. Expresar la suma de tres números enteros impares consecutivos.

Datos

$2n + 1$	primer número
$[(2n + 1) + 2]$	segundo número
$[(2n + 1) + 4]$	tercer número

Nota: Observa que al expresar el tercer número mentalmente se sumó $2 + 2$, lo mismo que se ha hecho para obtener la suma.

Sol. $2n + 1 + [(2n + 1) + 2] + [(2n + 1) + 4] = 3(2n + 3)$

Resolución

$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$

19. Expresar la ecuación de cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 70.

Datos

x	primer número
$x + 1$	segundo número
$x + 2$	tercer número
$x + 3$	cuarto número

Sol. $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 70$

Resolución

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 70$$

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 70$$
$$4x + 6 = 70$$
$$4x = 70 - 6$$
$$x = \frac{64}{4}$$
$$x = 16$$

Los números 16, 17, 18, 19 son consecutivos, suman 70 y su diferencia es *uno*.

C. Edades de personas

Para establecer la ecuación en que interviene la edad de personas, *las proposiciones* que se citan en los problemas se interpretan en la siguiente forma.

Vamos a considerar la letra E para referirnos a la edad de una persona.

Ejemplos:

21. En la actualidad tienes 16 años, ¿qué edad tenías hace 3 años?

$E = 16 - 3 = 13$ años (se resta) *Sol.* $E = 13$

Conclusión

La edad que tenía una persona en determinado tiempo, es la que tiene hoy menos el tiempo señalado.

22. Tu edad actual es de 15 años, dentro de 4 años ¿cuántos tendrás?

$E = 15 + 4 = 19$ años (se suma) *Sol.* $E = 19$

Conclusión

La edad que tendrá una persona después de cierto tiempo, es la que tiene actualmente más el tiempo que se indique.

Expresa matemáticamente las siguientes proposiciones.

23. ¿Qué edad tendrá una madre dentro de 6 años, si hace 12 años tenía 30?

Sol. $E = (30 + 12) + 6$

La edad actual de esa mamá es de $30 + 12$ y dentro de 6 años tendrá:

$E = (30 + 12) + 6$

24. ¿Qué edad tendrá Pedro al cabo de n años si sabemos que hace 7 años tenía 35?

Sol. $E = (35 + 7) + n$

La edad actual de Pedro es de $35 + 7$ y dentro de n años tendrá:

$E = (35 + 7) + n$

25. ¿Qué edad tenía Manuel hace 3 años, si dentro de n años tendrá 25?

Sol. $E = (25 - n) - 3$

La edad actual de Manuel es de $(25 - n)$, hace 3 años tenía:

$(25 - n) - 3$

26. La edad de José es el doble de la de su hermano Pedro y ambas edades suman 45 años.

Sol. $E = x + 2x = 45$

Datos

x	edad actual de Pedro
$2x$	la edad de José es el doble de Pedro
45	es la suma de ambas edades

Resolución

La suma de ambas edades es de 45 años

$x + 2x = 45$

27. ¿Qué edad tendrá Juan dentro de 6 años si hace 12 años tenía 25?

Sol. $E\,(25 + 12) + 6$

Datos

$25 + 12 = 37$	edad actual de Juan
6	años que transcurren

Resolución

Transcurridos 6 años la edad de Juan será de

$(25 + 12) + 6$

28. Calcular ¿qué edad tendrá Pedro dentro de x años si hace siete años tenía 40?

Sol. $E = (40 + 7) + x$

Datos

$40 + 7 = 47$	edad actual de Pedro
x	años que transcurren

Resolución

Transcurridos x años la edad de Pedro será de

$(40 + 7) + x$

29. ¿Qué edad tenía Manuel hace 10 años, si dentro de x años tendrá 30?

Sol. $E = (30 - x) - 10$

Datos

$30 - x$	edad actual de Manuel
10	años transcurridos

Resolución

Edad de Manuel hace 10 años

$E = (30 - x) - 10$

En los problemas que siguen se deben plantear las ecuaciones y una vez resueltas se *comprobarán* **los resultados en el enunciado del problema.**

Vamos a considerar las literales p y h.

P para referirnos a una persona o a uno de los padres
H para otra persona o un hijo.

30. La suma de las edades de un padre y su hijo es de 49 años, el padre es mayor en 25 años a la edad de su hijo.

¿Cuál es la edad actual de cada uno? *Sol.* 12, 37

Datos

$p + h$	49 años
$h + 25$	edad del padre

Ecuación

$$p + h = 49 \quad (1)$$
$$p = h + 25 \quad (2)$$

En (1) por sustitución

$$h + 25 + h = 49$$
$$2h = 49 - 25$$
$$h = \frac{24}{2}$$
$$h = 12$$

En (2)

$$p = h + 25$$
$$p = 12 + 25$$
$$p = 37$$

Resolución

padre	37 años
hijo	12 años

Comprobación

Las edades del padre y del hijo suman

$$12 + 37 = 49 \text{ años}$$

El padre es mayor que su hijo.

$$37 - 12 = 25 \text{ años}$$

31. La suma de las edades de un padre y su hijo es de 62 años, transcurridos cinco años la edad del padre será tres veces más que la de su hijo.

¿Cuál es la edad actual de cada uno? *Sol.* 49, 13

Datos

p = edad del padre

h = edad del hijo

Transcurridos 5 años la edad del padre será

$p + 5$ = del padre

$h + 5$ = del hijo

Ecuación

$$\begin{array}{l} p + h = 62 \\ p + 5 = 3(h + 5) \\ \hline \end{array}$$

Despejando en (1)

$$p = 62 - h$$

En (2) por sustitución

$$62 - h + 5 = 3h + 15$$
$$-4h = 15 - 67$$
$$h = \frac{52}{4}$$
$$h = 13$$

En (1)

$$p + h = 62$$
$$p + 13 = 62$$
$$p = 62 - 13$$
$$p = 49$$

Resolución

padre 49 años

hijo 13 años

Comprobación

La edad del padre y del hijo suman 13 + 49 = 62 años.

Al cabo de cinco años la edad del padre será de 49 + 5 = 54 años y la del hijo 13 + 5 = 18; 18(3) = 54 años.

32. Actualmente, un padre de familia tiene 50 años y su hijo 20. ¿Cuántos años habrán de transcurrir para que la edad del hijo sea $\frac{3}{5}$ partes de la del padre?

Datos

n = número de años que habrán de transcurrir para que la edad del hijo sea $\frac{3}{5}$ partes de la del padre.

$50 + n$ = edad del padre transcurridos n años

$20 + n$ = edad del hijo transcurridos n años

Ecuación

Como la edad del hijo es de $20 + n$ y será $\frac{3}{5}$ partes de la edad del padre dentro de n años.

$$20 + n = \frac{3}{5}(50 + n)$$
$$5(20 + n) = 3(50 + n)$$
$$100 + 5n = 150 + 3n$$
$$2n = 50$$
$$n = 25$$

Comprobación

Actualmente, el padre tiene 50 + 25 = 75 años.

el hijo 20 + 25 = 45 años.

las $\frac{3}{5}(75) = 45$ años.

D. Figuras geométricas

Ejemplos:

33. Si las dimensiones de un rectángulo se aumentaran en 2 cm la longitud y en 3 cm el ancho, su área actual se incrementaría en 35 cm². Pero, si la longitud fuera 2 cm menos y el ancho 2 cm más el área sería la original. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Datos *Sol.* 6.6, 4.6

al	área de un rectángulo, donde
l	longitud
a	ancho
$(l + 2)(a + 3) = 35 \text{ cm}^2$	área incrementada
$(l - 2)(a + 2) =$	área actual

Ecuación

$$(l + 2)(a + 3) = al + 35 \quad (1)$$

$$(l - 2)(a + 2) = al \quad (2)$$

Operaciones en (1)

$$\cancel{al} + 3l + 2a + 6 = \cancel{al} + 35$$

$$3l + 2a = 29 \quad (3)$$

Operaciones en (2)

$$\cancel{al} + 2l - 2a - 4 = \cancel{al}$$

$$2l - 2a = 4$$

$$l - a = 2 \quad (4)$$

Sistema de ecuaciones con (3) y (4)

$$\begin{aligned} 3l + 2a &= 29 \\ l - a &= 2 \end{aligned}$$

multiplicando (4) por 2

$$\begin{aligned} 3l + \cancel{2a} &= 29 \\ 2l - \cancel{2a} &= 4 \\ \hline 5l &= 33 \\ l &= \frac{33}{5} \\ l &= 6.6 \end{aligned}$$

En (4)

$$\begin{aligned} l - a &= 2 \\ 6.6 - a &= 2 \\ -a &= 2 - 6.6 \\ a &= 4.6 \end{aligned}$$

Resolución

6.6 cm longitud

4.6 cm ancho

Comprobación

Área actual del rectángulo

$6.6\,(4.6) = 30.36\ \text{cm}^2$

Si se aumentan las dimensiones señaladas el área quedará aumentada en 35 cm^2

$8.6\,(7.6) = 65.36$

La diferencia de área es

$65.36 - 30.36 = 35\ \text{cm}^2$

Observa que en este problema las literales que se han usado son las letras iniciales de las palabras longitud y ancho, lo cual es frecuente y así lo aplicaremos en otros casos.

34. El perímetro de un triángulo isósceles mide 7.5 cm, la longitud de uno de los lados iguales es $\frac{3}{5}$ de la longitud de la base. Calcular la longitud de la base de este triángulo.

Sol. $34\frac{1}{11}$ cm

Datos

x longitud de la base

$\frac{3x}{5}$ longitud de cada uno de los 2 lados iguales

Ecuación

$$\frac{3x}{5} + \frac{3x}{5} + x = 75$$

$mcm = 5$

$$\begin{aligned} 3x + 3x + 5x &= 375 \\ 11x &= 375 \\ x &= \frac{375}{11} \\ x &= 34\frac{1}{11} \end{aligned}$$

Resolución

La base mide $34\frac{1}{11}$ cm

Comprobación

Un lado mide $\frac{3}{5}$ de la base

$$\frac{3}{5}\left(34\frac{1}{11}\right) = \frac{1125}{55}$$

El otro lado igual del triángulo isósceles mide también $\frac{1125}{55}$ y la base $\frac{375}{11}$

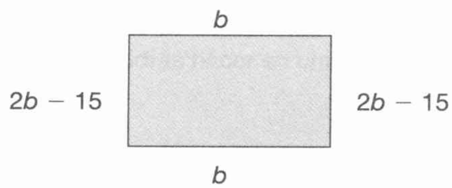
Los lados y la base suman

$$\begin{aligned}\frac{1125}{55}+\frac{1125}{55}+\frac{375}{11} &= \frac{1125+1125+1875}{55}\\ &= \frac{4125}{55}\\ &= 75 \text{ cm}\end{aligned}$$

35. Si en un cuadrilátero de base b y altura $(2b - 15)$ se aumentan las dos dimensiones en 12 cm cada una, el perímetro del rectángulo será de 74 cm. Calcular las dimensiones de los lados del rectángulo.

Sol. $21\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{3}$ cm

Datos



b	base
$b + 12$	longitud de la base aumentada
$2b - 15 + 12$	$2b - 3$ longitud de la altura aumentada

Ecuación

El perímetro es igual a la suma de los lados

$$\begin{aligned}2(b+12)+2(2b-3) &= 74\\ 2b+24+4b-6 &= 74\\ 6b &= 74-18\\ b &= \frac{56}{6}\\ b &= 9\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Resolución

Longitud de la base $b + 12 = 9\frac{1}{3} + 12$

$$\begin{aligned}&= \frac{28}{3}+12\\ &= 21\frac{1}{3} \text{ cm}\end{aligned}$$

Longitud de la altura $2b - 3 = 2\left(9\frac{1}{3}\right) - 3$

$$\begin{aligned}&= 2\left(\frac{28}{3}\right)-3\\ &= 15\frac{2}{3} \text{ cm}\end{aligned}$$

Comprobación

bases + alturas = perímetro

$$21\frac{1}{3} + 21\frac{1}{3} + 15\frac{2}{3} + 15\frac{2}{3} = 74 \text{ cm}$$

36. Un rectángulo mide 5 m más de largo y 3 m menos de ancho que un cuadrado de la misma área. Encontrar el lado del cuadrado y las dimensiones del rectángulo.

Datos

Sol. 7.5; 12.5, 4.5m

x	lado del cuadrado
x^2	área del cuadrado
$x + 5$	largo del rectángulo
$x - 3$	ancho del rectángulo
$(x + 5)(x - 3)$	área del rectángulo

Ecuación

$$(x + 5)(x - 3) = x^2$$

$$\cancel{x^2} + 2x - 15 = \cancel{x^2}$$

$$2x = 15$$

$$x = 7.5$$

Resolución

Lado del cuadrado 7.5 m

Dimensiones del rectángulo

Largo $7.5 + 5 = 12.5$ m　　Ancho $7.5 - 3 = 4.5$ m

Comprobación

Área del rectángulo $(12.5)(4.5) = 56.25$ m^2

Área del rectángulo $(7.5)(7.5) = 56.25$ m^2

37. En un rectángulo su longitud excede a su ancho en 4 cm; si cada dimensión se aumenta en 5 cm el área se incrementaría en 65 cm^2. Calcular las dimensiones originales del rectángulo.

Datos

Sol. 2, 6 cm

x	ancho rectángulo
$x + 4$	longitud rectángulo
$x + 5$	ancho incrementado
$x + 4 + 5 = x + 9$	longitud incrementada
65 cm^2	incremento del área

Ecuación

$$(x + 5)(x + 9) - x(x + 4) = 65$$

$$\cancel{x^2} + 5x + 9x + 45 - \cancel{x^2} - 4x = 65$$

$$10x + 45 = 65$$

$$10x = 65 - 45$$

$$x = \frac{20}{10}$$

$$x = 2$$

Resolución

Dimensiones originales del rectángulo, 2 cm de ancho por 6 cm de longitud.

Las dimensiones incrementadas son $2 + 5 = 7$ de ancho por $2 + 9 = 11$

$$\text{Áreas: } 2(6) = 12 \text{ cm}^2$$

$$7(11) = 77 \text{ cm}^2$$

Diferencia de las áreas $77 - 12 = 65$ cm^2

E. Trabajo realizado por personas

Los problemas que se refieren a la *rapidez* en que puede realizarse un trabajo se resuelven *determinando inicialmente la fracción de trabajo que realiza cada persona en una unidad de tiempo* y ésta haciendo la relación entre las fracciones determinadas; en estos problemas la unidad, el número *uno*, representa el trabajo total a realizar.

Ejemplos:

38. Si durante el periodo de vacaciones decides trabajar y consideras realizar un trabajo en 6 horas. ¿Cuánto trabajo podrás hacer en una hora?

Sol. $\frac{1}{6}$ del trabajo por realizar.

39. Si un campesino con un tractor logra arar en 5 días un campo de cultivo. ¿Cuántos campos de cultivo podrá arar en x días?

Sol. $\frac{x}{5}$ ara en x días.

40. Con una podadora pequeña un trabajador puede cortar el pasto de un campo deportivo en 9 días, otro trabajador con una podadora más potente puede hacerlo en 3 días. Calcular el número de días en que pueden podar el campo los dos trabajadores si realizan el trabajo simultáneamente

Sol. 2 días y $\frac{1}{4}$ de día.

Datos

x número de días que necesitan para arar el campo trabajando juntos.

$\frac{1}{x}$ parte del campo cortado en un día por los dos.

$\frac{1}{9}$ trabajo podadora pequeña en un día.

$\frac{1}{3}$ trabajo podadora más potente en un día.

Ecuación

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

$$\text{mcm }(9, 3, x) = 9x$$

$$x + 3x = 9$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{9}{4}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

Resolución

En 2 días y $\frac{1}{4}$ de día pueden podar el campo los dos trabajadores.

Comprobación

Los dos trabajadores aran el campo en $2\frac{1}{4}$ días, en un día hacen

$$\frac{1}{2\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

Un trabajador en un día ara del campo $\frac{1}{9}$ y el otro $\frac{1}{3}$, entre los dos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1+3}{9} = \frac{4}{9}$$

41. Un maestro artesano y su ayudante cobran 50 pesos por un trabajo que el maestro puede realizar en 3 horas y su ayudante en 5 horas. Si cada uno de ellos trabajara 2 horas más podrían cobrar 80 pesos. Obtener el salario por hora de cada uno.

Sol. \$ 12.50, \$ 2.50

Datos

m	salario por hora del maestro
$3\,m$	salario en 3 horas de trabajo
$3m + 2m = 5m$	trabajando 2 horas de más
a	salario por hora del ayudante
$5a$	salario en 5 horas de trabajo
$5a + 2a = 7a$	trabajando 2 horas de más

Ecuación

$$3m + 5a = 50 \qquad (1)$$
$$5m + 7a = 80 \qquad (2)$$

Por igualación

En (1)

$$3m = 50 - 5a$$
$$m = \frac{50 - 5a}{3} \qquad (3)$$

$$5m = 80 - 7a$$
$$m = \frac{80 - 7a}{5} \qquad (4)$$

con (3) y (4)

$$\frac{50 - 5a}{3} = \frac{80 - 7a}{5}$$
$$5(50 - 5a) = 3(80 - 7a)$$
$$250 - 25a = 240 - 21a$$
$$-25a + 21a = 240 - 250$$
$$-4a = -10$$
$$a = \frac{10}{4}$$
$$a = 2.5$$

En (4)

$$m = \frac{80 - 7a}{5}$$

$$m = \frac{80 - 7(2.5)}{5}$$

$$m = \frac{80 - 17.5}{5}$$

$$m = \frac{62.5}{5}$$

$$m = 12.5$$

Resolución

El maestro gana $12.50 por hora

El ayudante gana $2.50 por hora

Comprobación

El maestro gana 3(12.50) = 37.5

El ayudante gana 5(2.5) = 12.5

$37.5 + $12.5 = $50.00

42. Un artesano gana 8 pesos por hora y su ayudante 4 pesos por hora, entre los dos reciben 64 pesos por un trabajo; si el sueldo fuera de un peso menos por hora, habrían cobrado 52 pesos. Calcular el tiempo que trabajó cada uno.

Sol. 4 y 8 horas

Datos

m	tiempo en horas que trabaja el maestro
$8m$	sueldo de m horas de trabajo del maestro
$8m - m = 7m$	sueldo cobrando un peso menos por hora
a	tiempo en horas que trabaja el ayudante
$4a$	sueldo de a horas de trabajo del ayudante
$4a - a = 3a$	sueldo cobrando un peso menos por hora

Ecuación

$$8m + 4a = 64 \quad (1)$$
$$7m + 3a = 52 \quad (2)$$

Por igualación

En (1)

$$8m = 64 - 4a$$

$$m = \frac{64 - 4a}{8} \quad (3)$$

En (2)

$$7m = 52 - 3a$$

$$m = \frac{52 - 3a}{7} \quad (4)$$

Con (3) y (4)

$$\frac{64 - 4a}{8} = \frac{52 - 3a}{7}$$

$$7(64 - 4a) = 8(52 - 3a)$$

$$448 - 28a = 416 - 24a$$

$$-28a + 24a = 416 - 448$$

$$-4a = -32$$

$$a = 8$$

En (3)

$$m = \frac{64 - 4(8)}{8}$$

$$m = \frac{64 - 32}{8}$$

$$m = \frac{32}{8}$$

$$m = 4$$

Resolución

El maestro trabajó	4 horas
El ayudante	8 horas

Comprobación

El maestro cobró	$4(8) = 32$
El ayudante	$8(4) = 32$

entre ambos reciben por su trabajo \$32.00 + \$32.00 = \$64.00

43. Una llave llena un depósito de agua en 20 minutos y otra en 30, calcular en qué tiempo llenan el depósito las dos llaves juntas.

Sol. 12 min

Datos

x	número de minutos en que llenan el depósito las dos llaves juntas
$\frac{1}{x}$	parte del depósito llenado por las dos llaves
$\frac{1}{20}$	primera llave: parte del depósito que llena en un minuto
$\frac{1}{30}$	segunda llave: parte del depósito que llena en un minuto

Ecuación

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x}$$

mcm $(20, 30, x) = 60x$

$$3x + 2x = 60$$

$$5x = 60$$

$$x = 12$$

Resolución

En 12 minutos se llena el depósito con las dos llaves juntas.

Comprobación

Una llave llena el depósito en $\frac{12}{20}$, la otra en $\frac{12}{30}$, por tanto, $\frac{12}{20}+\frac{12}{30}=\frac{36+24}{60}=\frac{60}{60}=1$ se llena el depósito.

44. Una llave llena un tanque de agua en 6 minutos y otra en 8, y una tercera lo desagua en 24 minutos. Calcular en qué tiempo se llena el depósito si estando vacío se procede a abrir las tres llaves.

Sol. 4 min

Datos

x número de minutos necesarios para llenar el depósito

$\frac{1}{x}$ parte del trabajo de cada llave

$\frac{1}{6}$ primera llave llena el depósito en un minuto

$\frac{1}{8}$ segunda llave llena el depósito en un minuto

$\frac{1}{24}$ tercera llave desagua el depósito en un minuto

Ecuación

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{x}$$

mcm $(6, 8, 24, x) = 24x$

$$4x + 3x - x = 24$$
$$6x = 24$$
$$x = 4 \text{ min}$$

Resolución

En 4 minutos se llena el depósito con las tres llaves juntas.

Comprobación

Una llave llena el depósito en $\frac{4}{6}$, la segunda en $\frac{4}{8}$ y la tercera lo desagua en $\frac{4}{24}$

por tanto, $\frac{4}{6}+\frac{4}{8}-\frac{4}{24}=\frac{16+12-4}{24}=\frac{24}{24}=1$ tanque lleno.

45. Un maestro albañil puede hacer un trabajo en 5 días y su ayudante puede hacer el mismo trabajo en 7 días, ¿en qué tiempo pueden hacerlo conjuntamente?

Sol. $2\frac{11}{12}$

Datos

x número de días necesarios para terminar la obra cuando trabajan juntos

$\frac{1}{x}$ parte de la obra trabajada en un día por los dos

$\frac{1}{5}$ parte del trabajo del maestro en un día

$\frac{1}{7}$ parte del trabajo del ayudante en un día

Ecuación

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1}{x}$$

mcm (5, 7, x) = 35*x*

$$7x+\ 5x = 35$$
$$12\ x = 35$$
$$x = \frac{35}{12} = 2 \text{ días y } \frac{11}{12} \text{ de día}$$

Resolución

En 2 días y $\frac{11}{12}$ de día pueden hacer el trabajo entre los dos.

Comprobación

Los dos trabajadores hacen la obra en $2\frac{11}{12}$, en un día hacen

$$\frac{1}{2\frac{11}{12}}=\frac{1}{\frac{35}{12}}=\frac{12}{35}$$

El maestro en un día trabaja $\frac{1}{5}$ de la obra y su ayudante $\frac{1}{7}$ entre los dos.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{7+5}{35}=\frac{12}{35}$$

46. Un tractorista puede arar un terreno con un tractor en 8 días y su ayudante puede hacer el mismo trabajo con un tractor menos potente en 12 días. ¿En cuántos días pueden los dos arar el terreno, si sólo el ayudante inicia el trabajo y hasta el segundo día el tractorista empezó a trabajar?

Sol. 4 días y $\frac{2}{5}$ de día

Datos

x número de días que necesitan para arar trabajando juntos

$\frac{x}{8}$ parte del terreno arado por el tractorista en un día

$\frac{x}{12}$ parte del terreno arado por el ayudante en un día

Observa

El ayudante aró $\frac{1}{12}$ del terreno el primer día aunque trabajó solo, por tanto, quedaron sin arar $\frac{11}{12}$.

Ecuación

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=\frac{11}{12}$$

mcm (8, 12) = 24

$$3x + 2x = 22$$
$$5x = 22$$
$$x = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

Resolución

En 4 días y $\frac{2}{5}$ de día pueden terminar el trabajo entre los dos, considerando que hasta el segundo día inicia sus labores el tractorista.

Comprobación

$\frac{2}{5}\ \frac{25}{5}$

El tractorista aró $\dfrac{4\frac{2}{5}}{8} = \dfrac{\frac{22}{5}}{8} = \dfrac{11}{20}$ y el ayudante $\dfrac{4\frac{2}{5}}{12} = \dfrac{\frac{22}{5}}{12} = \dfrac{11}{30}$

entre ambos $\frac{11}{20} + \frac{11}{30} = \frac{33+22}{60} = \frac{55}{60} = \frac{11}{12}$ que es la parte del terreno que queda sin arar.

F. Móviles en movimiento uniforme

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia el *movimiento* desde el punto de vista puramente matemático, toma en consideración el *tiempo* y el *espacio,* pero prescinde de la fuerza que lo produce, todos tenemos noción clara de lo que es el movimiento, a cada instante ocurren ante nosotros cambios de posición de ciertos cuerpos en relación con otros que consideramos inmóviles. Podemos decir, en general, que un objeto en movimiento ocupa sucesivamente diversos lugares en el espacio.

En cinemática se llama *móvil* al objeto en movimiento; una persona caminando, una piedra cayendo, un avión desplazándose, un ciclista, son otros tantos móviles.

El *movimiento uniforme* se produce cuando el móvil recorre *espacios* iguales en *tiempos* iguales.

La *velocidad* en el movimiento uniforme se define como el cociente del *espacio* recorrido entre el *tiempo* empleado en recorrerlo, es decir:

$$v = \frac{e}{t}$$

de donde

$$e = vt$$

$$t = \frac{e}{v}$$

En los problemas con móviles *siempre* se debe considerar que se realizan en las condiciones siguientes:

1. Se desplazan en la *misma dirección* y pueden ser en el *mismo sentido* o en *sentido contrario.*
2. Se desplazan en *movimiento uniforme* a menos que se indique lo contrario, concepto que se cita en algunos problemas más como *velocidad media.*

Por tanto,

Si un automovilista recorre 70 km en la primera hora, 80 km en la segunda y 30 km en la tercera, habrá recorrido 180 km a una *velocidad media* de 60 km/h.

Al aplicar las fórmulas antes citadas las *magnitudes* deben expresarse en unidades acordes entre sí, de manera que si la velocidad se cita en km/h la distancia se dará en kilómetros y el tiempo en horas. Si un proyectil recorre 8 metros durante cada segundo, diremos que su movimiento es uniforme y su velocidad es de 8m/seg.

Ejemplos:

47. Si una persona camina a 5 km/h en 4 horas, ¿qué distancia recorre?

$d = vt; 5(4) = 20$ km — *Sol.* 20 km

48. En un paseo por el campo se recorrieron 8 km en 2 horas, ¿a qué velocidad se caminó?

$v = \frac{d}{t};\ t = \frac{8}{2} = 4\,\text{km/h}$ — *Sol.* 4 km/h

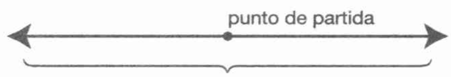
49. Si decides hacer ejercicio y piensas recorrer 12 km a 7 km/h, ¿en qué tiempo cubrirás la distancia?

$t = \frac{d}{v};\ t = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}\,\text{h}$ — *Sol.* $1\frac{5}{7}$ h

50. En un camino de terracería dos corredores parten desde un mismo lugar en direcciones opuestas, un corredor se desplaza a 7 km/h y el otro a 8 km/h, ¿qué tiempo habrá de transcurrir para que la distancia que los separe sea de 35 km?

Sol. $2\frac{1}{3}$ h

Datos



$x =$ tiempo en horas

$7 + 8 = 15$ km es la distancia que los separa en una hora, en x horas será de $15x$

Ecuación

$$15x = 35$$
$$x = \frac{35}{15} = 2\frac{5}{15}$$

Resolución

$2\frac{1}{3}$ horas

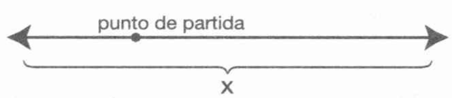
Comprobación

$$2\frac{1}{3}(15) = \frac{7}{3}(15) = \frac{105}{3} = 35\,\text{km}$$

51. Dos trenes de carga parten de una estación al mismo tiempo y en *direcciones opuestas,* uno se mueve a 70 km/h y el otro a 60 km/h, ¿qué tiempo transcurrirá para que la distancia entre ellos sea de 650 km?

Sol. 5 h

Datos



x tiempo en horas

En una hora la distancia que los separa es de $70 + 60 = 130$ km, al cabo de x horas será de $130x$.

Ecuación

$$70x + 60x = 650$$
$$130x = 650$$
$$x = \frac{650}{130}$$
$$x = 5$$

Resolución

5 horas

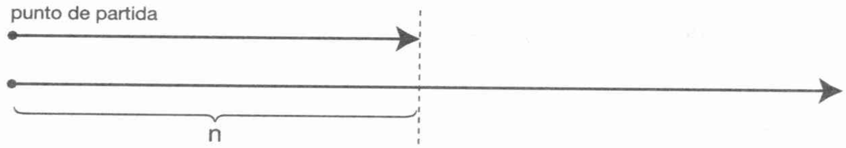
Comprobación

$5(130) = 650$ km

52. Desde un mismo punto de partida un ciclista inicia su movimiento con una velocidad de 24 km/h; desde el mismo lugar y transcurridos 45 minutos parte en la *misma dirección* un automovilista a 36 km/h, ¿al cabo de qué tiempo el automovilista alcanzará al ciclista?

Sol. 1 h 30 min

Datos



En 45 minutos el ciclista se desplaza $\frac{3}{4}$ de hora a 24 km/h son

$\frac{3}{4}(24) = 18\,\text{km}$

el automovilista se aproxima al ciclista en cada hora

$36 - 24 = 12$ km

en n horas el automovilista se aproxima al ciclista

$12\,n$

como la distancia que los separaba al inicio del movimiento es de 18 km, se tiene:

Ecuación

$$12n = 18$$
$$n = \frac{18}{12}$$
$$n = 1.5$$

Resolución

$1.5 = 1$ h 30 min

Comprobación

En 1.5 h el automovilista recorre $36(1.5) = 54$ km en 1.5 h el ciclista recorre $24(1.5) = 36$ km si sumamos a esta distancia los 18 km que los separaban al inicio, se tiene $36 + 18 = 54$ km que es la distancia recorrida por el automovilista.

53. Dos aviones parten al mismo tiempo de un aeropuerto en *direcciones opuestas;* la velocidad de uno de ellos es de 100 km/h más que la del otro. Si al cabo de tres horas la distancia que los separa es de 1200 km, ¿cuál es la velocidad de cada uno de los aviones?

Sol. 150 km/h, 250 km/h

Datos

Avión lento

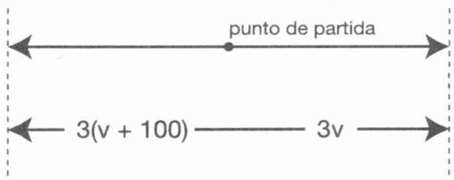
v velocidad en km/h

$3v$ distancia en tres horas

Avión rápido

$v + 100$ velocidad en km/h

$3(v + 100)$ distancia en tres horas



1200 = la suma de las distancias recorridas

Ecuación

$$3v + 3(v + 100) = 1200$$
$$3v + 3v + 300 = 1200$$
$$6v = 1200 - 300$$
$$v = \frac{900}{6}$$
$$v = 150$$

Resolución

avión lento 150 km/h

avión rápido 150 + 100 = 250 km/h

Comprobación

En 3 horas el avión lento se desplaza

150 (3) = 450 km

en el mismo tiempo de 3 horas el avión rápido recorre

250 (3) = 750 km

la suma de las dos distancias

450 + 750 = 1200 km

54. Dos ciclistas parten del *mismo punto* y *en sentido opuesto*; si al cabo de tres horas de iniciado el movimiento la distancia que los separa es de 60 km y considerando que la velocidad del ciclista A es más rápida en 2 km/h que la del ciclista B, calcular la velocidad del ciclista B.

Sol. 9km/h

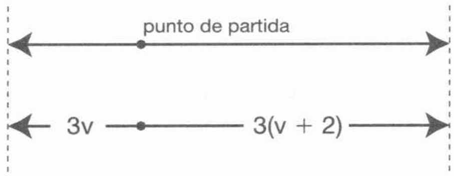
Datos

Ciclista B lento

v	velocidad en km/h
$3v$	en 3 horas

Ciclista A rápido

$v + 2$	velocidad en km/h (se suma)
$3(v + 2)$	en 3 horas



Ecuación

$$3v + 3(v + 2) = 60$$
$$3v + 3v + 6 = 60$$
$$6v = 60 - 6$$
$$v = \frac{54}{6}$$
$$v = 9$$

Resolución

velocidad ciclista B (lento)

$v = 9$ km/h

Comprobación

En 3 horas el ciclista B se desplaza

$9(3) = 27$ km

el ciclista A

$11(3) = 33$

la suma de las dos distancias

$27 + 33 = 60$ km

55. Dos automovilistas, A y B, parten del *mismo punto* y *en sentido contrario,* la velocidad de A es de 80 km/h y la de B es de 60 km/h; calcular el tiempo transcurrido desde su partida hasta que la separación entre ambos sea de 700 km.

Sol. 5 h

Datos

t	tiempo en horas
$80t$	distancia recorrida por A
$60t$	distancia recorrida por B
700 km	distancia recorrida

Ecuación

$$\begin{aligned} 80t + 60t &= 700 \\ 140t &= 700 \\ t &= \frac{700}{140} \\ t &= 5 \end{aligned}$$

Resolución

5 horas

Comprobación

El automovilista A transita a 80 km/h durante 5 horas

5(80) = 400 km

el automovilista B a 60 km/h en 5 horas

5(600) = 300 km

la suma de las dos distancias

400 + 300 = 700 km

56. Dos motociclistas parten en el mismo instante desde dos puntos distantes entre sí, a 275 km de distancia, las velocidades medias son de 60 y 50 km/h, respectivamente. ¿Qué tiempo transcurre hasta que se cruzan?

Sol. 2 h, 30 min

Datos

t tiempo que transcurre hasta el cruce

Un motociclista

60	km/h velocidad
$60t$	distancia recorrida

El otro motociclista

50	km/h velocidad
$50t$	distancia recorrida
275 km	distancia que los separa

Ecuación

$$\begin{aligned} 60t + 50t &= 275 \\ 110t &= 275 \\ t &= \frac{275}{110} \\ t &= 2.5 \end{aligned}$$

Resolución

Los motociclistas se cruzan al cabo de 2.5 h (2h 30 min), uno de ellos recorre 150 km y el otro 125 km.

Comprobación

Un motociclista se desplaza a 60 km/h, en 2.5 h

$60(2.5) = 150$ km

el otro a 50 km/h en 2.5 h

$50(2.5) = 125$ km

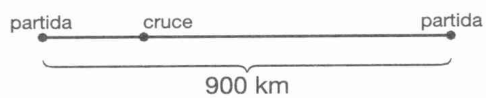
la suma de las dos distancias

$150 + 125 = 275$ km

57. Dos móviles parten al mismo instante de dos puntos separados entre sí por 900 km y se dirigen *a su encuentro*, la velocidad de uno de ellos es de 20 km/h más que la del otro, calcular la velocidad del otro móvil, sabiendo que transcurrieron 6 horas en cruzarse.

Sol. 65 km/h

Datos



x	velocidad
$6x$	distancia que recorrió un móvil
$6(x + 20)$	distancia que recorrió el otro móvil
900	km separación

Ecuación

$$6x + 6(x + 20) = 900$$
$$6x + 6x + 120 = 900$$
$$12x = 900 - 120$$
$$x = \frac{780}{12}$$
$$x = 65$$

Resolución

65 km/h velocidad del móvil lento

Comprobación

La distancia que recorrió un móvil es de $6(65) = 390$

la distancia que recorrió el otro móvil es de $6(85) = 510$

la suma de las dos distancias

$390 + 510 = 900$ km

58. Un automovilista va de la ciudad B a la C y regresa de inmediato a la primera, cubriendo el viaje de ida y vuelta en un tiempo de 12 horas, calcular la distancia entre ambas ciudades y el tiempo transcurrido en cada uno de los viajes, si el automóvil de ida hizo una velocidad media de 25 km/h y el de regreso a 35 km/h.

Sol. 175 km; 7 h, 5h

Datos

Viaje de ida

25 km/h = velocidad

t = tiempo

$25t$ = distancia en km

Viaje de regreso

35 km/h velocidad

$(12 - t)$ tiempo en horas

$35(12 - t)$ distancia en km

Ecuación

La distancia recorrida en el viaje de ida es igual a la de regreso

$$25t = 35(12 - t)$$
$$25t = 420 - 35t$$
$$25t + 35t = 420$$
$$60t = 420$$
$$t = \frac{420}{60}$$
$$t = 7$$

Resolución

La fórmula de la distancia es $d = vt$

$v = 25$ km/h

$t = 7$ h

Por lo tanto

$d = 25(7) = 175$ km

tiempo empleado en cada uno de los viajes

de ida 7 horas

de regreso $12 - 7 = 5$ horas

Comprobación

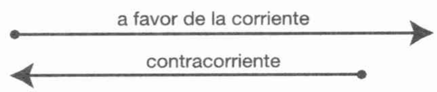
Se recorrió una distancia de 175 km a una velocidad de 25 km/h en $\frac{175}{25} = 7$ horas;

de regreso se recorrieron 175 km a una velocidad de 35 km/h en $\frac{175}{35} = 5$ horas,

$7 + 5 = 12$ horas.

59. Una lancha navega a *favor de la corriente* a una velocidad de 4 km/h y *contra la corriente* a 2 km/h; ¿qué distancia a favor de la corriente debe navegar si tiene que regresar al punto de partida 1.5 horas después de haber iniciado el movimiento?

Datos *Sol.* 2 km



$v = \frac{d}{t}$, fórmula de la velocidad

$\frac{d}{4}$ tiempo transcurrido a favor de la corriente

$\frac{d}{2}$ tiempo en contra de la corriente

estos tiempos suman 1.5 h, o sea $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ h

Ecuación

$$\frac{d}{4} + \frac{d}{2} = \frac{3}{2}$$

mcm (4, 2) = 4

$$d + 2d = 6$$

$$3d = 6$$

$$d = 2 \text{ km}$$

Resolución

Se navega a favor de la corriente 2 km

Comprobación

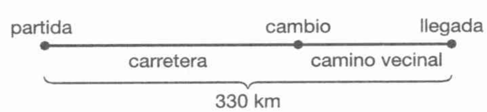
tiempo a favor de la corriente $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ h

tiempo en contracorriente $\frac{2}{2} = 1$ h

$$\frac{1}{2} + 1 = 1.5 \text{ h}$$

60. Un automovilista transita sobre una carretera a una velocidad media de 70 km/h y a 25 km/h en un camino vecinal; si manejó 6 horas en un recorrido de 330 km, calcular cuánto tiempo condujo en carretera y cuánto en el camino vecinal.

Datos *Sol.* 4h, 2h



x	número de horas en carretera
$6 - x$	número de horas sobre el camino vecinal
70	km/h velocidad en carretera
25	km/h velocidad en camino vecinal
$70x$	número de km transitados en carretera
$25(6 - x)$	número de km transitados sobre camino vecinal

Ecuación

$$70x + 25(6 - x) = 330$$
$$70x + 150 - 25x = 330$$
$$70x - 25x = 330 - 150$$
$$45x = 180$$
$$x = \frac{180}{45}$$
$$x = 4$$

Resolución

Manejó en carretera 4 horas

en camino vecinal $6 - 4 = 2$ horas

Comprobación

$4(70) = 280$ km en carretera

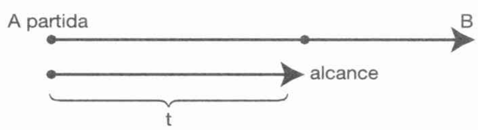
$2(25) = 50$ km en camino vecinal

$280 + 50 = 330$ km

61. Un cohete se lanza a las 08:00 horas de la ciudad A hacia B y se desplaza a una velocidad de 600 km/h; otro cohete parte de la misma ciudad a las 09:30 horas con el mismo destino con una velocidad de 750 km/h, ¿cuánto tardará el segundo cohete en alcanzar al primero?

Sol. 6 h

Datos



t tiempo en que se alcanzan los cohetes

Primer cohete

600	km/h velocidad
$0930 - 0800 = 1.5$	horas en que se adelanta el primer cohete
$t + 1.5$	tiempo
$600(t + 1.5)$	distancia

Segundo cohete

750	km/h velocidad
t	tiempo
$750t$	distancia

Ecuación

Las dos distancias que recorren hasta el alcance, son iguales

$$600(t + 1.5) = 750t$$
$$600t + 900 = 750t$$
$$600t - 750t = -900$$
$$-150t = -900$$
$$t = \frac{900}{150}$$
$$t = 6$$

Resolución

En 6 horas el segundo cohete alcanza al primero

Comprobación

El primer cohete recorre

$600(6 + 1.5) = 600(7.5) = 4500$ km

misma que recorre el segundo cohete para alcanzarlo

$750(6) = 4500$ km

G. Móviles en movimiento uniformemente variado

A. Movimiento *uniformemente variado* es aquel en que la velocidad del móvil varía en cantidades iguales y tiempos iguales.

La *aceleración* es la cantidad en que varía la velocidad durante la unidad de tiempo.

Si representamos con v_0 la *velocidad* del móvil en el instante en que inicia el movimiento, con t el *tiempo* en que éste transcurre y con a la aceleración, podemos deducir las fórmulas del movimiento uniformemente variado.

Al inicio del primer segundo la velocidad es v_0

Al fin del primer segundo la velocidad es $v_0 + a(t_1)$

Al fin del segundo segundo la velocidad es $v_0 + a(t_2)$

Al fin del tercer segundo la velocidad es $v_0 + a(t_3)$

Al fin del t segundo la velocidad es $v_0 + a(t)$

Por lo tanto, si designamos con v esta velocidad al cabo del tiempo t, queda

$$v = v_0 + at$$ Fórmula del movimiento uniformemente variado

Si el móvil hubiera recorrido el mismo *espacio* e en el mismo tiempo t con un movimiento uniforme su velocidad sería el promedio de las velocidades extremas.

Como la velocidad inicial es v_0 y la final es $v_0 + at$; el promedio es:

$$\frac{v_0 + v_0 + at}{2}$$

$$\frac{2v_0 + at}{2}$$

Por lo tanto

$$v = v_0 + \frac{1}{2}at$$ Fórmula de la velocidad media

Esta expresión representa la velocidad con que el móvil recorre el espacio e en un tiempo t con movimiento uniforme; pero como

$$e = vt$$

Si en esta fórmula sustituimos el valor de la velocidad media v queda:

$$e = (v_0 + \frac{1}{2}at)t$$

efectuando el producto

$$e = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$ Fórmula del espacio recorrido en un movimiento uniformemente variado

Ejemplo:

62. Un móvil tiene una velocidad inicial de 3 metros por segundo y se desplaza horizontalmente durante 35 segundos con una aceleración de 0.5 metros por segundo. Calcula la velocidad al cabo de los 35 segundos y el espacio recorrido.

Datos

$v_0 = 3$ m/seg
$t = 35$ seg
$a = 0.5$ m/seg^2

Sol. 20.5 m/seg velocidad
411.25 m recorridos

Ecuación

$$v = v_0 + at$$

Resolución

$$v = 3 + 0.5(35)$$

$$v = 20.5 \text{ m/seg}$$

Ecuación

$$e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Resolución

$$e = 3(35) + \frac{1}{2}(0.5)(35)^2$$

$$e = 105 + 306.25 = 411.25 \text{ m}$$

B. El móvil parte del estado de reposo

Cuando el móvil parte del estado de reposo la velocidad inicial es nula y $\upsilon_0 = 0$ entonces la fórmula de la velocidad queda.

$\upsilon = \upsilon_0 + at$
con $\upsilon_0 = 0$

$$\boxed{v = at}$$ Fórmula de la velocidad cuando el móvil parte del reposo

Ejemplo:

63. Un proyectil inicia su movimiento con una aceleración de 8 metros por segundo, si su desplazamiento dura 12 segundos. Calcula la velocidad y el espacio recorrido.

Datos

$a = 8$ m/seg^2

$t = 12$ seg

Sol. 96 m/seg velocidad
48 m recorridos

Ecuación

$$v = at$$

Resolución

$$v = at$$

$$v = 8(12) = 96 \text{ m/seg}$$

Ecuación

$$e = \frac{1}{2}at$$

$$e = \frac{1}{2}(8)(12) = 48 \text{ m}$$

C. Aceleración negativa

Si la aceleración es negativa la velocidad disminuirá, entonces la fórmula de la velocidad media $v = v_0 - at$ queda

$v = v_0 - at$	Fórmula de la velocidad media cuando va disminuyendo

y la fórmula de la aceleración:

$e = v_0 - \frac{1}{2}at^2$	Fórmula del espacio recorrido cuando la velocidad va disminuyendo

Ejemplo:

64. Un automóvil se desplaza a una velocidad de 300 metros por segundo y se va deteniendo con una aceleración de 9.8 metros por segundo, si la duración del movimiento es de 12 segundos, calcula cuál es la velocidad y la distancia recorrida para detenerse.

Sol. 182 m/seg velocidad
2894.4 m recorridos

Datos

$$v_0 = 300 \text{ m/seg}$$

$$a = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

$$t = 12 \text{ seg}$$

Ecuación

$$v = v_0 - at$$

Resolución

$$v = 300 - 9.8(12)$$

$$v = 300 - 117.6 = 182 \text{ m/seg}$$

Ecuación

$$e = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

Resolución

$$e = 300(12) - \frac{1}{2}(9.8)(12)^2$$

$$e = 3\,600 - 705.6 = 2894.4 \text{ m}$$

H. Caída de un cuerpo desde una altura

En física se ha comprobado que la *caída* de los cuerpos desde una altura h desarrolla un movimiento *uniformemente acelerado.*

En el apartado anterior obtuvimos la fórmula del movimiento uniformemente variado cuando el móvil parte del reposo:

$$e = \frac{1}{2}at^2$$

Si designamos con la letra g a la aceleración debida a la gravedad de la tierra que es de:

$g = 9.8$ m/seg^2 y por razones prácticas se toma en:

$$g = 10 \text{ m/seg}^2$$

y si h representa la altura de caída recorrida durante un tiempo t segundos, tenemos:

$$v = gt$$
$$e = h = \frac{1}{2}gt^2$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad $v = gt$ queda

$$v^2 = g^2t^2$$

Pero como

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

despejando t^2

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

Si en la expresión $v^2 = g^2t^2$ sustituimos el valor de t^2, resulta $v^2 = g^2\frac{2h}{g}$

Simplificando

$$v^2 = 2gh$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Fórmula de la velocidad de un cuerpo generado desde una altura h

Con ella se calcula la velocidad en el punto de llegada cuando se conoce la altura h de la caída.

Ejemplo:

65. Un ladrillo cae desde una altura de 95 metros, calcula la velocidad con que llega al suelo.

Datos *Sol.* 43.59 m/seg

$g = 10$ m/seg^2

$h = 95$ m

Ecuación

$v = \sqrt{2gh}$

Resolución

$v = \sqrt{2(10)(95)}$

$v = \sqrt{1900}$

$v = 43.5889$ m/seg

I. Velocidad de objetos lanzados verticalmente

Se puede soltar verticalmente un ladrillo en un pozo, o también lanzarlo verticalmente hacia arriba.

En el primer caso (hacia abajo) la velocidad inicial es de v_0, a la cual se le irá añadiendo cada segundo la acción de la gravedad g, entonces las fórmulas del movimiento uniforme para calcular la velocidad y el espacio son:

$$v = v_0 + at$$

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

se sustituye g y h

$$v = v_0 + gt$$

Fórmula para calcular la velocidad hacia abajo

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} gt$$

Fórmula para calcular el espacio hacia abajo

En el segundo caso (hacia arriba) la gravedad actúa sobre el móvil que se aleja de la tierra *anulando* poco a poco su velocidad y deteniéndolo progresivamente hasta que la velocidad sea igual a cero; a partir de este instante el móvil cae hacia el suelo como un objeto abandonado a sí mismo.

En este caso el movimiento es *uniformemente retardado* y las fórmulas citadas anteriormente quedan:

$$v = v_0 - gt$$

Fórmula para calcular la velocidad hacia arriba

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Fórmula para calcular la altura hacia arriba

Al lanzar el objeto verticalmente hacia arriba, la duración del movimiento ascendente será el tiempo que anule la velocidad.

Si $v = v_0 - gt$

queda $0 = v_0 - gt$

despejando

$-v_0 = -gt$

$v_0 = gt$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Fórmula para calcular el tiempo de subida

Para calcular la altura h partimos de la fórmula que aplicamos para obtener la velocidad en el punto de llegada cuando se conoce la altura h.

$v = \sqrt{2gh}$

desarrollando

$v^2 = 2gh$

$h = \dfrac{v^2}{2g}$

haciendo $v = v_0$ queda

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Fórmula para calcular la altura h generada por la velocidad v_0

La *duración* de la caída es *igual* a la duración del movimiento *ascendente*.

Ejemplo:

66. En un pozo se echa un ladrillo con una velocidad inicial de 65 metros por segundo. Calcula la velocidad de caída al cabo de 3 segundos y el espacio recorrido.

Datos

$v_0 = 65$ m/seg

$g = 10$ m/seg^2

$t = 3$ seg

Sol. 95m/seg velocidad
240 m espacio

Ecuación

$v = v_0 + gt$

Resolución

$v = 65 + 10(3)$

$v = 95$ m/seg

Ecuación

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 65(3) + \frac{1}{2}(10)(3)^2$$

$$h = 195 + 45 = 240 \text{ m}$$

Resumen de las fórmulas del movimiento desarrolladas en los apartados de la F a la H

Movimiento uniforme

$$e = vt$$

$$v = \frac{e}{t}$$

$$t = \frac{e}{v}$$

Movimiento uniformemente variado

$v = v_0 + at$ uniformemente variado.

$v = v_0 + \frac{1}{2} at$ velocidad media en el movimiento uniformemente variado.

$e = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ espacio en el movimiento uniformemente variado.

$e = \frac{1}{2} at^2$ espacio en el movimiento uniformemente variado cuando el objeto parte del reposo.

$v = v_0 - at$ velocidad cuando el movimiento uniformemente variado va disminuyendo.

$e = v_0 - \frac{1}{2} at^2$ espacio cuando el movimiento uniformemente variado va disminuyendo.

Movimiento en la caída de un cuerpo desde una altura

$v = \sqrt{2gh}$ velocidad generada desde una altura h.

Movimiento de un cuerpo lanzado verticalmente

$v = v_0 + gt$ velocidad hacia abajo.

$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ espacio hacia abajo.

$v = v_0 - gt$ velocidad hacia arriba.

$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ altura hacia arriba.

$t = \frac{v_0}{g}$ tiempo de subida.

el tiempo de caída es igual a la duración del tiempo de ascenso.

I. Inversiones de dinero

Cuando se resuelven problemas sobre *inversiones de dinero,* generalmente se aplica la fórmula

$$i = crt$$

Donde:

- i es el interés o cantidad devengada de la inversión, es lo que se paga por usar un capital, si el interés producido es una inversión se agrega al capital, entonces se dice que el *interés es compuesto.* La cantidad que se obtiene al *sumar* el capital y el interés se llama *monto,* y así se forma un nuevo capital.
- c capital o cantidad de dinero invertido.
- r tasa de interés por unidad de tiempo, generalmente de un año, se expresa en porcentaje.
- t tiempo total en que permanece el capital invertido.

Periodo de capitalización. Es el intervalo de tiempo al final del cual se capitaliza el interés, o sea que los intereses se suman al capital.

Tasa nominal. Si el periodo de capitalización es diferente a la establecida para un año, se le llama tasa nominal.

El tanto por ciento del interés representa un número racional cuyo denominador es 100.

Ejemplos:

$$73\% = \frac{73}{100} = 0.73$$

$$125\% = \frac{125}{100} = 1.25$$

$$5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$4.5\% = \frac{\frac{9}{2}}{100} = 0.04\frac{1}{2}$$

Expresar matemáticamente las siguientes proposiciones:

67. El interés anual de \$ 2000.00 a 5% y \$ 700.00 a 3%

Sol. $0.05(2000) + 0.03(700)$

68. Un interés anual de \$ 300.00 a 3.5% más \$ 200.00 a 27%

Sol. $0.03\frac{1}{2}(300) + 0.27(200)$

69. Un interés anual de \$ 2000.00 a 7%, \$ 1000.00 a 2% y \$ c a 5%

Sol. $0.07(2000) + 0.02(1000) + 0.05c$

70. Un interés anual de \$ c a 6%, \$ $5c$ a 4%, y \$ $(e + 1500)$ a 5%

Sol. $0.06c + 0.04(5c) + 0.05(e + 1500)$

71. El capital prestado, si el interés anual producido por \$ 1300.00 a 3% y \$ c a 4% es \$ 345.00

Sol. $0.03(1300) + 0.04c = 345$

72. El capital prestado, si el interés anual producido por \$ c a 4% y \$ $(e + 3000)$ al 8% produce \$ 804.00

Sol. $0.04c + 0.08(e + 3000) = 804$

73. ¿Qué capital se depositó en un banco si \$ 700.00 a 4% y \$ c a 5% se obtuvo una ganancia de \$ 900.00?

Sol. \$ 17 440.00

Datos

$$0.04(700) + 0.05c = 900$$
$$28 + 0.05c = 900$$
$$0.05c = 900 - 28$$
$$0.05c = 872$$
$$c = \frac{872}{0.05}$$
$$c = 17\,440$$

Resolución

Un capital de \$ 17 440.00

Comprobación

$0.04(700) = 28.00$

$0.05(17\,440) = 872.00$

\$ 28.00 + \$ 872.00 = \$ 900.00

J. Compras y costo de servicios

Expresar matemáticamente las siguientes proposiciones.

74. x kg de azúcar a \$ 4.00 el kg y 7 kg de sal a \$ 1.40 el kg.

Sol. $4x + 7(1.40)$

75. x libros a \$ 35.00 cada uno y $(x - 5)$ libros a \$ 20.00 por texto.

Sol. $35x + 20(x - 5)$

76. $2x$ sombreros de \$ 75.00 cada uno y $(4x - 3)$ de sombreros de paja a \$ 25.00 por unidad.

Sol. $75(2x) + 25(4x - 3)$

77. n docenas de lápices a \$ 27.00 la docena y $(3n + 7)$ docenas de lápices a \$ 35.00 la docena.

Sol. $27n + 35(3n + 7)$

78. n litros de leche a \$ 4.50 el litro y $(3n + 2)$ litros de leche a \$ 5.75 el litro.

Sol. $4.50n + 5.75(3n + 2)$

79. El precio de entrada a un espectáculo es de $ 8.00 por niño y $ 20.00 los adultos, si el número total de asistentes fue de 617 y se recabaron $ 7 876.00 por boletos pagados. ¿Cuántos niños y adultos asistieron?

Sol. 372 niños, 245 adultos

Datos

x	niños asistentes
$8x$	pagaron niños
$20(617 - x)$	pagaron adultos

Ecuación

$$8x + 20(617 - x) = 7\,876$$
$$8x + 12\,340 - 20x = 7\,876$$
$$-12x = -12\,340 + 7\,876$$
$$x = \frac{4464}{12}$$
$$x = 372$$

Resolución

niños 372

adultos $617 - 372 = 245$

Comprobación

niños $8(372) = 2\,976$

adultos $20(245) = 4\,900$

$ 2 976.00 + $ 4 900.00 = 7 876.00

80. El precio de entrada a un baile fue de $ 10.00 por mujer y $ 15.00 por hombre. Si el total recaudado por las entradas fue de $ 975.00 y asistieron 5 mujeres más que hombres. ¿Cuántas personas de cada sexo asistieron?

Sol. 42 mujeres, 37 hombres

Datos

x	hombres
$x + 5$	mujeres

Ecuación

$$10(x + 5) + 15x = 975$$
$$10x + 50 + 15x = 975$$
$$25x = 975 - 50$$
$$25x = 925$$
$$x = \frac{925}{25}$$
$$x = 37$$

Resolución

hombres 37

mujeres 42

Comprobación

$37(15) = 555$

$42(10) = 420$

$\$\ 555.00 + \$\ 420.00 = \$\ 975.00$

81. En un festival para niños se cobraron \$ 5.00 por niño y \$ 10.00 por adulto, si el total de dinero recaudado por boleto pagado es de \$ 1700.00 y asistieron el triple de niños que de adultos. ¿Cuántos niños y adultos pagaron?

Datos *Sol.* 204 niños, 68 adultos

x adultos

$3x$ niños

Ecuación

$$\begin{aligned} 5(3x) + 10x &= 1700 \\ 15x + 10x &= 1700 \\ 25x &= 1700 \\ x &= 68 \end{aligned}$$

Resolución

adultos 68

niños $3(68) = 204$

Comprobación

$10(68) = 680$

$5(204) = 1020$

$\$\ 1020.00 + \$\ 680.00 = \$\ 1700.00$

82. Se pagaron \$ 101.00 por x kg de maíz a \$ 1.90 kg y $(50 - x)$ kg de maíz a \$ 2.20; ¿cuántos kilos de maíz de diferente precio se compraron?

Datos *Sol.* 30 kg de \$ 1.90, 20 kg de \$ 2.20

x kg de 1.90

$(50 - x)$ kg de 2.20

Ecuación

Observe que no se ha puesto el punto decimal para facilitar las operaciones con centavos.

$$\begin{aligned} 190x + 220(50 - x) &= 10\ 100 \\ 190x + 11\ 000 - 220x &= 10\ 100 \\ 190\,x - 220x &= 10\ 100 - 11\ 000 \\ -30x &= -900 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Resolución

30 kg de $1.90

(50 − 30) = 20 kg de $ 2.20

Comprobación

30(1.90) = 57.00

20(2.20) = 44.00

$ 57.00 + $ 44.00 = $ 101.00

83. Se compraron 30 bolígrafos a $0.45 centavos cada uno y x bolígrafos a $ 1.15, si el costo de la compra fue de $ 99.75, ¿cuántos bolígrafos de $1.15 se recibieron?

Sol. 75 bolígrafos

Datos

x bolígrafos

Ecuación

$$30(45) + 115x = 9\,975$$
$$1350 + 115x = 9\,975$$
$$115x = 9\,975 - 1350$$
$$x = \frac{8\,625}{115}$$
$$x = 75$$

Solución

75 bolígrafos

Comprobación

0.45(30) = 13.50

1.15(75) = 86.25

$ 13.50 + $ 86.25 = $ 99.75

84. Si el costo de x lápices es de $ 0.35 centavos cada uno y ($3x - 2$) lápices de $ 1.20 por pieza es $ 56.85, ¿cuántos lápices de cada pieza se compraron?

Sol. 15 lápices de $ 0.35
43 lápices de $ 1.20

Datos

x lápices

Ecuación

$$35x + 120(3x - 2) = 5\,685$$
$$35x + 360x - 240 = 5\,685$$
$$395x = 5\,685 + 240$$
$$395x = 5\,925$$
$$x = \frac{5\,925}{395}$$
$$x = 15$$

Resolución

15 lápices de \$ 0.35

$(3x - 2) = 45 - 2 = 43$ lápices de \$ 1.20

Comprobación

$15(0.35) = 5.25$

$43(1.20) = 51.60$

$\$\,5.25 + \$\,51.60 = \$\,56.85$

85. Si el precio de 12 cuadernos, 16 bolígrafos es de \$ 128.00; 8 cuadernos y 4 bolígrafos cuestan \$ 42.00. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Sol. \$ 2.00 cada cuaderno
\$ 6.50 cada bolígrafo

Datos

c precio de un cuaderno

b precio de un bolígrafo

Ecuación

$$\begin{aligned} 12c + 16b &= 128 \quad (1) \\ 8c + 4b &= 42 \quad (2) \end{aligned}$$

multiplicando (2) por -4

$$\begin{aligned} 12c + 16b &= 128 \\ -32c - 16b &= -168 \\ \hline -20c \quad &= -40 \end{aligned}$$

$$c = \frac{40}{20}$$

$$c = 2$$

Sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} 12c + 16b &= 128 \\ 24 + 16b &= 128 \\ 16b &= 128 - 24 \\ b &= \frac{104}{16} \\ b &= 6.5 \end{aligned}$$

Resolución

Un cuaderno \$ 2.00

Un bolígrafo \$ 6.50

Comprobación

Cuadernos $12\,(2) = \$\,24.00$

Bolígrafos $16\,(6.50) = \$\,104.00$

$\$\,24.00 + \$\,104.00 = \$\,128.00$

86. Si 6 corbatas y 10 gorras cuestan \$ 130.00; 4 corbatas y 12 gorras comprándolas al menudeo son \$ 2.00 más caras que el anterior y se pagaron \$ 156.00. ¿Cuál es el precio de cada prenda?

Sol. \$ 10.00 cada corbata
\$ 7.00 cada gorra

Datos

c precio de una corbata

g precio de una gorra

Ecuación

$$6c + 10g = 130 \qquad (1)$$
$$4(c + 2) + 12(g + 2) = 156 \qquad (2)$$

operaciones en (2)

$$4c + 8 + 12g + 24 = 156$$
$$4c + 12g + 32 = 156$$
$$4c + 12g = 156 - 32$$
$$4c + 12g = 124 \qquad (3)$$

Sistema con (1) y (3)

$$6c + 10g = 130 \qquad (1)$$
$$4c + 12g = 124 \qquad (3)$$

Por adición y sustracción multiplicamos (1) por 2 y (3) por (−3)

$$12c + 20g = 260$$
$$-12c - 36g = -372$$
$$-16g = -112$$
$$g = \frac{112}{16}$$
$$g = 7$$

Sustituimos en (1)

$$6c + 10(7) = 130$$
$$6c = 130 - 70$$
$$c = \frac{60}{6}$$
$$c = 10$$

Resolución

gorra a \$ 7.00

corbata a \$ 10.00

Comprobación

6(10) = \$ 60.00

10(7) = \$ 70.00

\$ 60.00 + \$ 70.00 = \$ 130.00

al menudeo:

4(10 + 2) + 12(7 + 2) = \$ 48.00 + \$ 108.00 = \$ 156.00

K. Mezclas

Todos los problemas de mezclas se resuelven en forma semejante, de manera que *la suma* de los precios y las unidades de peso de los *ingredientes originales* deben ser *equivalentes* al precio o al peso de la mezcla final.

Ejemplos:

87. ¿Cuántos kilos de dulce barato de \$ 70.00 el kilo se deben mezclar con 160 kilos de dulce de otra mejor calidad, del mismo tipo de dulce, a \$ 180.00 el kilo, para obtener una mezcla de \$ 110.00 el kilo?

Sol. 280 kg de dulce barato

Datos

x	número de kilos dulce barato
160	número de kilos dulce caro
$70x$	valor dulce barato
180(160)	valor dulce caro
$110(160 + x)$	valor mezcla

Ecuación

Valor del dulce barato más el valor del dulce caro es igual al valor de mezcla.

$$70x + 180(160) = 110(160 + x)$$
$$70x + 28\,800 = 17\,600 + 110x$$
$$70x - 110x = 17\,600 - 28\,800$$
$$-40x = -11\,200$$
$$x = 280 \text{ kg}$$

Resolución

280 kilos dulce barato

Demostración

280 kilos a \$ 70.00 es igual a \$ 19 600.00

160 kilos a \$ 180.00 es igual a \$ 28 800.00

440 kilos se venden a \$ 110.00 el kilo = \$ 48 400.00

\$ 19 600.00 + \$ 28 800.00 = \$ 48 400.00

88. Un comerciante decide mezclar avena de \$ 2.40 con 60 kilos de germen de trigo de \$ 3.00 kilo y vender la mezcla en \$ 2.76 el kilogramo, ¿cuántos kilos de avena deberá poner?

Sol. 40 kg de avena

Datos

x	número de kilos de avena
$60 + x$	número de kilos resultan de la mezcla
$240x$	precio de la avena en centavos
300(60)	precio del germen de trigo en centavos
$276(60 + x)$	precio de la mezcla (por el precio de la mezcla de \$ 2.76 es necesario expresar los precios en centavos)

Ecuación

El precio de la avena más el precio del germen de trigo es igual al precio de la mezcla

$$\begin{aligned} 240x + 300(60) &= 276(60 + x) \\ 240x - 276x &= 16\,560 - 18\,000 \\ -36x &= -1440 \\ x &= \frac{1440}{36} \\ x &= 40 \text{ kg} \end{aligned}$$

Comprobación

40 kilos a \$ 2.40 es igual a \$ 96.00

60 kilos a \$ 3.00 es igual a \$ 180.00

60 + 40 = 100 kilos a \$ 2.76 cada kilo, es igual a \$ 276.00

\$ 96.00 + \$ 180.00 = \$ 276.00

89. ¿Cuántos litros de insecticida a 25% se deben mezclar con 10 litros de otro insecticida a 15% para producir un tercero de 17%?

Sol. 2.5 litros

Datos

x	número de litros de insecticida al 25% que deben emplearse
$x + 10$	número total de litros de insecticida
$0.25x$	número de litros del insecticida al 25%
$0.15(10)$	número de litros de insecticida al 15%
$0.17(x + 10)$	es igual a $0.17x + 1.7$ número de litros del insecticida nuevo

Ecuación

Insecticida a 25% más insecticida al 15% es igual a número de litros del insecticida nuevo

$$\begin{aligned} 0.25x + 1.5 &= 0.17x + 1.7 \\ 0.25x - 0.17x &= 1.7 - 1.5 \\ 0.08x &= 0.2 \\ x &= \frac{0.2}{0.08} \\ x &= 2.5 \end{aligned}$$

Resolución

2.5 litros

Comprobación

$$\begin{aligned} 0.25(2.5) + 1.5 &= 0.17(2.5) + 1.7 \\ 2.125 &= 2.125 \end{aligned}$$

90. Una mezcla de dos cereales cuesta \$ 36.00, uno de los componentes tiene un precio de \$ 2.40 el kg y el otro \$ 3.60 kg; si el costo de cada grano se incrementa en \$ 0.60 el kg, el producto es de \$ 42.60, ¿cuántos kilos de cereales se han usado?

Sol. 3 kg de cereal de \$ 2.40
8 kg de cereal de \$ 3.60

Datos

x kg cereal de \$ 2.40

y kg cereal de \$ 3.60

$2.40 + 0.60 = 3.00$ cereal x con precio incrementado

$3.60 + 0.60 = 4.20$ cereal y con precio incrementado

Ecuación

$$24x + 36y = 360 \qquad (1)$$
$$30x + 42y = 426 \qquad (2)$$

Por igualación

$$x = \frac{360 - 36y}{24} \qquad (3)$$

$$x = \frac{426 - 42y}{30} \qquad (4)$$

con (3) y (4)

$$\frac{360 - 36y}{24} = \frac{426 - 42y}{30}$$
$$30(360 - 36y) = 24(426 - 42y)$$
$$10\,800 - 1080y = 10\,224 - 1008y$$
$$-1080y + 1008y = 10\,224 - 10\,800$$
$$-72y = -576$$
$$y = 8$$

Sustituyendo en (3)

$$x = \frac{360-36(8)}{24}$$
$$x = \frac{72}{24}$$
$$x = 3$$

Solución

3 kg de cereal de \$ 2.40 el kg

8 kg de cereal de \$ 3.60 el kg

Comprobación

$3(2.40) = \$\ 7.20$

$8(3.60) = \$\ 28.80$

$\$\ 7.20 + \$\ 28.80 = \$\ 36.00$

con precio incrementado

3(3.00) = \$ 9.00

8(4.20) = \$ 33.60

9.00 + \$ 33.60 = \$ 42.60

91. Una mezcla de 32 litros de insecticida y agua contiene 25% de insecticida; ¿cuántos litros de insecticida deben agregarse para obtener un producto que contenga 50% de insecticida?

Sol. 16 litros de insecticida

Datos

x	número de litros de insecticida que deben agregarse
$32 + x$	número de litros de la nueva mezcla
$25\% = \frac{1}{4}$; $50\% = \frac{1}{2}$	tanto por ciento expresado como números racionales
$\frac{1}{4}(32) = 8$	en la mezcla original hay 8 litros de insecticida
$8 + x$	número de litros de insecticida en la nueva mezcla

Ecuación

$$8 + x = \frac{1}{2}(32 + x)$$

$$16 + 2x = 32 + x$$

$$x = 16 \text{ litros}$$

Solución

Debe agregarse 16 litros de insecticida

Comprobación

Volumen de la nueva mezcla: 32 + 16 = 48 litros, contenido de insecticida en la nueva mezcla 8 + 16 = 24 litros que son 50% de 48 litros.

EJERCICIO 20

Escribir en la parte correspondiente la expresión algebraica de las siguientes proposiciones.

1. Un número que disminuido en 5 es igual a 30.

   Sol. $x - 5 = 30$

2. ¿Cuánto hay que pagar por x artículos si cada uno de ellos cuesta \$ 3.00?

   Sol. $3x$

3. El costo de un artículo, si 5 de ellos se pueden comprar en \$ 13.00.

   Sol. $\frac{5x}{13}$

4. El costo de un artículo si 15 de ellos cuestan \$ 15.00.

   Sol. $\frac{x}{15}$

5. Si una manguera llena un tinaco en 8 horas, ¿cuánto llenará en 3 horas?

Sol. $\frac{3}{8}$

6. Un número x cuya tercera parte incrementada en 5 es igual a 9.

Sol. $\frac{x}{3} + 5 = 9$

7. Un número n que sumado siete veces al número 12 es igual en once veces al mismo número menos 4.

Sol. $7n + 12 = 11n - 4$

8. Un número n cuyas tres quintas partes es igual a 15.

Sol. $\frac{3n}{5} = 15$

9. Expresar tres números impares consecutivos.

Datos

$(2n + 1)$	primer número
$(2n + 1) + 2$	segundo número
$[(2n + 1) + 2] + 2$	tercer número

Sol. $(2n + 1), (2n + 1) + 2,$
$[(2n + 1) + 2] + 2$

10. Expresar tres números pares consecutivos.

Datos

$2n$	primer número
$2n + 2$	segundo número
$2n + 4$	tercer número

Sol. $2n, 2n + 2, 2n + 4$

11. La edad de una señora dentro de 6 años, si hace 12 tenía 30 años.

Sol. $(30 + 12) + 6$

12. La edad que tendrá un señor al cabo de n años si hace 7 tenía 35 años.

Sol. $(35 + 7) + n = 42 + n$

13. ¿Qué edad tenía una persona hace 3 años si dentro de n años tendrá 25?

Sol. $(25 - n) - 3 = 22 - n$

14. La edad de Manuel es el doble de la de su hermano y ambas edades suman 45 años.

Sol. $n + 2n = 45$

15. La edad que tendrá Pedro dentro de x años si hace 7 años tenía 40.

Sol. $(40 + 7) + x$

Resuelve los siguientes problemas.

16. ¿Cuál es la suma de tres números enteros pares consecutivos?

Sol. $6n + 6$

17. Expresar la ecuación de la suma que relaciona tres números enteros impares consecutivos cuya suma es 39, ¿cuál es el valor de n y cuáles son los números?

Sol. $(2n + 1) + (2n + 1 + 2) + (2n + 1) + 4 = 39;$
$n = 5;\ 11,\ 13,\ 15$

18. Transcurridos 6 años, la edad de un padre será dos veces que la de su hijo y hace 3 años la edad del padre era tres veces mayor que la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sol. 30 y 12 años

19. Un alumno pagó \$ 82.00 por dos libros, uno de física y el otro de matemáticas, ¿cuál es el precio de cada libro si el de matemáticas costó \$ 24.00 más que el de física?

Sol. \$ 53.00, \$ 29.00

20. Un móvil se desplaza a una velocidad media de 40 km/h, 4 horas después de iniciado su movimiento parte otro a 60 km/h tratando de alcanzarlo, calcular el tiempo que transcurre para darle alcance y la distancia que recorre para lograrlo.

Sol. 8 horas, 480 km

21. ¿Qué capital se depositó en un banco si el interés producido por \$ c a 3% y \$ $(c - 400)$ a 7% produjo una ganancia de \$ 9700.00?

Sol. \$ 97 280.00

22. Dos personas reúnen \$ 112.00 para una compra. Si la primera aporta 3 veces lo que aporta la segunda, ¿cuánto puso cada una?

Sol. \$ 84.00, \$ 28.00

23. Obtener tres números cuya suma sea 27, tales que el segundo número sea el triple del primero y el tercero la mitad del primero.

Sol. 6, 18, 3

24. Dos ciclistas, A y B, parten desde un mismo punto en la dirección opuesta, la velocidad de A es 18 km/h y la de B 15 km/h, ¿qué tiempo transcurrió desde su partida hasta que la separación entre ambos fue de 99 km?

Sol. 3 horas

25. Desde un punto de partida un caminante se mueve a 6 km/h, desde el mismo lugar y transcurridos 30 minutos parte un corredor a 10 km/h, ¿en qué tiempo alcanza el corredor al caminante?

Sol. 0.75 hora

26. Dos campesinos reúnen \$ 1950.00 para comprar una bomba de agua, si el primero pone cinco veces más que el segundo, ¿cuánto puso cada uno?

Sol. \$ 1 625.00, \$ 325.00

27. Dentro de 10 años la edad de Juan será la mitad que tenga su mamá; actualmente sus edades respectivas suman 43 años, ¿qué edad tiene cada uno?

Sol. 11, 32 años

28. Un maestro artesano puede hacer una obra en 5 días y su ayudante en 7 días. Calcular el tiempo en que pueden hacer la obra trabajando los dos juntos.

Sol. $2\frac{11}{12}$ días

29. Un tinaco de agua puede llenarse en 3 horas con una llave y con otra en 5, ¿en cuanto tiempo lo llenarán las dos llaves juntas?

Sol. $\frac{15}{8}$ de hora

30. Dos caminantes parten de un mismo punto en dirección opuesta, uno se mueve a 5 km/h y el otro a 6 km; ¿qué tiempo transcurre para que la distancia entre ellos sea de 30 km?

Sol. $2\frac{8}{11}$ de hora

31. Calcular el capital que se depositó en un banco cuyo interés anual por $700.00 a $3\frac{1}{2}$ y c a 5% produjo un interés de $ 1500.00

Sol. $ 29 510.00

32. Juan tiene $ 15.00 más que Pedro y entre ambos tienen $ 101.00, ¿cuántos pesos tiene cada uno?

Sol. $ 58.00, $ 43.00

33. Dos motociclistas parten en el mismo instante desde dos puntos separados por 500 km y se dirigen a su encuentro, la velocidad de uno de ellos es de 50 km/h y la del otro 30 km/h, calcular el tiempo que transcurre hasta su cruce.

Sol. 6.25 horas

34. Si los lados de un triángulo están representados por tres enteros consecutivos y su perímetro es de 39 cm, ¿cuánto mide cada lado?

Sol. 12, 13, 14

35. Dos ciclistas parten al mismo tiempo desde un punto de salida en direcciones opuestas; la velocidad de uno de ellos es de 800 m/h más que la del otro; al cabo de dos horas la distancia que los separa es de 25 000 metros, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

Sol. 5 850 m/h, 6 650 m/h

36. El lado de un rectángulo es de 6 m más largo y 2 m menos ancho que un cuadrado de la misma área, calcular el lado del cuadrado y las dimensiones del rectángulo.

Sol. lado del cuadrado 3m; del rectángulo largo 9m, ancho 1m

37. Un depósito de petróleo crudo puede llenarse por un tubo en 7 horas y por otro en 21 horas y vaciarse por otro tubo de consumo en 14 horas, ¿en qué tiempo se llenará con los tres tubos abiertos?

Sol. $\frac{42}{5}$ horas

38. Un ciclista viaja de la ciudad A a la B y regresa inmediatamente a la primera, cubriendo el viaje de ida y vuelta en un tiempo de 12 horas; calcular la distancia entre ambas ciudades y el tiempo transcurrido en cada uno de los viajes, si el de ida se hizo a una velocidad de 20 km/h y el de regreso a 30 km/h.

Sol. 144 km, 7.2 horas, 4.8 horas

CAPÍTULO 15

Números complejos

1 Números imaginarios

Al resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se obtiene

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

En forma análoga, se obtienen números como $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-156}$, ...: en general se tiene $\sqrt{-b}$ en donde $b > 0$, pero resulta que el cuadrado de un número real *no puede ser negativo,* por tanto, el resultado de $\sqrt{-1}$ no es ni $+1$ ni -1, ya que

$$(+1)^2 = 1$$

$$(-1)^2 = 1$$

A la expresión $\sqrt{-1}$ se le representa con la letra i, a la cual se le llama *unidad imaginaria.*

Se tiene:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 i = (-1)(i) = -i$$

Las potencias sucesivas de i son los valores i, -1, $-i$, 1, los cuales se *repiten* precisamente en ese orden.

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 i = (1)i = i$$

Empleando la letra i en forma señalada, se aplica como se indica a continuación:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9}\ \sqrt{-1} = 3i$$
$$\sqrt{-2} = \sqrt{(2)(-1)} = \sqrt{2}\ \sqrt{-1} = i\sqrt{2}$$

De donde, tenemos que la raíz cuadrada de un número negativo puede *expresarse* como producto de un *número real por i.*

2 Número complejo

Un número del tipo $a + bi$, en donde a y b son reales, se llama *número complejo*.

Ejemplo:

$2 - 5i$

El número a se llama *parte real* y bi se llama *parte imaginaria*.

Si $b = 0$ el número complejo se reduce a un *número real*; el ejemplo quedaría únicamente con el 2.

Si $a = 0$ el número complejo se reduce a un número que se llama *imaginario puro*; el ejemplo quedaría únicamente con $-5i$,

En consecuencia, aceptamos que $2 - 5i$, 2, $-5i$ son números complejos.

Conclusión: El campo de los números complejos incluye a los números imaginarios puros y a los números reales.

3 Números complejos conjugados

Dos números complejos son *conjugados* uno de otro si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias difieren sólo en signo; este concepto lo aplicaremos en la división de números complejos.

Ejemplo:

$a + bi$ y $a - bi$ son números complejos conjugados.

4 Números complejos iguales

Dos números complejos son iguales sólo si sus partes *reales son iguales* y sus partes *imaginarias también lo son*.

Ejemplo:

$a + bi = c + di$
si $a = c$ y $b = d$

5 Las cuatro operaciones fundamentales con números complejos

Las reglas comunes para la adición, sustracción, multiplicación y división de los números reales se aplican a los números complejos: sin embargo, al efectuar las operaciones es necesario expresar previamente el número complejo en la forma $a + bi$, llamada *forma rectangular;* este nombre proviene de la forma de representar estos números en coordenadas rectangulares en el plano complejo.

Las *excepciones* respecto a los números reales que deben considerarse al efectuar las operaciones con los números complejos son:

1. La cantidad i se maneja como una *literal cualquiera*, pero al final de la operación, cuando se obtenga i^2, se *reemplaza* por su valor -1.
2. La regla para multiplicar dos radicales de igual índice que se aplica a los números reales *no es aplicable* a los imaginarios.

Ejemplo:

En los números reales $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
En los números imaginarios debe ser

$$\sqrt{-3}\ \ \sqrt{-5} = i\sqrt{3}\ \cdot\ i\sqrt{5} = i^2\ \sqrt{15} = -1\sqrt{15} = -\sqrt{15}$$

Cómo escribir un número complejo en su forma cuadrática $a + bi$.

Ejemplo:

$$3 + \sqrt{-9} = 3 + \sqrt{9(-1)} = 3 + \sqrt{9}\ \sqrt{-1} = 3 + 3i$$

5.1 Adición

Ejemplo:

$$(3 + 5i) + (-8 - 6i) = 3 + 5i - 8 - 6i = -5 - i$$

5.2 Sustracción

Ejemplo:

$$(5 + 4i) - (3 - 6i) = 5 + 4i - 3 + 6i = 2 + 10i$$

5.3 Multiplicación

Ejemplo:

$$(2 + 3i)(3 - 4i) = 6 + i - 12i^2 = 18 + i$$

5.4 División

Aplicamos el *conjugado* del denominador para obtener un número real en el denominador del resultado.

Ejemplo:

$$\frac{2+4i}{3-2i} = \frac{(2+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+16i+8i^2}{9-4i^2} = \frac{-2+16i}{13}$$

6 Representación gráfica de los números complejos

Un número complejo se puede representar en dos formas: *rectangular y polar.*

6.1 Forma rectangular

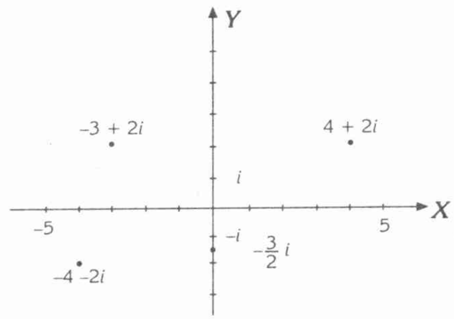
Un número en la forma $a + bi$ se representa por un punto cuyas coordenadas son (a, b).

Cuando se usa un plano con coordenadas rectangulares para representar estos números, el eje XX', se denomina *eje real;* el eje YY', *eje imaginario puro,* y al plano se le denomina plano *complejo.*

Ejemplo:

Representar los siguientes números en el plano complejo.

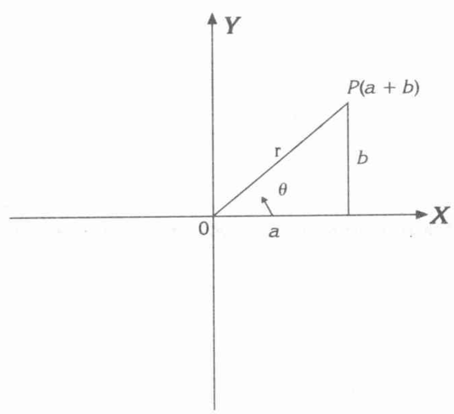
$$-3+2i, \quad 4+2i, \quad -4-2i, \quad \frac{-3}{2}\,i, \quad -5, \quad 5, \quad i, \quad -i$$



Los puntos sobre los ejes representan números *complejos especiales;* los que quedan sobre el eje XX' corresponden a números *reales* porque las ordenadas de estos puntos son nulas; los que quedan sobre el eje YY' tienen abscisas nulas, en consecuencia, corresponden a números *imaginarios puros.*

6.2 Forma polar

El punto P correspondiente al número $a + bi$ tiene las coordenadas (a, b), para expresarlo en su forma polar o trigonométrica usamos el *ángulo* y la *hipotenusa.*



- r es la distancia del origen a P y se llama *módulo o valor absoluto* del número complejo: siempre es una cantidad positiva para cualquier punto diferente del origen.
- θ el ángulo θ se llama *amplitud o argumento* y a menos que se especifique lo contrario quedará restringido al dominio: $0°\quad \theta < 360°$.

Con relación al diagrama tenemos las relaciones:

Por el teorema de Pitágoras.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Además:

Sen $\theta = \frac{b}{r}$, de donde $b = r$ sen θ; $\cos\theta = \frac{a}{r}$, de donde $a = r\cos\theta$;

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

Sustituimos los valores en forma rectangular $a + bi$

$a + bi = r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta i$; $a + bi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

La expresión $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ se llama forma *polar o trigonométrica,* y su aplicación resulta de gran utilidad.

7 Módulo de un número complejo (valor absoluto)

El *módulo* del número complejo $a + bi$ es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo:

Calcular el módulo de $4 - 3i$

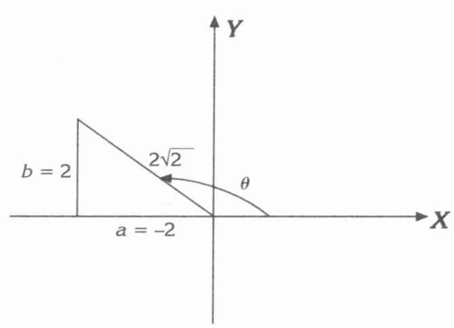
$|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$; de donde, $|4 - 3i| = 5$

8 Cambiar de la forma rectangular a la forma polar y viceversa

Antes de dar solución al problema conviene representarlo *gráficamente*, pues esto nos ayuda a ratificar el resultado.

Ejemplo:

Obtener la forma polar del número complejo $-2 + 2i$



$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$ (es el módulo)

$\tan\theta = \dfrac{2}{-2} = -1$

θ es un ángulo en el segundo cuadrante.

$\tan -1 = 135°$
ang $\tan -1 = \theta$
$\theta = 135°$

Sustituimos los valores en la forma polar.

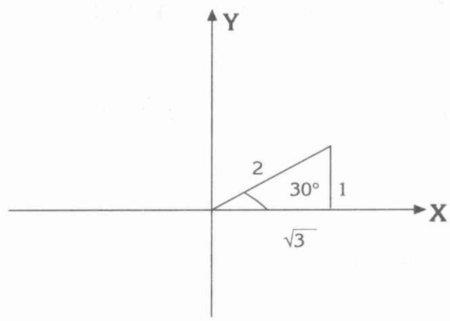
$r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$

Solución:

$2\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

Ejemplo:

Obtener la forma rectangular del número complejo:



$2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

como: $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\, 30° = \dfrac{1}{2}$

Sustituyendo

$2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$ resultado en su forma rectangular.

EJERCICIO 21

Escribir en su forma cuadrática cada uno de los siguientes números complejos.

1. $5+\sqrt{-4}$
2. $4-\sqrt{-9}$
3. $7+\sqrt{-3}$
4. $1-\sqrt{-25}$
5. $-7\sqrt{-4}$
6. $-\sqrt{-32}$
7. $4-\sqrt{-49}$
8. $-\sqrt{-81}$

9. $\sqrt{-36}$

10. $\sqrt{-25}$

Resuelve las siguientes operaciones:

11. $(2 + 3i) + (4 + 3i) =$
12. $(5 - 2i) + (1 - 2i) =$
13. $(5 - 4i) + (3 + i) =$
14. $(3 + i) - (1 + 4i) =$
15. $(4 + 5i) - (2 - i) =$
16. $(8 - 3i) - (-5 + 2i) =$
17. $(2 + 5i) - (5 + 4i) + (-2 + 8i) =$
18. $(5 - 4i) - (7 - i) + (2 - 2i) =$
19. $(2 + i)(1 - 2i)(3 + i) =$
20. $(3 + 5i)(5 + 2i) =$
21. $(3 - 5i)(4 + 7i) =$
22. $(8 - 3i)(7 + 4i) =$
23. $(4 - 2i)(2 + i)(1 - i) =$
24. $(3 + 3i)^2 =$
25. $(5 - i)^2 =$
26. $4(2 + 5i)^2 =$
27. $(3 - 2i)^3 =$
28. $\frac{2-i}{3+4i} =$
29. $\frac{1+4i}{2-3i} =$
30. $\frac{4-i^2}{i-2} =$
31. $\frac{(2+2i)(1-3i)}{2+i} =$

Representa gráficamente cada número complejo y escribe la forma polar correspondiente.

32. $1 + i =$
33. $1 + 3i =$
34. $2i =$
35. $2 + 2i =$

Representa gráficamente y escribe en su forma rectangular los siguientes números complejos.

36. $4(\cos 45^{\circ} + i \operatorname{sen} 45^{\circ}) =$
37. $\sqrt{2}(\cos 30^{\circ} + i \operatorname{sen} 30^{\circ}) =$

38. $8\,(\cos 45° + i \text{ sen } 45°) =$

39. $16\,(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) =$

40. $5\,(\cos 45° + i \text{ sen } 45°) =$

Resuelve las siguientes operaciones.

41. $3(2 - i) + 2(3 + 6i) =$ *Sol.* $12 + 9i$

42. $(3\sqrt{2} + 5i) - (4\sqrt{2} - i) =$ *Sol.* $-\sqrt{2} + 6i$

43. $4i + 2(3 - 2i) - i(1 - i) =$ *Sol.* $5 - i$

44. $(1 + i)^3 =$ *Sol.* $-2 + 2i$

45. $i(2 - 3i)^2 =$ *Sol.* $12 - 5i$

46. $\dfrac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}} =$ *Sol.* $\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{1}{2}i$

47. $\dfrac{(1 - i)^2}{1 + i} =$ *Sol.* $-1 - i$

48. $\dfrac{4}{1 + i} - \dfrac{2}{1 - i} =$ *Sol.* $1 - 3i$

49. $(4 + \sqrt{3}i)^2 =$ *Sol.* $13 + 8\sqrt{3}i$

50. $(1 + i)^3 =$ *Sol.* $-2 + 2i$

51. $i(2 - 3i)^2 =$ *Sol.* $12 - 5i$

CAPÍTULO 16

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación con una incógnita es de *segundo grado* si después de efectuar las operaciones indicadas, de pasar al primer miembro todos los términos y de hacer las reducciones posibles, resulta que el mayor exponente de la incógnita es dos.

La forma general de la ecuación de segundo grado o cuadrática es:

$ax^2 + bx + c = 0$ en donde a, b, c, representan cualquier número real.

ax^2	es el término de segundo grado con respecto a x.
bx	es el término de primer grado con respecto a x.
c	es el término independiente.

Como el mayor exponente de esta *ecuación es dos, su solución o raíces también son dos.*

1 Resolución de las ecuaciones de segundo grado

En toda ecuación de segundo grado debe figurar necesariamente *el término de segundo grado* con respecto a x, pero puede faltar el término de *primer* grado o el término *independiente,* si éste es el caso se le llama ecuación incompleta de segundo grado y son:

$$ax^2 + bx = 0; \quad ax^2 + c = 0$$

Ejemplos:

$$5x^2 - 6x = 0$$
$$x^2 - 9 = 0$$

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ se resuelven descomponiendo en factores su primer miembro.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - 3x = 0$

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$

Obtenemos un producto de dos factores cuyo resultado es cero; para que este resultado sea cierto es suficiente que cualquiera de los factores sea igual a cero. Hay dos maneras de lograrlo:

que $x = 0$ o bien,
que $(x - 3) = 0$

de donde,

$$x_1 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x_2 = 3$$

las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

En todos los casos las ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$ tienen dos soluciones, una de las cuales siempre es *cero.*

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ se resuelven despejando el valor de la incógnita.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -5$$

En todos los casos las ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$ tienen dos soluciones que corresponden a números *simétricos.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación $4x^2 + 9 = 0$.

$$4x^2 + 9 = 0$$
$$4x^2 = -9$$
$$x^2 = -\frac{9}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}} = \pm i\frac{3}{2} = \pm\frac{3i}{2}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{3i}{2}$$
$$x_2 = -\frac{3i}{2}$$

2

Solución por factorización de las ecuaciones de segundo grado

Si el primer miembro de una ecuación de segundo grado completa es factorizable, las raíces pueden encontrarse, a partir de los factores, *igualando a cero cada factor.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$

Factorizamos

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

Igualamos a cero cada factor.

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x - 2 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación: Si el resultado está bien las raíces anulan la ecuación.

$x^2 - x - 2 = 0$

Con $x = -1$	Con $x = 2$
$(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$	$(2)^2 - 2 - 2 = 0$
$1 + 1 - 2 = 0$	$4 - 2 - 2 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

3

Resolución de ecuaciones de segundo grado completando el cuadrado

Para la solución de ecuaciones de segundo grado debe recurrirse a la *factorización,* si ésta puede realizarse con facilidad.

En el método llamado *completar el cuadrado* se suma un término al binomio de la forma $x^2 + bx$ para formar un trinomio cuadrado perfecto; el término que ha de sumarse es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

La unidad debe quedar como coeficiente del término de segundo grado con respecto a x.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $5x - 2 = -3x^2$

Transponiendo, el término independiente siempre debe quedar en el segundo miembro.

$$3x^2 + 5x = 2$$

Dividimos cada término *entre el coeficiente* de x^2, con lo cual el coeficiente de x^2 es la unidad.

$$x^2 + \frac{5x}{3} = \frac{2}{3}$$

Sumamos a cada miembro el *cuadrado de la mitad del coeficiente de x*, en este caso $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$, lo que hace al primer miembro cuadrado perfecto.

$$x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{25}{36} = \frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

Sacamos la raíz cuadrada de ambos miembros y usamos el doble signo en el segundo miembro.

$$x + \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{49}{36}}$$

$$x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{1}{3}; \qquad x_2 = -\frac{5}{6} - \frac{7}{6} = -2$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -2$$

4

Resolución de las ecuaciones de segundo grado con la fórmula general

Usaremos el método de *completar el cuadrado* para obtener la fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Transponemos c

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos cada término entre el coeficiente de x^2

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Sumamos a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, que es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Porque el primer miembro es cuadrado perfecto.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacamos raíz cuadrada a ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desarrollando obtenemos la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Resolver con la fórmula general, la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$; el *valor* de los coeficientes literales es: $a = 3$; $b = 5$; $c = -2$

Sustituyendo en la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -2$$

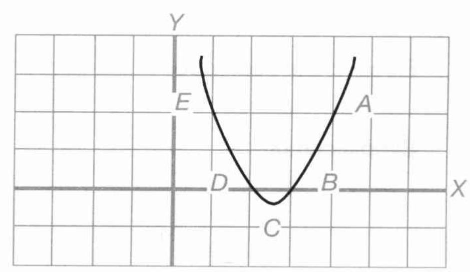
5 Gráfica de una ecuación de segundo grado

La representación gráfica de toda ecuación de *primer grado es una recta;* **la de una ecuación de** *segundo grado* **no siempre es la misma, sin embargo,** *todas pertenecen a la familia de las secciones cónicas.*

Ejemplo:

Representar y resolver gráficamente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. El primer miembro de esta ecuación es una función de segundo grado de x; hacemos la función igual a y y asignamos valores a x para obtener los de y.

x	4	3	$2\frac{1}{2}$	2	1
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2
Puntos	A	B	C	D	E



Esta curva se llama parábola.

Las abscisas de los puntos en que la curva corte al eje XX' son las raíces de la ecuación; en este caso la curva corta al eje XX' en dos puntos cuyas abscisas son 2 y 3, que son las raíces de la ecuación.

Podemos comprobar el resultado obtenido por factorización.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\qquad x_1 = 2$

$(x - 2)(x - 3) = 0$ $\qquad x_2 = 3$

Cuando las dos raíces obtenidas en el resultado *son reales y desiguales,* la curva corta al eje de las x en dos puntos distintos.

Conclusión: Para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado en x es suficiente encontrar los puntos en que la curva corta al eje de las x.

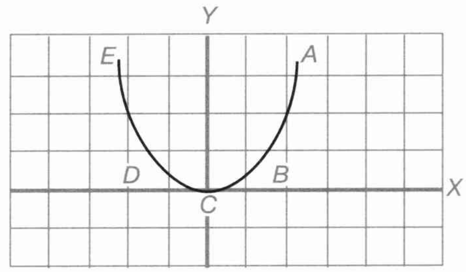
Ejemplo:

Construir y resolver gráficamente la ecuación $x^2 = 2y$.
Como en estos casos despejamos la y

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Asignamos valores a x para obtener los de y.

x	2	1	0	-1	-2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
Puntos	A	B	C	D	E



6 Ecuaciones reducibles a cuadráticas

6.1 Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones que incluyen radicales en algunos casos se pueden reducir a ecuaciones cuadráticas. *Una vez que elevamos al cuadrado para cancelar los radicales,* las soluciones han de *comprobarse* en la ecuación inicial pues *algunas pueden no ser* solución de las citadas ecuaciones.

Observa los siguientes ejemplos.

1. Resolver $\sqrt{5y-1} - \sqrt{y} = 1$

Transponiendo

$$\sqrt{5y-1} = 1 + \sqrt{y}$$

Elevamos al cuadrado

$$5y - 1 = 1 + 2\sqrt{y} + y$$

Simplificamos

$$5y - y - 1 - 1 = 2\sqrt{y}$$

$$4y - 2 = 2\sqrt{y}$$

Dividimos entre dos

$$2y - 1 = \sqrt{y}$$

Elevamos al cuadrado

$$4y^2 - 4y + 1 = y$$

$$4y^2 - 5y + 1 = 0$$

Factorizamos de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$4y^2 - 5y + 1 = (y - 1)(4y - 1)$$

$$y_1 = 1; \qquad y_2 = \frac{1}{4}$$

Comprobación en la ecuación inicial:

Para $y = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{5y-1}-\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{5\left(\frac{1}{4}\right)-1}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$0\neq 1$$

$y=\frac{1}{4}$ no satisface la ecuación

Para $y=1$

$$\sqrt{5y-1}-\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{5-1}-\sqrt{1}=1$$

$$2-1=1$$

$$1=1$$

Sol. La raíz es $y=1$

2. Resolver $\sqrt{y-3}-\sqrt{2y+2}=2$

Transponiendo

$$\sqrt{y-3}=2+\sqrt{2y+2}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y-3=4+4\sqrt{2y+2}+2y+2$$

$$y-3-4-2-2y=4\sqrt{2y+2}$$

$$-y-9=4\sqrt{2y+2}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y^2+18y+81=16(2y+2)$$

$$y^2-14y+49=0$$

Factorizamos

$$y^2-14y+49=(y-7)(y-7)$$

$$y_1=7;\quad y_2=7$$

Comprobación en la ecuación inicial:

$$\sqrt{y-3}-\sqrt{2y+2}=2$$

Para $y=7$

$$\sqrt{7-3}-\sqrt{14+2}=2$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{16}=2$$

$$2-4=2$$

$$-2\neq 2$$

Conclusión: la ecuación inicial no tiene solución.

3. Resolver $\sqrt{y^2 - \sqrt{2y+1}} = 2 - y$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y^2 - \sqrt{2y+1} = 4 - 4y + y^2$$
$$\cancel{y^2} - \cancel{y^2} + 4y - 4 = \sqrt{2y+1}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$16y^2 - 32y + 16 = 2y + 1$$
$$16y^2 - 34y + 15 = 0$$

Solución de la ecuación con la fórmula general

$$y_1 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = \frac{5}{8}$$

Comprobación en la ecuación inicial

$$\sqrt{y^2 - \sqrt{2y+1}} = 2 - y$$

para $y_1 = \frac{3}{2}$

$$\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right) + 1}} = 2 - \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para $y_2 = \frac{5}{8}$ no satisface la ecuación.

Sol. La raíz es $y = \frac{3}{2}$

6.2 Algunas ecuaciones de cuarto grado pueden reducirse a ecuaciones de segundo grado

Ejemplo:

Resolver $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Si ponemos $x^2 = a$, la ecuación toma la forma

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

Factorizamos

$$a^2 - 7a + 12 = (a - 4)(a - 3)$$
$$a_1 = 4; \; a_2 = 3$$

Como

$$x^2 = a$$
$$x^4 = a^2$$

de donde,

$$a_1^2 = 4$$
$$a_2^2 = 3$$

Sol. $x_1 = 2$
$x_2 = -2$
$x_3 = \sqrt{3}$
$x_4 = -\sqrt{3}$

6.3 Ecuaciones en que la incógnita se encuentra en los denominadores

1. **Usando el *mcm* de los denominadores.**

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{x-2}{x+1} = 1$

mcm de los denominadores $(x + 3)(x + 1)$. Multiplicamos por este mcm ambos miembros de la ecuación inicial y obtenemos

$$(x + 1)(x - 1) + (x + 3)(x - 2) = (x + 3)(x + 1)$$

Desarrollando y simplificando

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Factorizando

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

Sol. $x_1 = 5$; $x_2 = -2$

2. **En el siguiente tipo de ecuaciones con la incógnita en el denominador *no se usa el mcm.* Las soluciones obtenidas deben *comprobarse* en la ecuación inicial pues algunas pueden *no ser* solución de la ecuación.**

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{10}{y} + 3 - \dfrac{8}{y^2} = 0$

Ponemos $a = \dfrac{1}{y}$; $a^2 = \dfrac{1}{y^2}$

Sustituimos en la ecuación y queda

$$10a + 3 - 8a^2 = 0$$

Ordenamos, multiplicamos por -1

$$8a^2 - 10a - 3 = 0$$

Factorizamos

$$8a^2 - 10a - 3 = (2a - 3)(4a + 1)$$

$$a_1 = \frac{3}{2}; \qquad a_2 = -\frac{1}{4}$$

Como $a = \frac{1}{y}$, igualamos con cada uno de los valores obtenidos y resolvemos la ecuación resultante.

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{2}; \qquad 2 = 3y; \qquad y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{4}; \qquad 4 = -y; \qquad y = -4$$

Sol. $-4, \frac{2}{3}$

Comprobación

Para $y = -4$

$$\frac{10}{y} + 3 - \frac{8}{y^2} = 0$$

$$\frac{10}{-4} + 3 - \frac{8}{16} = 0$$

$$\frac{-40 + 48 - 8}{16} = \frac{0}{16} = 0$$

Para $y = \frac{2}{3}$

$$\frac{10}{\frac{2}{3}} + 3 - \frac{8}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 0$$

$$15 + 3 - 18 = 0$$

$$0 = 0$$

Conclusión: Las dos raíces satisfacen la ecuación.

CAPÍTULO 17

Discriminante y naturaleza de las raíces

1 Discriminante

La fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en la cual el radicando $b^2 - 4ac$ es el *discriminante*, el cual puede obtenerse sin resolver la ecuación, y da información sobre la naturaleza de las raíces.

Considerando que los coeficientes a, b, c, son números reales, hacemos las siguientes observaciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son *reales e iguales.*
Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son *reales y desiguales.*
Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son *imaginarias y desiguales.*

Si además restringimos los coeficientes a, b, c, como números racionales, podemos hacer las siguientes afirmaciones.

Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, *las raíces son racionales.*
Si $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, *las raíces son irracionales.*

Ejemplos:

Ecuación	Discriminante	Naturaleza de las raíces:
$x^2 + 7x + 6 = 0$	$(7)^2 - 4(1)(6) = 25$	reales, desiguales, racionales
$5x^2 + 7x - 3 = 0$	$(7)^2 - 4(5)(-3) = 109$	reales, desiguales, irracionales
$4x^2 - 28x + 49 = 0$	$(-28)^2 - 4(4)(49) = 0$	reales, iguales, racionales
$4x^2 - 16x + 25 = 0$	$(-16)^2 - 4(4)(25) = -144$	imaginarias y desiguales

2 Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado. La suma y el producto de las raíces

Indicamos con x_1 y con x_2 las raíces de la forma general de las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Su suma es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} + \frac{-b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Su producto es:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt[2]{b - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$
$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Hay problemas en los cuales se *necesita la suma o el producto de las raíces,* pero no las raíces en forma individual; estas fórmulas permiten obtenerlas rápidamente. También se pueden usar para una comprobación rápida después de resolver una ecuación.

Ejemplo:

Resolver la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x_1 = -3$$
$$x_2 = 1$$

Comprobación

$$a = 1$$
$$b = 2$$
$$c = -3$$

Con la suma

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$-3+1=-\frac{2}{1}$$
$$-2 = -2$$

Se cumple, entonces está bien.
Con el producto

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
$$(-3)(1) = \frac{-3}{1}$$
$$-3 = -3$$

Se cumple, entonces está bien.

EJERCICIO 22

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 7x = 0$ — *Sol.* $x_1 = 0$, $x_2 = 7$

2. $3x^2 + x = 0$ — *Sol.* $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

3. $x^2 = 9$ — Sol. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

4. $9x^2 = 16$ — Sol. $x = \pm\frac{4}{3}$

5. $x^2 + 9 = 0$ — Sol. $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$

6. $4x^2 + 64 = 0$ — Sol. $x_1 = 4i$, $x_2 = -4i$

7. $36x^2 + 25 = 0$ — Sol. $x_1 = \frac{5}{6}i$, $x_2 = -\frac{5}{6}i$

8. $x^2 + 2x = 15$ — Sol. $x_1 = -5$, $x_2 = 3$

9. $x^2 - 3x + 2 = 0$ — Sol. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

10. $x^2 - 7x + 12 = 0$ — Sol. $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

11. $x^2 - 11x = -30$ — Sol. $x_1 = 6$, $x_2 = 5$

12. $x^2 + 2x = 35$ — Sol. $x_1 = -7$, $x_2 = 5$

13. $4x^2 + 8x = -3$ — Sol. $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

14. $5x + 3 = -2x^2$ — Sol. $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -1$

15. $2x^2 + 3x = 2$ — Sol. $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Resuelve, completando el cuadrado, las ecuaciones siguientes.

16. $x^2 - 8x + 15 = 0$ — Sol. $x_1 = 5$, $x_2 = 3$

17. $3x^2 + x = 4$ — Sol. $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 1$

18. $x^2 + 8x = -16$ — Sol. $x_1 = -4$, $x_2 = -4$

19. $2x^2 - 3x = 14$ Sol. $x_1 = \frac{7}{2}$

$x_2 = -2$

20. $x^2 - 7x - 8 = 0$ Sol. $x_1 = 8$

$x_2 = -1$

21. $4x^2 + 8x - 1 = 0$ Sol. $x_1 = -1 + \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x_2 = -1 - \sqrt{\frac{5}{4}}$

22. $x^2 - 63 = 2x$ Sol. $x_1 = 9$

$x_2 = -7$

23. $3x^2 - 2x + 2 = 0$ Sol. $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{5}}{3}$

$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{5}}{3}$

24. $x^2 - 2x + 1 = 0$ Sol. $x_1 = 1$

$x_2 = 1$

25. $x^2 - \frac{5x}{4} + \frac{1}{4} = 0$ Sol. $x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{4}$

Resuelve, empleando la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.

26. $x^2 + 5x - 6 = 0$ Sol. $x_1 = 1$

$x_2 = -6$

27. $2x^2 + x - 1 = 0$ Sol. $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -1$

28. $6x^2 - x = 1$ Sol. $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{3}$

29. $3x^2 - 5x = 2$ Sol. $x_1 = 2$

$x_2 = -\frac{1}{3}$

30. $6x^2 + 7x = -2$ Sol. $x_1 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{2}{3}$

31. $4x^2 - 16x + 25 = 0$ Sol. $x_1 = 2 + \frac{3i}{2}$

$x_2 = 2 - \frac{3i}{2}$

32. $6x^2 - 5x = 6$ — Sol. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

33. $2x^2 - 2x + 1 = 0$ — Sol. $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

Resuelve las siguientes expresiones.

34. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ — Sol. $1, \ \frac{2}{3}$

35. $x^2 + 15x + 56 = 0$ — Sol. $-7, -8$

36. $8y^2 - 2y - 3 = 0$ — Sol. $\frac{3}{4}, \ -\frac{1}{2}$

37. $y^2 + 11y + 24 = 0$ — Sol. $-3, \ -8$

.38. $y(y + 3) - 5y - 3 = 0$ — Sol. $3, \ -1$

39. $(x + 4)(4 - x) = 3(3x - 2)$ — Sol. $2, \ -11$

40. $(2y - 3)^2 - (y + 5)^2 + 23 = 0$ — Sol. $7, \ \frac{1}{3}$

41. $\frac{y^2}{5} - \frac{3}{10} - \frac{y}{2} = 0$ — Sol. $3, \ -\frac{1}{2}$

42. $\frac{x-2}{10} + \frac{2x-3}{x+5} = 1$ — Sol. $5, \ -18$

43. $\frac{1}{6} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2}$ — Sol. $4, \ -1$

44. $\frac{3}{x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$ — Sol. $3 \pm \sqrt{13}$

45. $y^4 - 3y^2 - 4 = 0$ — Sol. $\pm 2, \ \pm i$

46. $y^4 - 29y^2 + 100 = 0$ — Sol. $\pm 5, \ \pm 2$

47. $4y^4 - 5y^2 + 1 = 0$ — Sol. $\pm 1, \ \pm\frac{1}{2}$

48. $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$ Sol. $\pm 1, \quad \pm 2i$

49. $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$ Sol. $\pm 2, \quad \pm 3$

50. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x+1} - 4 = 0$ Sol. $1, \ -\dfrac{3}{4}$

51. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2x^2}{x^2-1} = 3 + \dfrac{x}{x+1}$ Sol. $\pm\sqrt{3}$

52. $\dfrac{15}{y^2} - \dfrac{2}{y} = 1$ Sol. -5

53. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} = 15$ Sol. $\dfrac{2}{5}, \quad -\dfrac{2}{3}$

54. $\sqrt{6y+7} - \sqrt{3y+3} = 1$ Sol. $\dfrac{1}{3}, \ -1$

55. $\sqrt{2y+3} - \sqrt{4-y} = 2$ Sol. 3

56. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-2} = 2$ Sol. 2, 6

57. $y + \sqrt{4y+1} - 5 = 0$ Sol. 2

58. $7 + 2y - \sqrt{y-1} = 3y$ Sol. 5

59. $\sqrt{y+2} - \sqrt{y+7} = 5$ Sol. No hay

60. $\sqrt{y+2} + \sqrt{2y+5} = 5$ Sol. 2

61. $\sqrt{x-7} + 1 = \dfrac{x}{4}$ Sol. 8

62. $\sqrt{x} + \sqrt{5} = \sqrt{3x+5}$ Sol. 0

CAPÍTULO 18

Resolución de sistemas de segundo grado

1 Generalidades

Una ecuación de segundo grado con dos variables es del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, C, D, E, y F son cualesquiera de los números reales.

En geometría analítica se demuestra que la gráfica, si existe, de estas ecuaciones puede ser: una *recta,* una *circunferencia,* una *elipse,* una *hipérbola* o una *parábola;* en casos especiales la gráfica puede degenerar en *un par de líneas rectas, un punto o el conjunto vacío.*

Si $A = C = 0$, la gráfica es una *recta.*

Ejemplos:

$$3x + 4 = 0;\ 3x + 4y + 5 = 0$$

Si $A = C \neq 0$, la gráfica es una circunferencia, un punto o el *conjunto vacío.*

Ejemplos:

$$x^2 + y^2 = 9;\ 5x^2 + 5y^2 - 14x + 7y - 24 = 0$$

Si alguno de los coeficientes A y C *es nulo,* la gráfica es una *parábola, dos rectas paralelas, una sola recta o el conjunto vacío.*

Ejemplos:

$$y^2 + 2y - 4x + 9 = 0;\ x^2 + 20y - 40 = 0$$

Si $(A)\ (C) > 0$, la gráfica es una elipse, un punto, o el conjunto vacío.

Ejemplos:

$$3x^2 + 4y^2 = 12;\ x^2 + 2y^2 = 2$$

Si $(A)\ (C) < 0$, la gráfica es una *hipérbola* o un *par de rectas* que se cortan.

Ejemplos:

$$x^2 - y^2 = 16;\ 5x^2 - 4y^2 + 2x - 1 = 0$$

La ecuación más general de segundo grado es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde el término Bxy señala que los ejes de las cónicas *no son* paralelos a los ejes coordenados.

Dos ecuaciones como las anteriores, tomadas juntas, constituyen un sistema de ecuaciones de segundo grado; un par de valores para x, y, que satisfaga ambas ecuaciones se llama solución del sistema.

Resolveremos los sistemas de segundo grado de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando:

1. Una ecuación es de primer grado y la otra es de segundo grado.
2. Las dos ecuaciones son de segundo grado.

2 Resolución de un sistema formado por una ecuación de primer grado y otra de segundo grado

Estos sistemas se resuelven fácilmente por *sustitución*; despejamos cualquiera de las incógnitas de la ecuación de primer grado y su valor se *sustituye* en la de segundo grado.

Ejemplo:

Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &= 0 \qquad (1) \\ -x - y &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Despejamos x en la ecuación (2), su valor lo sustituimos en (1).

$$\begin{aligned} x &= y \\ y^2 - 4(y) &= 0 \\ y^2 - 4y &= 0 \\ y(y - 4) &= 0 \\ y_1 = 0;\ y_2 &= 4 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de y en la ecuación lineal para calcular el valor de la otra incógnita.

$$\begin{array}{rr} \text{para } y_1 = 0 & \text{para } y_2 = 4 \\ x - y = 0 & x - y = 0 \\ x - 0 = 0 & x - 4 = 0 \\ x_1 = 0 & x_2 = 4 \end{array}$$

Cada uno de los valores correspondientes, es una solución del sistema dado.

Sol.

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0, & y_1 = 0 \\ x_2 = 4, & y_2 = 4 \end{array}$$

Si hiciéramos las gráficas de estas ecuaciones se intersectarían en los puntos de coordenadas (0, 0) y (4, 4).

3

Resolución por adición o sustracción de un sistema formado por dos ecuaciones de segundo grado

En este método se *igualan* los coeficientes de una de las incógnitas, la que sea más sencilla, y a continuación se suman o se restan las dos ecuaciones, según convenga, para eliminar una de las incógnitas.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &= 57 \quad (1) \\ x^2 + 3y^2 &= 43 \quad (2) \end{aligned}$$

Multiplicamos (2) por 3 para igualar los coeficientes de x^2. Restamos miembro a miembro.

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 &= 57 \\ -3x^2 - 9y^2 &= -129 \\ \hline -8y^2 &= -72 \\ -y^2 &= -\frac{72}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 9 \\ y &= \pm\sqrt{9} \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores de $y = \pm 3$ en la ecuación (2)

$x^2 + 3y^2 = 43$ se tiene:

Para $y = 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 3(3)^2 &= 43 \\ x^2 + 27 &= 43 \\ x^2 &= 43 - 27 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Se obtuvieron 2 valores para x,

Para $y = -3$

$$\begin{aligned} x^2 + 3(-3)^2 &= 43 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Y con los dos valores de y que se obtuvieron la solución es:

Sol.

$$\begin{aligned} x_1 &= -4, y_1 = 3 \\ x_2 &= 4, y_2 = 3 \\ x_3 &= 4, y_3 = -3 \\ x_4 &= -4, y_4 = -3 \end{aligned}$$

Si hiciéramos las gráficas de estas ecuaciones se intersectarían en los puntos de coordenadas $(-4, 3)$, $(4,3)$, $(4, -3)$ y $(-4, -3)$.

Cuando se resuelven simultáneamente dos de las ecuaciones como en este ejemplo, debemos esperar cualquiera de las soluciones siguientes: *que haya o no intersección.*

Nos damos cuenta de que *no hay* intersección cuando el resultado incluye números complejos, los cuales se localizan en el plano complejo y no en el cartesiano, que es donde se representan las gráficas de las cónicas.

Si hay intersección en el resultado se obtienen números reales. La intersección puede ser: *en dos, en tres o en cuatro puntos, o en un punto de tangencia.*

EJERCICIO 23

Por medio del discriminante $b^2 - 4ac$ investiga la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones. Comprueba el resultado resolviéndolas por medio de la fórmula general.

1. $x^2 + x + 1 = 0$ $\qquad x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

   Sol. imaginarias y desiguales $\qquad x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

2. $3x^2 - 7x - 6 = 0$ $\qquad x_1 = 3$

   Sol. Reales y desiguales $\qquad x_2 = -\dfrac{2}{3}$

3. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ $\qquad x_1 = 2$

   Sol. Reales y desiguales $\qquad x_2 = -\dfrac{1}{3}$

4. $x^2 + 8x + 16 = 0$ $\qquad x_1 = -4$

   Sol. Reales e iguales $\qquad x_2 = -4$

5. $4x^2 - 16x + 25 = 0$ $\qquad x_1 = 2 + \dfrac{3}{2}i$

   Sol. Imaginarias y desiguales $\qquad x_2 = 2 - \dfrac{3}{2}i$

6. $36x^2 - 12x + 1 = 0$ $\qquad x_1 = \dfrac{1}{6}$

   Sol. Reales e iguales $\qquad x_2 = \dfrac{1}{6}$

Sin resolver las ecuaciones, calcular la suma y el producto de sus raíces.

7. $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\qquad$ *Sol.* Suma 3, producto, 1

8. $x^2 - 2x + 4 = 0$ $\qquad$ *Sol.* Suma 2, producto, 4

9. $x^2 - 8x = 15$ — *Sol.* Suma 8, producto, -15

10. $x^2 - 6x = 9$ — *Sol.* Suma 6, producto, -9

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

11. $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$ — *Sol.* $y_1 = 0 \quad x_1 = 4$; $y_2 = -4 \quad x_2 = 0$

12. $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 7 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 4 \quad y_1 = 3$; $x_2 = 4 \quad y_2 = -3$; $x_3 = -4 \quad y_3 = 3$; $x_4 = -4 \quad y_4 = -3$

13. $\begin{aligned} y^2 + 2x &= 7 \\ x - 2y &= -7 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = -1 \quad y_1 = 3$; $x_2 = -21 \quad y_2 = -7$

14. $\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 27 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 3 \quad y_1 = -3$; $x_2 = -1 \quad y_2 = 5$

15. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ xy &= 5 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = \sqrt{5} \quad y_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5} \quad y_2 = -\sqrt{5}$

16. $\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 &= 5 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = \frac{7}{5} \quad y_1 = \frac{3}{5}$; $x_2 = -1 \quad y_2 = -1$

17. $\begin{aligned} x^2 - xy - 3x + 2y - 2 &= 0 \\ 3x - 2y - 10 &= 0 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 4 \quad y_1 = 1$; $x_2 = 6 \quad y_2 = 4$

18. $\begin{aligned} y &= x^2 - x - 1 \\ y &= 2x + 3 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = -1 \quad y_1 = 1$; $x_2 = 4 \quad y_2 = 11$

19. $\begin{aligned} 2y^2 - 3x &= 0 \\ y &= \frac{x+6}{4} \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 6 \quad y_1 = 3$

20. $\begin{aligned} x^2 + 2xy - x - 4 &= 0 \\ 2x^2 - xy + 3x - 3 &= 0 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = -2 \quad y_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1 \quad y_2 = 2$

21. $\begin{aligned} 3x^2 + xy + x - 8 &= 0 \\ x^2 + 3xy + 3x + 8 &= 0 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 2 \quad y_1 = -3$; $x_2 = -2 \quad y_2 = 1$

22. $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -45 \\ 3x^2 - y^2 &= 27 \end{aligned}$ — *Sol.* $x_1 = 6 \quad y_1 = 9$; $x_2 = -6 \quad y_2 = 9$; $x_3 = -6 \quad y_3 = -9$; $x_4 = 6 \quad y_4 = -9$

23. $x^2 + y^2 = 29$
$4x^2 = 41 - y^2$

Sol. $x_1 = 2 \quad y_1 = 5$
$x_2 = 2 \quad y_2 = -5$
$x_3 = -2 \quad y_3 = 5$
$x_4 = -2 \quad y_4 = -5$

24. $x^2 + y^2 = 9$
$4y^2 = 36 - 9x^2$

Sol. $x_1 = 0 \quad y_1 = 3$
$x_2 = 0 \quad y_2 = -3$
$x_3 = 0 \quad y_3 = 3$
$x_4 = 0 \quad y_4 = -3$

25. $2x^2 - 3xy - x = -4$
$xy - 3x = -2$

Sol. $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \dfrac{40 + 4\sqrt{5}}{20}$

$x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \dfrac{40 - 4\sqrt{5}}{20}$

26. $y^2 - 4xy + 2y = -5$
$-3xy - y = -10$

Sol. $x_1 = \dfrac{5}{3} \quad y_1 = \dfrac{5}{3}$
$y_2 = -1 \quad y_2 = -5$

4 Problemas

Si al establecer una ecuación de segundo grado para solucionar un problema se obtienen dos valores de la incógnita, sólo se aceptará como solución el o los valores que satisfagan las condiciones del problema y no se usarán las que no la cumplan.

Ejemplos:

A. Números

1. Obtener los números cuyo cuadrado sea el número aumentado en 6.

Datos

n^2 un número al cuadrado
$n + 6$ número aumentado en 6

Ecuación

$$n^2 = n + 6$$
$$n^2 - n - 6 = 0$$
$$(n - 3)(n + 2) = 0$$
$$n_1 = 3$$
$$n_2 = -2$$

los números 3 y –2 son las raíces de la ecuación.

Solución

Analizamos cuál de las raíces verifican las condiciones del problema.

con $n = 3$	con $n = -2$
$n^2 = n + 6$	$n^2 = n + 6$
$3^2 = 3 + 6$	$(-2)^2 = -2 + 6$
$9 = 9$	$4 = 4$

los números 3 y –2 cumplen las condiciones del problema y son la solución.

La comprobación se puede hacer mentalmente.

2. Obtener un número cuyo cuadrado disminuido en 4 veces el número sea igual a 5.

Datos

n^2 un número al cuadrado
$4n$ cuatro veces el número

Ecuación

$$n^2 - 4n = 5$$
$$n^2 - 4n - 5 = 0$$
$$(n + 1)(n - 5) = 0$$
$$n_1 = -1$$
$$n_2 = 5$$

los números –1, 5 son las raíces de la ecuación

Solución

Analizamos cuál de las raíces verifican las condiciones del problema

con $n = -1$	con $n = 5$
$n^2 - 4n = 5$	$n^2 - 4n = 5$
$(-1)^2 - 4(-1) = 5$	$5^2 - 4(5) = 5$
$5 = 5$	$5 = 5$

los números –1 y 5 cumplen las condiciones del problema y son la solución.

La comprobación se puede hacer mentalmente.

3. Obtener dos números consecutivos cuya suma de sus cuadrados sea 145.

Nota: *En un problema la expresión "números consecutivos" sólo es válida para los números naturales.*

Por ello este problema también se puede redactar en la siguiente forma.

4. Obtener dos *números naturales consecutivos* cuya suma de sus cuadrados sea igual a 145.

Datos

n^2 número natural al cuadrado
$(n + 1)^2$ número natural consecutivo al cuadrado

Ecuación

$$n^2 + (n + 1)^2 = 145$$
$$n^2 + n^2 + 2n + 1 - 145 = 0$$
$$2n^2 + 2n - 144 = 0$$
$$n^2 + n - 72 = 0$$
$$(n + 9)(n - 8) = 0$$
$$n_1 = -9$$
$$n_2 = 8$$

los números –9 y 8 son las raíces de la ecuación; pero el número –9 no es natural

Solución

Analizamos si la raíz $n = 8$ cumple las condiciones del problema

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 &= 145 \\ 8^2 + (8+1)^2 &= 145 \\ 64 + 81 &= 145 \\ 145 &= 145 \end{aligned}$$

el número 8 verifica las condiciones y es la solución.

5. Obtener los *números naturales consecutivos* tales que el cuadrado del primero más el doble del segundo sea 170.

Datos

n^2 número entero al cuadrado
$2(n + 1)$ el doble del número entero consecutivo

Ecuación

$$\begin{aligned} n^2 + 2(n+1) &= 170 \\ n^2 + 2n + 2 - 170 &= 0 \\ n^2 + 2n - 168 &= 0 \\ (n-12)(n+14) &= 0 \\ n_1 &= 12 \\ n_2 &= -14 \end{aligned}$$

los números 12 y −14 son las raíces de la ecuación; pero el número −14 no es natural.

Solución

Analizamos si la raíz $n = 12$ cumple las condiciones del problema.
$n = 12$ número natural; $12^2 = 144$ su cuadrado;
$n + 1 = 13$ número consecutivo; $2(13) = 26$ el doble
$144 + 26 = 170$ la suma;
los números 12 y 13 verifican las condiciones del problema y son la solución.

6. El producto de dos números *impares consecutivos* es 143. Obtener los números.

Datos

$(2n + 1)$ primer número
$(2n + 1) + 2$ segundo número

Ecuación

$$\begin{aligned} (2n+1)(2n+3) &= 143 \\ 4n^2 + 8n + 3 - 143 &= 0 \\ 4n^2 + 8n - 140 &= 0 \end{aligned}$$

simplificamos dividiendo cada miembro entre 4

$$\begin{aligned} n^2 + 2n - 35 &= 0 \\ (n+7)(n-5) &= 0 \\ n_1 &= -7 \\ n_2 &= 5 \end{aligned}$$

los números −7 y 5 son las raíces de la ecuación; pero el número −7 no es natural.

Solución

Analizamos si la raíz $n = 5$ cumple las condiciones del problema

$$(2n + 1)(2n + 3) = 143$$
$$[2(5) + 1][2(5) + 3] = 143$$
$$11(13) = 143$$

los números 11 y 13 son impares consecutivos y su producto 143, son la solución.

7. El producto de dos números *naturales pares* consecutivos es 224. Obtener los números.

Datos

$(2n)$ primer número
$(2n + 2)$ segundo número

Ecuación

$$2n(2n + 2) = 224$$
$$4n^2 + 4n - 224 = 0$$

simplificamos dividiendo cada miembro entre 4

$$n^2 + n - 56 = 0$$
$$(n + 8)(n - 7) = 0$$
$$n_1 = -8$$
$$n_2 = 7$$

los números –8 y 7 son las raíces de la ecuación; pero el número –8 no es natural.

Solución

Analizamos si la raíz $n = 7$ cumple las condiciones del problema

$$2n(2n + 2) = 224$$
$$2(7)[2(7) + 2] = 224$$
$$14(16) = 224$$

los números 14 y 16 son pares consecutivos y su producto 224, son la solución.

8. Obtener dos números *naturales* consecutivos tales que el producto del primero por el doble del segundo sea 24.

Datos

n número natural
$2(n + 1)$ el doble del número natural consecutivo

Ecuación

$$n(2n + 2) = 24$$
$$2n^2 + 2n - 24 = 0$$

simplificamos

$$n^2 + n - 12 = 0$$
$$(n + 4)(n - 3) = 0$$
$$n_1 = -4$$
$$n_2 = 3$$

los números –4 y 3 son las raíces de la ecuación; pero el número –4 no es natural.

Solución

Analizamos si la raíz $n = 3$ cumple las condiciones del problema

$$n = 3 \text{ número natural}$$
$$n + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ número natural consecutivo}$$
$$n[2(n + 1)] = 24$$
$$3\,[2(4)] = 24$$
$$3(8) = 24$$

los números 3 y 4 cumplen las condiciones del problema y son la solución.

B. Edades de personas

9. Si Antonio es 4 años mayor que Juan y la suma de los cuadrados de ambas edades es de 136 años. Calcula la edad de cada uno.

Datos

x edad de Antonio
$x - 4$ edad de Juan

Ecuación

$$x^2 + (x - 4)^2 = 136$$
$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 136 = 0$$
$$2x^2 - 8x - 120 = 0$$
$$x^2 - 4x - 60 = 0$$
$$(x - 10)(x + 6) = 0$$
$$x_1 = 10$$
$$x_2 = -6$$

Solución

Analizamos cuál de las raíces verifican las condiciones del problema

con $x = 10$	con $x = -6$
$x^2 + (x - 4)^2 = 136$ $(10)^2 + 6^2 = 136$ $136 = 136$	No tiene sentido como solución del problema porque Antonio no puede tener –6 años

Antonio tienen 10 años y Juan 10 –4 = 6 años

Comprobación

$(10)^2 + 6^2 = 136$

10. Arturo es 5 años mayor que Geny, el producto de sus edades es de 374 años. Calcula la edad de cada uno.

Datos

x edad de Arturo
$x - 5$ edad de Geny

Ecuación

$$x(x - 5) = 374$$
$$x^2 - 5x - 374 = 0$$

Resolvemos la ecuación con la fórmula general para la resolución de las ecuaciones de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1496}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1521}}{2} = x = \frac{5 \pm 39}{2}$$

$x_1 = 22$

$x_2 = -17$ No tiene sentido como solución del problema.

Solución

$$\text{con } x = 22$$
$$x(x - 5) = 374$$
$$22(17) = 374$$
$$374 = 374$$

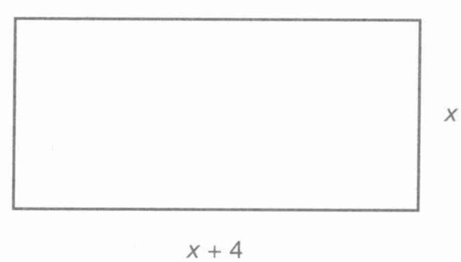
Arturo tiene 22 años y Geny $22 - 5 = 17$ años

Comprobación

$22(17) = 374$

C. Figuras geométricas

11. El largo de un rectángulo es 4 cm más grande que su ancho y su área es de 192 cm². Calcula sus dimensiones.



x ancho

$x + 4$ largo

largo por ancho es el área de un rectángulo

Ecuación

$$x(x + 4) = 192$$
$$x^2 + 4x - 192 = 0$$
$$(x + 16)(x - 12) = 0$$

$x_1 = -16$ No tiene sentido.

$x_2 = 12$

Solución

$$\text{con } x = 12$$
$$x(x + 4) = 192$$
$$12(16) = 192$$
$$192 = 192$$

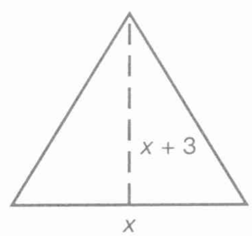
el ancho mide 12 cm y el largo 12 + 4 = 16 cm.

Comprobación

$12(16) = 192 \text{ cm}^2$

12. ¿Cuáles son la base y la altura de un triángulo si la altura excede a la base en 3 cm y su área es de 14 cm²?

Datos



x	base
$x + 3$	altura
$\frac{bh}{2}$	área de un triángulo

Ecuación

$$\frac{x\,(x+3)}{2} = 14$$
$$x^2 + 3x = 28$$
$$x^2 + 3x - 28 = 0$$
$$(x + 7)(x - 4) = 0$$
$$x_1 = -7 \quad \text{No tiene sentido como solución al problema.}$$
$$x_2 = 4$$

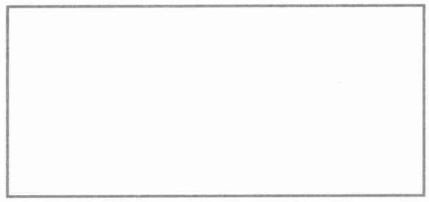
Solución

Base 4 cm, altura 4 + 3 = 7 cm.

Comprobación

$\text{Área} = \frac{4(7)}{2} = 14 \text{ cm}^2$

13. Si el largo de un rectángulo es 4 cm mayor que su anchura y si se aumentan en 2 cm cada una de sus dimensiones, entonces el área será de 140 cm^2. Calcula las dimensiones.



$x + 2$

$x + 4 + 2$

Datos

$x + 4 + 2$ largo
$x + 2$ ancho

largo por ancho es el área de un rectángulo

Ecuación

$$(x + 2)(x + 6) = 140$$
$$x^2 + 8x + 12 - 140 = 0$$
$$x^2 + 8x - 128 = 0$$
$$(x + 16)(x - 8) = 0$$
$$x_1 = -16$$
$$x = 8$$

No tiene sentido como solución del problema.

Solución

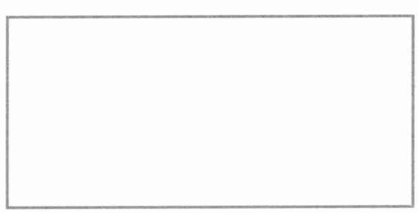
$$\text{con } x = 8$$
$$(x + 2)(x + 6) = 140$$
$$(8 + 2)(8 + 6) = 140$$
$$140 = 140$$

Las dimensiones originales del rectángulo son de 8 por 12 cms.

Comprobación

Si se aumentan las dimensiones quedan: de 8 + 2 = 10 cm de ancho y 8 + 6 = 14 cm de largo; de donde 10(14) = 140 cm^2.

14. El largo de un jardín rectangular es el doble que su ancho, si éste aumenta en 6 m y el largo en 40 m, el área será el doble. Calcula las dimensiones del jardín.



x

$2x$

Datos

x	ancho
$2\,x$	largo
$x(2x) = 2x^2$	área inicial
$2(2x^2) = 4x^2$	área doble
$x + 6$	ancho aumentado
$2x + 40$	largo aumentado

Ecuación

$$(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$$
$$2x^2 + 52x + 240 = 4x^2$$

Simplificando

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$
$$(x - 30)\,(x + 4) = 0$$
$$x_1 = 30$$
$x_2 = -4$ No tiene sentido la solución del problema.

Solución

con $x = 30$
el ancho mide 30 m y el largo 60 m

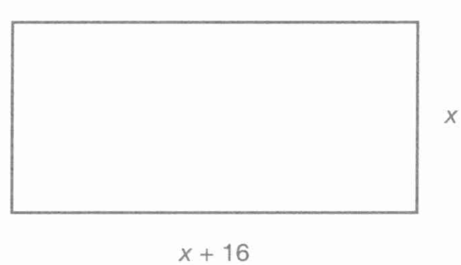
Comprobación

$x(2x)$ área inicial
$30(60) = 1800$ m^2
Aumentando la dimensiones, son: $x + 6$ y $2x + 40$
$x + 6$ y $2x + 40$
$(30 + 6)(60 + 40)$
$36\,(100) = 3600$ m^2 área doble de la inicial.

Observa

Aún cuando en forma aparente la solución del siguiente problema se obtiene con una ecuación de segundo grado, no es así, por ello se incluye en este apartado.

15. El lado de un terreno rectangular es 16 m mayor que el otro; si el lado menor se aumenta en 8 m el mayor disminuye en 10 m, y el área permanece la misma. Calcula las dimensiones.



Datos

x	ancho
$x + 16$	largo
$x\,(x + 16)$	área inicial
$x + 8$	ancho con aumento
$x + 16 - 10$	largo disminuido
$(x + 8)(x + 6)$	área modificada

Ecuación

$$x\,(x + 16) = (x + 8)(x + 6)$$
$$\cancel{x^2} + 16x = \cancel{x^2} + 14x + 48$$
$$2x = 48$$
$$x = 24$$

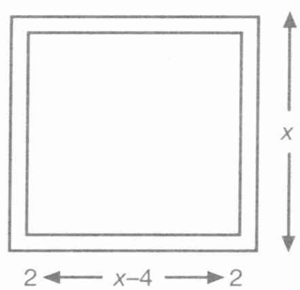
Solución:

El ancho del rectángulo es de 24 m y el largo de 24 + 16 = 40 m

Comprobación

Área inicial 24(40) = 960 m^2
Área modificada 24 + 8 = 32 m de ancho y 24 + 16 − 10 = 30 m de largo.
Área modificada 32(30) = 960 m^2, igual a la anterior.

16. Se quiere fabricar una caja de lámina con capacidad de 72 centímetros cúbicos y 2 centímetros de profundidad.
Calcula las dimensiones de la pieza de lámina por usar.



Datos

x	largo de la lámina
2	profundidad
$x - 4$	longitud de un lado de la caja

Ecuación

$$(x - 4)^2(2) = 72$$
$$(x - 4)^2 = \frac{72}{2} = 36$$
$$x - 4 = \sqrt{36} = 6$$
$$x_1 = 10$$
$$x_2 = -2 \quad \text{No satisface.}$$

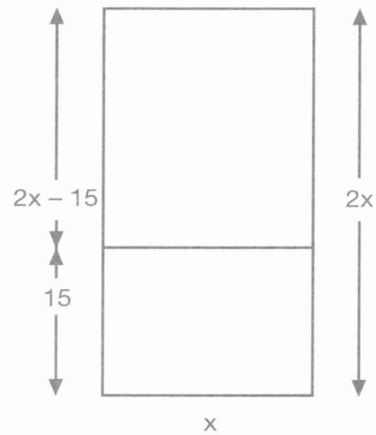
Solución

La pieza de lámina debe ser de 10 cm por lado

Comprobación

$$(x-4)^2\,(2) = 72$$
$$6^2(2) = 72$$
$$72 = 72$$

17. En una bodega de forma rectangular, el fondo es el doble del frente, si se divide en dos partes con una pared paralela al frente y a 15 m de éste, la parte trasera de la bodega quedará de 1750 metros cuadrados. Calcula las dimensiones.



Datos

x	longitud del frente
$2x$	longitud del fondo
$2x-15$	longitud parte trasera

Ecuación

$$x(2x-15) = 1750 \text{ área parte trasera}$$
$$2x^2 - 15x - 1750 = 0$$

con la fórmula general para la solución de la ecuaciones de segundo grado, obtenemos en:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225-4(2)(-1750)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{15 \pm 119.26}{4}$$

$$x_1 = \frac{15+119.26}{4} = 33.56$$

$$x_2 = \frac{15-119.26}{4} = -26.06 \quad \text{No satisface.}$$

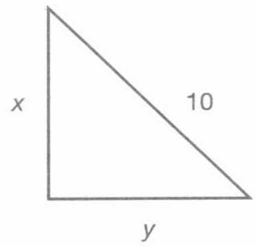
Solución

El frente mide 33.56 m y el fondo 2(33.56) – 15 = 52.12

Comprobación

33.56(52.12)= 1749.14 la diferencia en centésimos se debe a que en la raíz cuadrada anterior, únicamente se tomaron en el resultado dos cifras decimales.

18. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 24 centímetros y su hipotenusa 10 centímetros. Calcula la longitud de los catetos.



Datos

$x^2 + y^2 = (10)^2$ teorema de Pitágoras.
$x + y + 10 = 24$ perímetro del triángulo.

Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (10)^2 \quad (1) \\ x + y + 10 &= 24 \quad (2) \end{aligned}$$

en (2) despejamos y

$y = 24 - 10 - x$

$y = 14 - x$ (3)

Sustituimos en (1)

$x^2 + (14 - x)^2 - 10^2 = 0$

$x^2 + 196 - 28x + x^2 - 100 = 0$

$2x^2 - 28x + 96 = 0$

$x^2 - 14x + 48 = 0$

$(x - 8)(x - 6) = 0$

$x_1 = 8$

$x_2 = 6$

Sustituimos en (3) para obtener los valor de y

con $x_1 = 8$

$y_1 = 14 - x$

$y_1 = 14 - 8 = 6$

con $x_2 = 6$

$y_2 = 14 - x$

$y_2 = 14 - 6 = 8$

Solución:

con $x_1 = 8$, $y_1 = 6$ en

$x^2 + y^2 = (10)^2$

$8^2 + 6^2 = 100$

$64 + 36 = 100$

$100 = 100$

Un cateto mide 8 cm, el otro 6 cm

Comprobación

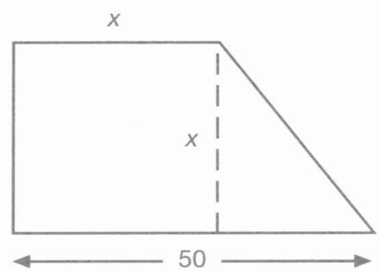
$x + y + 10 = 24$

$8 + 6 + 10 = 24$

$24 = 24$

19. La base mayor de un trapecio mide 50 centímetros, la base menor es igual a la altura y el área es de 1200 centímetros cuadrados.

Calcula cuánto mide la altura.



Datos

x altura, base menor

$\dfrac{(b + b^1)}{2}\ h$ área del trapecio

Ecuación

$$\frac{(x + 50)}{2}\, x = 1200$$

$$x^2 + 50x - 2400 = 0$$

Con la fórmula general para la solución de las ecuaciones de segundo grado, obtenemos en:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4(1)\,(-2400)}}{2} = \frac{-50 \pm \sqrt{12\,100}}{2} = \frac{-50 \pm 110}{2}$$

$$x_1 = \frac{-50 + 110}{2} = 30$$

$$x_2 = \frac{-50 - 110}{2} = -80$$

La altura mide 30 cm al igual que la base menor

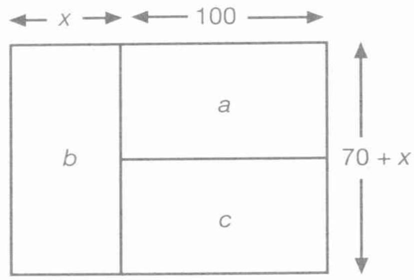
Comprobación

$$\frac{(b + b^1)}{2}\ h = 1200$$

$$\frac{(50 + 30)}{2}\, 30 = 1200$$

$$1200 = 1200$$

20. Un campo deportivo mide 100 m de largo y 70 m de ancho y se desea aumentar su área a 13 000 m² agregando franjas iguales, una a lo largo y la otra a lo ancho y así, mantener su forma rectangular. Calcula el ancho de las franjas.



Datos

x	ancho de cada franja
$70\,(100) = 7000$ m²	área *a*
$100\,x$ m²	área *c*
$x(70 + x) = 70x + x^2$ m²	área *b*
13 000 m²	área nueva

Ecuación

$$7000 + 100x + 70x + x^2 = 13\,000$$
$$x^2 + 170x - 6000 = 0$$
$$(x + 200)(x - 30) = 0$$
$$x_1 = -200 \text{ no satisface.}$$
$$x_2 = 30$$

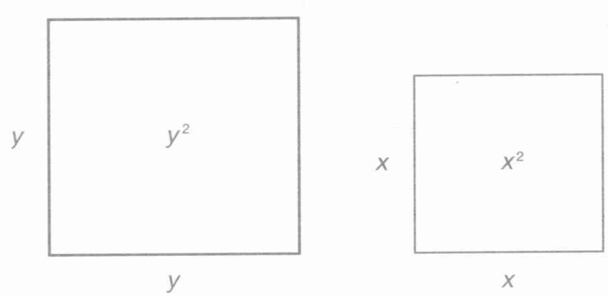
Solución

Las franjas deben medir 30 m de ancho.

Comprobación

Las nuevas dimensiones del campo deportivo son de $100 + 30 = 130$ y de $70 + 30 = 100$, de donde $130(100) = 13\,000$ m²

21. La suma de las áreas de dos cartulinas cuadradas es de 13 cm², si el área de la cartulina grande es de 5 cm² más que la chica. Calcula cuánto miden los lados de cada una.



Datos

$x^2 + y^2 = 13$	suma de las áreas
$y^2 - x^2 = 5$	la cartulina grande mide 5 cm² más que la chica

235

Sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{ll}
x^2 + y^2 = 13 & \quad (1) \\
\underline{y^2 - x^2 = \;\; 5} &
\end{array}
$$

$$2y^2 = 18$$

$$y^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$y_1 = 3$

$y_2 = -3$ No satisface.

Sustituimos en (1)

con $y = 3$

$x^2 + y^2 = 13$

$x^2 + 3^2 = 13$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$ No satisface.

Solución

El lado de la cartulina chica mide 2 cm y la grande 3 cm.

Comprobación

$y^2 + x^2 = 13$ suma de las áreas

$3^2 + 2^2 = 13$

$13 = 13 \text{ cm}^2$

$y^2 - x^2 = 5$ la cartulina grande mide 5 cm^2 más que la chica

$3^2 - 2^2 = 5$

$9 - 4 = 5 \text{ cm}^2$

E. Trabajo realizado por personas

22. Un maestro y su ayudante pueden hacer una instalación en 6 h, si el maestro trabaja solo puede hacer la instalación en 4 h menos que el ayudante. Calcula cuánto tarda cada trabajador en hacer por sí solo el trabajo.

Datos

x	tiempo que emplea sólo el maestro
$x + 4$	tiempo que emplea sólo el ayudante
$\frac{1}{6}$	fracción de trabajo desarrollado en una hora juntos los dos trabajadores
$\frac{1}{4}$	fracción del trabajo desarrollado por el maestro
$\frac{1}{x+4}$	fracción del trabajo desarrollado por el ayudante

Ecuación

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{6}$$

mcm $6x(x+4)$

$6x+24+6x=x^2+4x$

$x^2-8x-24=0$

con la fórmula general para la solución de las ecuaciones de segundo grado, obtenemos con:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-4(1)(-24)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{160}}{2}=\frac{8\pm 12.64}{2}$$

$x_1=10.32$

$x_2=-2.32$ No satisface

Solución

El maestro trabajando solo puede hacer el trabajo en 10.32 horas y el ayudante en 14.32 horas.

23. Un jardinero y su ayudante para sembrar 1 m^2 de pasto difieren entre sí en un minuto; si trabajando juntos han sembrado 27 m^2 en una hora. Calcula el tiempo en que cada uno sembró un metro cuadrado.

Datos

x	número de minutos en que el jardinero siembra un metro cuadrado
$x+1$	número de minutos que emplea el ayudante
$\frac{1}{x}$	fracción de metros cuadrados que siembra el jardinero en un minuto
$\frac{1}{x+1}$	fracción de metros cuadrados que siembra el ayudante en un minuto
27 m^2	siembran trabajando juntos en 60 minutos
$\frac{27}{60}$	trabajo en un minuto

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{27}{60}$$

mcm $60x(x+1)$

$60(x+1)+60x=27(x)(x+1)$

$60x+60+60x-27x^2-27x=0$

$-27x^2+93x+60=0$

$9x^2-31x-20=0$

con la fórmula general para la solución de las ecuaciones de segundo grado, obtenemos con:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{31\pm\sqrt{(-31)^2-4(9)(-20)}}{2(9)}=\frac{31\pm 41}{18}$$

$$x_1 = \frac{31+41}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

$$x_2 = \frac{31-41}{18} = -\frac{5}{9}$$ No satisface.

Solución

El jardinero en 4 min. siembra un m², su ayudante en $x + 1 = 4 + 1 = 5$ min

Comprobación

El jardinero en 4 min. siembra un m² en 60 min. 60/4 = 15 m²
el ayudante en 5 min. siembra un m² en 60 minutos 60/5 = 12 en 60 min
juntos siembran 15 + 12 = 27 m²

F. Personas o vehículos en movimiento

24. Un móvil con velocidad constante recorre una distancia de 300 millas, si la velocidad se hubiera aumentado en 10 millas por hora, el tiempo del recorrido se hubiera reducido en una hora. Calcular la velocidad.

Datos

x	velocidad del móvil en millas/h
$\frac{300}{x}$	tiempo para el recorrido con la velocidad original.
$\frac{300}{x+10}$	tiempo del recorrido aumentando la velocidad.

Ecuación

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$$

$$\text{mcm } x(x + 10)$$

$$300(x + 10) - 300x = x(x + 10)$$

$$\cancel{300x} + 3\,000 - \cancel{300x} - x^2 - 10x = 0$$

$$-x^2 - 10x + 3000 = 0$$

$$\text{multiplicando por } (-1)$$

$$x^2 + 10x - 3\,000 = 0$$

$$(x + 60)(x - 50) = 0$$

$$x_1 = -60 \qquad \text{No satisface}$$

$$x_2 = 50$$

Solución

La velocidad del móvil es de 50 millas por hora.

Comprobación

El tiempo para recorrer 300 millas a 50 millas/h es de 6 h si la velocidad se aumenta a 60 millas/h el recorrido se haría en 5h, en una hora menos.

25. Un avión vuela una distancia de 350 millas en dirección contraria al viento y de inmediato regresa al punto de partida usando la misma trayectoria; si la velocidad del avión es de 150 millas por hora cuando el aire está en calma y en el viaje total transcurren 5 horas. Calcula la velocidad del viento considerando que permanece constante durante todo el recorrido.

Datos

$\bullet\!\longrightarrow$ viento en contra

$\longleftarrow\!\bullet$ viento en favor

x velocidad del viento

$(150 - x)$ millas/hora, con el viento en contra

$(150 + x)$ millas/hora, con el viento a favor

$t = \dfrac{d}{v}$ fórmula, el tiempo es igual a la distancia entre la velocidad

$\dfrac{350}{150 + x}$ tiempo necesario para volar 350 millas con el viento en contra

$\dfrac{350}{150 + x}$ tiempo necesario para volar 350 millas con el viento a favor.

Ecuación

$$\frac{350}{150 - x} + \frac{350}{150 + x} = 5$$

$$\text{mcm } (150 - x)(150 + x)(1)$$

$$350(150 + x) + 350(150 - x) = 5(150 - x)(150 + x)$$

$$52\,500 + 350x + 52\,500 - 350x = 5(150^2 - x^2)$$

$$105\,000 = 5(150^2 - x^2)$$

$$5x^2 - 112\,500 + 105\,000 = 0$$

$$5x^2 - 7500 = 0$$

$$x^2 - 1500 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{1500}$$

$$x_1 = 38.72$$

$$x_2 = -38.72 \quad \text{No satisface.}$$

Solución

La velocidad del viento es de 38.72 millas por hora

Comprobación

De ida el avión vuela 350 millas con el viento en contra,

$$\frac{350}{150 - x} = \frac{350}{150 - 38.72} = 3.14 \text{ h}$$

De regreso vuela 350 millas con el viento a favor,

$$\frac{350}{150 + x} = \frac{350}{150 + 38.72} = 1.85 \text{ h}$$

De donde 3.14 + 185 = 4.99 horas, la centésima que falta corresponde a las cifras decimales que no se tomaron al calcular la $\sqrt{1500} = 38.72$ (en el resultado únicamente se tomaron dos cifras decimales).

26. En terreno accidentado un automóvil viaja a 10 km/h más rápido que un trailer para recorrer 360 km, su recorrido lo hace en 3 h menos que el trailer para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

Datos

x	velocidad trailer
$x + 10$	velocidad auto
360 km	distancia recorrida
$\frac{360}{x}$	tiempo empleado por el trailer
$\frac{360}{x+10}$	tiempo empleado por el automóvil
3 h	diferencia de los tiempos recorridos

Ecuación

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+10} = 3$$

mcm $x(x + 10)$

$$360(x + 10) - 360x = 3x(x + 10)$$

$$3x^2 + 30x - 3600 = 0$$

Simplificando

$$x^2 + 10x - 1200 = 0$$

$$(x + 40)(x - 30) = 0$$

$x_1 = -40$ No satisface

$x_2 = 30$

Solución

trailer 30 kph
Automóvil 30 + 10 = 40 kph

Comprobación

Recorrido del trailer $\frac{360}{30} = 12$ h,

recorrido del automóvil $\frac{360}{40} = 9$ h, de donde 12 – 9 = 3 h menos.

27. Un motociclista recorre 120 millas de *A* a *B* en trayectoria de ida. A su regreso, con una velocidad de 5 millas por hora más que en el de ida, tardó en su recorrido 2 horas menos. Calcula el tiempo total del recorrido.

Datos

A → B

t	tiempo de ida
v	velocidad de ida
$(t - 2)$	tiempo de regreso
$(v + 5)$	velocidad de regreso
$v = \frac{e}{t}$	fórmula de la velocidad

Ecuación

$$v=\frac{120}{t};\quad 120=vt$$

$e = vt$ despejando e en la fórmula de la velocidad

$120 = (v + 5)(t - 2)$

$120 = vt - 2v + 5t - 10$

sustituimos el valor de vt y de v

$$120=120-2\frac{(120)}{t}+5t-10$$

desarrollando

$5t^2 - 10t - 240 = 0$

$t^2 - 2t - 48 = 0$

$(t - 8)(t + 6) = 0$

$t_1 = 8$

$t_2 = -6$ No satisface.

Solución

Tiempo de ida 8 h de regreso 8 – 2 = 6h, en total 8 + 6 = 14 h

Velocidad de ida $v=\frac{120}{8}$ = 15 millas/h, de regreso 15 + 5 = 20 millas/h

Comprobación

El recorrido de 120 millas de ida se hizo en 8 h a 15 millas/h igual a 8(15) = 120 millas; de regreso en 6 h a 20 millas/h igual a 6(20) = 120 millas.

G. Inversiones de dinero

28. Se reciben $ 120 000 por el pago de renta de dos casas durante un año; la renta mensual de una de ellas es $1 000.00 más que la otra. ¿Cuál es la renta mensual de cada casa si la más cara estuvo desocupada dos meses?

Datos

x	renta mensual casa cara	
y	renta mensual casa barata	
$x - y = 1000$	diferencia entre las rentas	(1)
$10x$	tiempo rentada casa cara	
$12y$	tiempo rentada casa barata	
$10x + 12y = 12\,000$	total de renta recibida	(2)

Sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rl} x - \quad y = 1000 & (1) \\ 10x + 12y = 120\,000 & (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x - \cancel{12y} = 12\ 000 \\ 10x + \cancel{12y} = 120\,000 \\ \hline 22x = 132\ 000 \end{array}$$

$x = 6\,000$

sustituyendo en (1)

$6000 - y = 1\,000$

$y = 5\,000$

Solución

casa cara $\$ 6000.00$
casa barata $\$ 5000.00$

Comprobación

renta casa cara 6 000 (10)	= 60 000.00
renta casa barata 5 000 (12)	= 60 000.00
renta recibida	\$ 120 000.00

29. Arturo compró botes de pintura con valor de \$ 240.00, si hubiera comprado 3 botes más por la misma cantidad de dinero, cada producto le habría costado \$ 4.00 menos. Calcula cuántos botes compró y a qué precio.

Datos

x número de botes que se compraron

$\frac{240}{x}$ precio de cada producto

$\frac{240}{x+3}$ precio de cada producto si hubiera comprado 3 botes de más

Ecuación

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+3} + 4$$

$$\text{mcm } x(x+3)$$

$$240(x+3) = 240x + 4(x)(x+3)$$

$$\cancel{240x} + 720 = \cancel{240x} + 4x^2 + 12x$$

$$4x^2 + 12x - 720 = 0$$

Simplificando

$x^2 + 3x - 180 = 0$
$(x + 15)(x - 12) = 0$
$x_1 = 12$
$x_2 = -15$ No satisface

Solución

Se compraron 12 botes y como $\frac{240}{12} = 20$ el precio de cada bote es de \$ 20.00

Comprobación

Si se hubiera comprado 3 botes más por la misma cantidad, cada bote habría costado \$4.00 menos. De donde $12 + 3 = 15$ botes; $\frac{240}{15} = 16$, a \$ 16.00 cada bote o sea \$ 4.00 menos que \$ 20.00

H. Mezclas

30. Se mezclan dulces de cierta cantidad cuyo precio es de $ 280.00 el kilo con otros de $ 360.00 por kilo y se obtienen 1000 kilogramos a $ 312.00 el kilo. ¿Cuántos kilos se emplearon de cada tipo de dulces?

Datos

x	número de kg de $ 280.00	
y	número de kg de $ 360.00	
$x + y = 1000$	kg de mezcla	(1)
$280x$	valor dulces baratos	
$360y$	valor dulces caros	
$312(1000)$	precio venta	
$280x + 360y = 312\,000$		(2)

Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 1000 \qquad (1)\\ 280x + 360y &= 312\,000 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cancel{280x} - 280y &= -280\,000\\ \cancel{280x} + 360y &= 312\,000\\ \hline 80y &= 32\,000\\ y &= 400 \end{aligned}$$

sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} x + 400 &= 1000\\ x &= 600 \end{aligned}$$

Solución

600 kilos de $ 280.00 y 400 de $ 360.00

Comprobación

600 + 400 = 1000 kilos de dulce

Precio:

$$\begin{aligned} 600(280) &= 168\,000\\ 400(360) &= \underline{144\,000}\\ &\ 312\,000 \end{aligned}$$

$$\frac{312\,000}{1\,000} = \$\,312.00 \text{ el kilo}$$

CAPÍTULO 19

Razones y proporciones

1 Razón

La razón de un número a con otro número b distinto de cero es el *cociente* que resulta de *dividir* a entre b; o sea, *razón es el número que resulta de comparar por cociente dos magnitudes,* lo que puede expresarse en cualquiera de las formas siguientes:

$\frac{a}{b}$; $a : b$; a/b se lee "a es a b"

Si a y b son magnitudes de la misma especie se deben expresar en la misma unidad para que tenga sentido.

Ejemplo:

Para obtener la razón de 2 m a 9 dm se convierten los 2 m a dm.

La razón queda $\frac{9}{20}$, en tales casos la razón representa un número abstracto

y es la respuesta a la pregunta: ¿qué múltiplo o fracción de b es el número a?

También existen razones de magnitudes de naturaleza diferente; por ejemplo, en física la velocidad v de un cuerpo se expresa como espacio sobre tiempo, las cuales son magnitudes de distinta especie.

En $V = \frac{s}{t}$, la razón $\frac{s}{t}$ representa la porción de s que corresponde a una unidad de t.

La razón se expresa como una fracción, de ahí que sus dos términos puedan multiplicarse o dividirse por un mismo número diferente de cero sin que se altere su valor.

Ejemplos:

1. Separar el número 27 de dos partes que estén en razón 4 : 5

Ecuación

$$4x + 5x = 27$$
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

Sol. $4(3) = 12$
$5(3) = 15$

2. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son proporcionales a los números 3 y 7. ¿Cuánto mide cada uno de estos ángulos?

Ecuación

$3x + 7x = 90°$
$10x = 90°$ *Sol.* $3(9) = 27°$
$x = 9°$ $7(9) = 63°$

3. Los lados de un triángulo cuyo perímetro es de 48 m son entre sí como los números 4, 5, 7, calcular la longitud de cada lado.

Ecuación

$4x + 5x + 7x = 48$ *Sol.* $4(3) = 12$
$16x = 48$ $5(3) = 15$
$x = 3$ $7(3) = 21$

2 Proporción

Una proporción es la *proposición de que dos razones son iguales,* es decir, es la igualdad de dos razones. Puede expresarse en cualquiera de las formas siguientes.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $a : b = c : d$; $a : b :: c : d$

Se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*", en donde los términos *b* y *c* se llaman *medios y a y d se llaman extremos*; también se emplea para *a* y *c* la palabra *antecedente* y para *b* y *d* la de *consecuente.*

3 Propiedades de las proporciones

1. Propiedad fundamental

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicamos cada miembro por bd

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$$

de donde:
$ad = cb$

Se enuncia: *en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

Ejemplo:

$\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$ se obtiene $10 : 5 = 4 : 2$
$(10)(2) = (5)(4)$
$20 = 20$

2. De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$a : b = c : d$

Por propiedad fundamental

$ad = bc$

Divídase cada miembro entre cd

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$$

Simplificando

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

de donde

$a : c = b : d$

Se enuncia: *en toda proporción los medios pueden permutar sus lugares, obteniéndose así otra proporción.*

Ejemplo:

$9 : 12 = 3 : 4$ se obtiene

$9 : 3 = 12 : 4$

3. De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$a : b = c : d$

Por propiedad fundamental

$ad = bc$

Divídase cada miembro entre ac

$$\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$$

Simplificando

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

de donde

$d : c = b : a$

Se enuncia: *en toda proporción se pueden invertir las dos razones, obteniéndose así otra proporción.*

Ejemplo:

$15 : 5 = 18 : 6$ se obtiene

$5 : 15 = 6 : 18$

4. De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Sumando 1 a cada miembro

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

Desarrollando

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Se enuncia: *si cuatro cantidades forman una proporción, la suma del primero y segundo términos es al segundo como la suma del tercero y el cuarto términos es al cuarto.*

Ejemplo:

$$\frac{15}{18}=\frac{5}{6} \text{ se obtiene } \frac{15+18}{18}=\frac{5+6}{6}$$

$$\frac{33}{18}=\frac{11}{6}$$

$$\frac{11}{6}=\frac{11}{6}$$

5. De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Restando 1 a cada miembro

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

Desarrollando

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Se enuncia: *si cuatro cantidades forman una proporción, la diferencia del primero y el segundo términos, es al segundo como la diferencia del tercero y el cuarto términos es al cuarto.*

Ejemplo:

$$\frac{20}{5}=\frac{24}{6} \text{ se obtiene } \frac{20-5}{5}=\frac{24-6}{6}$$

$$\frac{15}{5}=\frac{18}{6}$$

$$3=3$$

6. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (propiedad 4)

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (propiedad 5)

dividiendo miembro a miembro 4 y 5

$$\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{b(a+b)}{b(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}=\frac{d(c+d)}{d(c-d)}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

Se dice que se obtuvo de $a:b=c:d$ por adición y sustracción.

Ejemplo:

Sea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en donde $a + b = 60$, $c = 3$, $d = 2$, obtener a y b

en $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$\frac{60}{b} = \frac{3+2}{2}$

$\frac{60}{b} = \frac{5}{2}$

$5b = 120$

$b = 24$

como

$a + b = 60$

$a + 24 = 60$

$a = 60 - 24$

$a = 36$

4 Variaciones

En algunos problemas, principalmente en física y en química, aparecen dos cantidades que pueden *variar sin que la razón que las relaciona cambie.*

5 Variación directamente proporcional

Observa el siguiente ejemplo.

Supongamos que una persona compra una tela cuyo precio es de $ 15.00 el metro. Para hacer la compra tendrá que manejar dos cantidades: la longitud de la tela (L) que piensa comprar y el importe de la compra (I).

L	I
si compra 2 m	paga 30
3 m	45
4 m	60

A cada valor de L le corresponde uno de I.

Esta relación se puede expresar de las siguientes maneras:

Primer caso $L \to I$		*Segundo caso* $I \to L$	
2	30	30	2
3	45	45	3
4	60	60	4

Observa que la *razón* entre cada par de valores es *constante*. En el primer caso tenemos $\frac{2}{30}=\frac{3}{45}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$; *la constante de proporcionalidad* es $\frac{1}{15}$.

En el segundo caso se tiene $\frac{30}{2}=\frac{45}{3}=\frac{60}{4}=15$; *la constante de proporcionalidad* es 15. La *constante de proporcionalidad* siempre se expresa con la letra k, y a menos que se cite en el problema es necesario *calcularla en cada caso.* Para determinar la constante de proporcionalidad basta conocer el valor de a y de b, de donde

$$\frac{a}{b}=k$$

Definición: Dadas dos cantidades, si a un aumento de una corresponde un aumento de la otra, o a una disminución de una corresponde una disminución de la otra, se dice que son directamente proporcionales.

$$\frac{a}{b}=k$$

Despejando

$$a = bk$$

Se enuncia: *si una cantidad varía en forma directamente proporcional con otra, entonces la primera es igual al producto de la segunda por la constante de proporcionalidad k.*

Se usan con el mismo significado que corresponde a "variación directamente proporcional" las expresiones:

"a es directamente proporcional a b", "a varía directamente como b"
"a varía como b", "a es proporcional a b".

Entre otras, son *cantidades directamente proporcionales,* las siguientes:

- el espacio y el tiempo;
- el radio de una circunferencia y la longitud de la misma;
- el importe del impuesto del agua y el número de litros consumidos;
- el interés que produce el dinero ahorrado en un banco y la cantidad de dinero depositado;
- el peso de una mercancía y su costo;
- el alargamiento de un resorte y la fuerza empleada (dentro de ciertos límites);
- el número de obreros al trabajo que realizan, suponiendo a cada obrero el mismo rendimiento (dentro de ciertos límites);
- el volumen de gas a la temperatura, si la presión es constante (dentro de ciertos límites);
- la intensidad de una corriente al voltaje, si la resistencia es constante.

NOTA: Los problemas en que intervienen cantidades directamente proporcionales también pueden resolverse planteando una *proporción.*

Ejemplo:

En un instante dado la longitud de una sombra es directamente proporcional a la altura del objeto que la produce. Si un poste de dos metros de altura proyecta una sombra de 0.8 m de largo, ¿cuál es la altura de un árbol cuya sombra es de 4 m?

Datos

h = 2 m = altura
l = 0.8 m = longitud sombra

por ser directamente proporcionales, tenemos

$$\frac{l}{h}=k$$

calculamos el valor de k

$$k = \frac{l}{h} = \frac{0.8}{2} = \frac{8}{20}$$

$$k = \frac{8}{20}$$

con $l = 0.8$, $k = \frac{8}{20}$

calculamos h

$$h = \frac{l}{k} = \frac{4}{\frac{8}{20}} = \frac{80}{8} = 10 \text{ m}$$

Sol. 10 m

6

Variación inversamente proporcional

Definición: dadas dos cantidades, puede ocurrir que a todo aumento de una corresponda una disminución de la otra, entonces se dice que las dos cantidades son inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Supongamos que un tren debe recorrer 300 km; designamos con v la velocidad y con t el tiempo, entonces podemos señalar:

v	20	25	30	50
t	15	12	10	6

Observa que a medida que la velocidad aumenta el tiempo disminuye, y que cuando la velocidad disminuye el tiempo aumenta. Por tanto, aseguramos que la velocidad y el tiempo son cantidades inversamente proporcionales.

En el ejemplo el producto de $vt = 300$, en este caso 300 es la *constante de proporcionalidad.*

Generalizando, se expresa:

$$ab = k$$

despejando

$$a = \frac{1}{b}k$$

$$a = \frac{k}{b}$$

esta expresión se enuncia: *si una cantidad varía inversa y proporcionalmente con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por el recíproco de la segunda.*

Entre otras, son *cantidades inversamente proporcionales* las siguientes:

- el número de personas y el tiempo empleado en consumir los víveres existentes, si la cantidad de víveres es constante;
- el número de obreros que realizan un trabajo y el tiempo empleado (dentro de ciertos límites);
- La longitud de un rectángulo al ancho, cuando el área es constante.

  Los problemas en que intervienen cantidades inversamente proporcionales *no se pueden* resolver con proporciones.

Ejemplo:

Para terminar una excavación 24 obreros tardan 16 días, ¿cuántos obreros se necesitan para terminarla en 12 días?

Datos

$a = 24$ obreros
$b = 16$ días
Por ser inversamente proporcional, tenemos $ab = k$

Calculamos el valor de k

$k = ab = 24(16) = 384$
de donde con $b = 16$, $k = 384$,

$a = \frac{k}{b} = \frac{384}{12} = 32$ obreros — *Sol.* 32 obreros

Conclusión: Para resolver los problemas sobre *variaciones* es necesario:

1. Señalar *de qué tipo* es la variación, a menos que el texto del problema lo indique.
2. Establecer la ecuación de la variación con base en los datos del problema, por lo que surge la necesidad de resolver problemas como:

Expresar como ecuaciones las expresiones:

1. m es directamente proporcional a n:

$\frac{m}{n} = k$ — *Sol.* $m = nk$

2. s es inversamente proporcional a t:

$st = k$ — *Sol.* $s = \frac{k}{t}$

Ejemplos:

Para resolver los problemas que se indican a continuación es necesario: calcular el valor de k, sustituir y obtener el resultado.

1. Si y es directamente proporcional a x; y es igual a 2 cuando $x = 3$. Obtener el valor de y cuando $x = 7$.

$y = xk$
$2 = 3k$
$k = \frac{2}{3}$

de donde

$y = xk$
$y = 7\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}$ — *Sol.* $\frac{14}{3}$

2. Si w es directamente proporcional a x; y es igual a 15 cuando $x = 5$. Obtener el valor de w cuando $x = 2$.

$w = xk$
$15 = 5k$
$k = 3$

de donde

$w = xk$
$w = (2)(3) = 6$
$w = 6$ *Sol.* 6

3. Si w es inversamente proporcional a y; y es igual a 4 cuando $y = 5$. Obtener el valor de w si $y = 2$.

$wy = k$
$k = 4(5) = 20$

de donde

$$w = \frac{k}{y} = \frac{20}{2} = 10$$

$w = 10$ *Sol.* 10

7 Variación conjunta (fuera del programa)

Las diferentes clases de variaciones pueden presentarse simultáneamente en un problema, si esto sucede recibe el nombre de *variación conjunta.*

Definición: *si una cantidad varía conjunta y proporcionalmente con dos o más cantidades, entonces la primera es igual al producto de la constante de proporcionalidad por el producto de las otras.*

$$a = kbc$$

$$k = \frac{a}{bc}$$

Se usan con el mismo significado que corresponde a "variación conjunta" las expresiones:

"a varía al mismo tiempo que b y c"
"a es proporcional a b y c"

Ejemplo:

$z = \frac{kx}{y}$ señala que z varía directamente con x e inversamente con y

$w = \frac{kxy^3}{z^2}$ significa que w varía directamente con x y y^3 e inversamente con z^2.

Los problemas de variación conjunta constan de tres elementos:

1. Una *ley* relativa al problema a partir de la cual se puede escribir la ecuación de variación.
2. Un grupo de datos que permiten *obtener* el valor de la constante de proporcionalidad k.
3. Otro grupo de datos que con *excepción* de uno son cantidades conocidas; empleando la información contenida en los párrafos anteriores se puede calcular la cantidad desconocida.

Ejemplo:

El límite de ruptura de una viga horizontal apoyada en ambos extremos es *directamente proporcional* tanto al ancho de la viga como al cuadrado de su profundidad e *inversamente proporcional* a la distancia entre los puntos de apoyo. Si una viga de 40 por 60 cm de sección y 15 m de longitud puede soportar una carga de 1470 kg, calcular el límite de ruptura para la viga si ésta se coloca tomando como base el lado de 60 cm.

Datos

$a = 40$ cm = ancho
$p = 60$ cm = profundidad
$d = 15$ m = distancia
$c = 1470$ kg = carga

la ley se expresa

$$c = \frac{kap^2}{d}$$

despejamos k

$$k = \frac{cd}{ap^2}$$

$$k = \frac{1470(1500)}{40(60)^2} = \frac{1470(75)}{2(3600)} = \frac{49(75)}{2(120)} = \frac{49(5)}{2(8)} = \frac{245}{16}$$

Calculamos c (con los valores de la nueva viga)

$a = 60$
$p = 40$
$d = 15$

$$k = \frac{245}{16}$$

$$c = \frac{kap^2}{d}$$

$$c = \frac{\frac{1225}{8}(6)(4)(4)}{15}$$

$c = 980$ kg

Ejemplo:

La cantidad de carbón que consume un barco que navega con velocidad uniforme es directamente proporcional a la distancia recorrida y al cuadrado de la velocidad. Si el barco emplea 45 toneladas de combustible para recorrer 128 km con velocidad de 24 km por hora, ¿cuántas toneladas empleará si recorre 192 km a una velocidad de 35 km por hora?

Datos

$T = 45$ toneladas
$d = 128$ km distancia
$v = 24$ km/h velocidad

la ley se expresa

$T = k(dv^2)$

despejamos k

$$k = \frac{T}{dv^2}$$

$$k = \frac{45}{128(24^2)} = \frac{5}{8192}$$

Calculamos T (con los valores del otro recorrido)

$d = 192$
$v = 35$
$T = k(dv^2)$

$$T = \frac{5}{8192}(192)(35)^2$$

$T = 143.55$

Sol. 143.55 toneladas

EJERCICIO 24

1. Una barra de cobre de 30 cm de longitud se cortará en tres partes de tal manera que las longitudes estén en la razón 5 : 4 : 1, ¿cuál es la longitud de cada parte?

   Sol. 15, 12 y 3 cm

2. Un terreno de 840 m^2 de superficie va a dividirse en dos lotes de manera que el menor sea $\frac{3}{4}$ del mayor, ¿cuánto medirá cada lote?

   Sol. 360 y 480 m^2

3. Fernando Valenzuela fue al bat 135 veces y bateó 50 hits, ¿cuál es su porcentaje de bateo?

   Sol. 0.370

   Nota: El porcentaje de bateo es la razón del número de hits entre el número de veces al bat.

4. El número de habitaciones en nuestro país en 1980 era de 78 565 413 distribuidos en una extensión territorial de 1 972 546 km^2, ¿cuál es la densidad de población.

   Sol. 39 habitaciones por km^2

5. Una vigueta de 12 m de longitud se va a dividir en dos partes de manera que la parte menor sea $\frac{2}{3}$ de la mayor, ¿cuánto medirá cada parte?

   Sol. 4.8 y 7.2 m

6. En una escuela hay ocho enfermos del riñón entre los 450 alumnos, ¿cuál es la morbilidad?

   Sol. $\frac{8}{450}$

   Nota: En este caso la morbilidad es la razón del número de enfermos del riñón entre el número de alumnos.

7. Una costurera produce 40 camisas del tipo "de vestir" por cada 60 unidades del tipo "popular", ¿cuál es la razón del número de unidades del tipo "popular" respecto al de "vestir"?

Sol. $\frac{3}{2}$

Expresar con ecuación o resolver, según proceda.

8. t es directamente proporcional a r.

Sol. $t = kr$

9. s es inversamente proporcional a m.

Sol. $s = \frac{k}{m}$

10. w es conjuntamente proporcional a e y a m.

Sol. $w = kem$

11. Si r es directamente proporcional a x y es igual a 15 cuando $x = 5$, obtener el valor de r cuando $x = 2$.

Sol. 6

12. t es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cubo de y.

Sol. $t = \frac{xk}{y^3}$

13. Si w es directamente proporcional a x y es igual a 2 cuando $x = 3$, obtener el valor de w cuando $x = 7$.

Sol. $w = \frac{14}{3}$

14. Si w es inversamente proporcional a x y $w = 6$ cuando $x = 8$, obténgase el valor de w cuando $x = 12$.

Sol. 4

15. Un médico examina a un enfermo y encuentra que su corazón late uniformemente 20 veces en 12. segundos, ¿cuántos latidos detectará el médico en un minuto?

Sol. 100 latidos

16. Un avión en condiciones normales de vuelo consume 10 toneladas de combustible en un recorrido de 2500 km, ¿cuántas toneladas consumirá en un viaje de 3200 km en las mismas condiciones de vuelo?

Sol. 12.8 toneladas

17. En una fábrica 15 obreros elaboran un pedido de mercancía en ocho días de trabajo, ¿cuántos obreros tendrán que *aumentarse* para entregar el pedido en tres días?

Sol. 25 obreros

18. Un tanque de agua tarda 90 min en llenarse con dos surtidores, ¿cuántos surtidores se deben emplear para llenarlo en 30 min?

Sol. 6 surtidores

19. El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo y el centro de la Tierra. Si una persona peso 90 kg sobre la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesará a 220 km de altura? Considere que el radio de la Tierra es de 6 400 km.

Sol. 84 kg

20. Resolver $\frac{x-1}{x}=\frac{3}{2}$

Sol. –2

21. Un trailer recorre cierta distancia en nueve horas a una velocidad de 52 kph, ¿qué velocidad deberá tomar para hacer el mismo recorrido en seis horas?

Sol. 78 kph

22. En un internado hay 420 niños y comida para 30 días, ¿cuánto duraría esa misma comida si fueran 630 niños?

Sol. 20 días

CAPÍTULO 20

Progresiones

1 Sucesiones

Estudiaremos las propiedades de ciertos conjuntos de números que se consideran especiales debido a que los elementos o términos *se forman ordenadamente siguiendo una determinada ley.*

Ejemplo:

Los elementos del conjunto formado por los n números

$$3, 5, 7, \ldots 2n + 1$$

que se obtienen de forma ordenada multiplicando el número que indica el orden del término por 2 y aumentando al resultado en *uno,* así, el primer término es $2(1) + 1 = 3$; el segundo término es $2(2) + 1 = 5$; el tercer término es $2(3) + 1 = 7$, y así sucesivamente.

Es tal la importancia de los conjuntos de este tipo que se les da el nombre especial de *sucesiones.*

Una sucesión de números se define como *un conjunto ordenado de números formados de acuerdo con una ley dada.*

En el ejemplo la ley es $2n + 1$.

Para que haya una sucesión es requisito indispensable que *exista una ley o fórmula* con la cual sea posible obtener cualquier término de la sucesión.

La suma indicada de los términos de una sucesión reciben el nombre *de serie.*

Si la sucesión tiene un último término se le llama sucesión finita, si el número de términos es ilimitado se le denomina sucesión infinita.

Las series infinitas son objeto de estudio en cálculo diferencial; estudiaremos solamente dos clases de sucesiones, las llamadas *progresiones aritméticas y las geométricas.*

2 Progresión aritmética

Ésta es una sucesión de números tal que cada uno de los términos, después del primero, se obtiene *sumando al término* que le precede un número fijo llamado *diferencia común* de la progresión. Sus elementos fundamentales son:

a = primer término
l = último término
d = diferencia común
n = número de términos de la progresión
S = suma de los n primeros términos de la progresión

Si se conocen cualesquiera *tres* de estos elementos es posible determinar los otros dos.

Ejemplo:

Sea la progresión aritmética 2, 7, 12, 17, 22, 27, donde

2 = primer término
27 = último término
5 = diferencia común
6 = número de términos de la progresión
87 = suma de los términos de la progresión

3

Fórmula para el cálculo del último término, *l*

Tenemos

$$
\begin{aligned}
a_1 &\text{ ——— } a_1\\
a_2 &\text{ ——— } a_1 + d\\
a_3 &\text{ ——— } a_1 + 2d\\
a_n &\text{ ——— } a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

de donde

como $a_1 = a$

$$a_n = l$$

Se obtiene

$$l = a + (n-1)d$$

I. *Fórmula para el cálculo del último término*

La fórmula I contiene cuatro literales; es posible calcular una de ellas cuando conocemos las otras tres.

Ejemplos:

Calcular el decimocuarto término de la progresión aritmética 1, 4, 7, ...

$a = 1$ $\qquad l = a + (n-1)d$
$d = 3$ $\qquad l = 1 + (14-1)\,3$
$n = 14$ $\qquad l = 40$
$l =$

Calcular el primer término de la progresión aritmética conociendo:

$d = -3$ $\qquad l = a + (n-1)d$
$l = 21$ $\qquad 21 = a + (10-1)(-3)$
$n = 10$ $\qquad 21 = a - 27$
$a =$ $\qquad a = 21 + 27$
$\qquad a = 48$

Calcular el número de términos de una progresión aritmética conociendo:

$a = -5$ $\qquad l = a + (n-1)d$
$d = 3$ $\qquad 31 = -5 + (n-1)3$
$l = 31$ $\qquad 31 = -5 + 3n - 3$
$n =$ $\qquad n = \dfrac{31+8}{3}$
$\qquad n = 13$

Calcular la diferencia común en una progresión aritmética conociendo:

$a = 49$	$l = a + (n - 1)d$
$l = 25$	$25 = 49 + (9 - 1)d$
$n = 9$	$25 = 49 + 9d - d$
$d =$	$8d = 25 - 49$
	$8d = -24$
	$d = -3$

Cuando $d > 0$ se tiene una progresión creciente; si $d < 0$ la progresión es decreciente.

4

Fórmula para el cálculo de la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética

Para obtener *la suma* S de los n primeros términos de una progresión aritmética, en la cual el primer término es a y la diferencia común es d, observamos que los términos de la progresión son a, $a + d$, $a + 2d$, y así sucesivamente, hasta llegar al último término que es $l = a + (n - 1)d$.

Por lo tanto:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + [a + (n - 1)d] \quad (1)$$

considerando que hay n términos, se ordena:

$$S = an + [d + 2d + 3d + \ldots + (n - 1)d] \quad (2)$$

invertimos el orden de los términos, principiamos con l.

$$S = l(l - d) + (l - 2d) + \ldots + l + (n - 1)(-d) \quad (3)$$

$$S = ln - (d + 2d + \ldots + (n - 1)(d) \quad (4)$$

sumando (2) y (4)

$$2S = an + ln; \quad S = \frac{n(a + l)}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{n}{2}(a + l)}$$

II. *Fórmula para el cálculo de la suma de los n primeros términos en función de a, n y l.*

La fórmula II podemos ponerla en función del primer término, sustituyendo el valor de l.

Como $l = a + (n - 1)d$ sustituimos en $S = \frac{n}{2}(a + l)$; $S = \frac{n}{2}\left[a + a + (n - 1)d\right]$, de donde,

$$\boxed{S = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]}$$

III. *Fórmula para el cálculo de la suma de los n primeros términos en función de a, n y d.*

Ejemplo:

En la progresión aritmética 2, 4, 6 calcular el término del lugar 9 y la suma de los 9 primeros términos.

Observamos la progresión y determinamos los datos que contiene:

$a = 2$
$d = 2$
$n = 9$
$l_9 =$
$S_9 =$

cálculo de

$$d = 6 - 4 = 2$$
$$l_9 = a + (n - 1)d$$
$$l_9 = 2 + (9 - 1)2$$
$$l_9 = 18$$
$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$S = \frac{9}{2}(2 + 18)$$
$$S = 9(10)$$
$$S = 90$$

Ejemplos de aplicación de las fórmulas:

I. $l = a + (n - 1)d$ II. $S = \frac{n}{2}(a + l)$ III. $S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

Combinando I y II o I con III tenemos dos ecuaciones con cinco literales que nos permiten calcular dos de ellas cuando conocemos las otras tres.

Ejemplo:

El primer término de una progresión aritmética es 5, el último es 45 y la suma es 275, calcular n y d.

$$a = 5$$
$$l = 45$$
$$S = 275$$
$$n =$$
$$d =$$
$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$275 = \frac{n}{2}(5 + 45)$$
$$550 = n(50)$$
$$n = 11$$
$$l = a + (n - 1)d$$
$$45 = 5 + (11 - 1)d$$
$$45 = 5 + 10d$$
$$10d = 45 - 5$$
$$d = 4$$

Ejemplo:

¿Cuántos términos de la progresión aritmética 3, 9, 15, . . . hemos de sumar para que la suma sea igual a 363 y cuál es el último término?

Datos

$a = 3$
$d = 6$
$S = 363$
$n =$
$l =$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$
$$363 = \frac{n}{2}[2(3) + (n - 1)6]$$
$$726 = \cancel{6n} + 6n^2 - \cancel{6n}$$
$$6n^2 - 726 = 0$$
$$n^2 = \frac{726}{6}$$

$$n = \pm\sqrt{121}$$
$$n_1 = 11$$
$n_2 = -11$ no satisface la ecuación
$$l = a + (n - 1)\,d$$
$$l = 3 + (11 - 1)\,6$$
$$l = 3 + 60$$
$$l = 63$$

Sol. 11, 63

Ejemplo:

¿Cuál es el primer término y el número de términos de la progresión aritmética donde la diferencia común es -5, el último término es -58 y la suma es de -366?

$$d = -5$$
$$l = -58$$
$$S = +366$$
$$a =$$
$$n =$$

Formamos un sistema de dos ecuaciones.

$$l = a + (n-1)d$$
$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

Sustituyendo valores

$$-58 = a + (n-1)(-5)$$
$$-366 = \frac{n}{2}(a - 58)$$

Operaciones

$$-58 = a - 5n + 5$$
$$-732 = an - 58n$$

$$a - 5n = -63 \qquad (1)$$
$$an - 58n = -732 \qquad (2)$$

$$a = 5n - 63 \qquad (3)$$

Sustituyendo en (2)

$$n(5n - 63) - 58n = -732$$
$$5n^2 - 63n - 58n + 732 = 0$$
$$5n^2 - 121n + 732 = 0$$
$$n = \frac{121 \pm \sqrt{121^2 - 4(5)(732)}}{2(5)}$$
$$n_1 = \frac{122}{10} \text{ no satisface la ecuación}$$
$$n_2 = 12$$

Cálculo a en (3)

$$a = 5(12) - 63$$
$$a = -3$$

Sol. $a = -3$, $n = 12$

5 Inserción de medios aritméticos entre dos números dados. Interpolación

En una progresión aritmética los términos que están entre dos términos dados a y l se llaman *medios aritméticos* entre a y l; los términos a y l reciben el nombre de *extremos*.

Ejemplo:

En la progresión aritmética 3, 6, 9, 12, 15, los medios aritméticos entre los extremos 3 y 15 son 6, 9, 12.

5.1 Procedimiento para interpolar

Ejemplo:

Sea interpolar cuatro medios aritméticos entre 7 y −3.

Debemos encontrar cuatro números que con 7 y el −3 como extremos formen una progresión aritmética; necesitamos hallar la *diferencia d* de una progresión de seis términos con:

$$
\begin{aligned}
a &= 7 \\
l &= -3 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l &= a + (n - 1)d \\
-3 &= 7 + (6 - 1)d \\
-3 &= 7 + 5d \\
d &= -2
\end{aligned}
$$

Sol. Los cuatro medios aritméticos entre 7 y −3 son: 7, 5, 3, 1, −1, −3.

5.2 Media aritmética

Si se interpola *un solo medio* aritmético entre dos números dados, se le llama su media aritmética. Si A es la media aritmética de los números a y b tenemos:

$$A = \frac{a + b}{2}$$

Es decir, la media aritmética de dos números dados es igual a la mitad de su suma.

6 Progresión geométrica

Es una sucesión de números en la cual, cualquier número posterior al primero se obtiene *multiplicando el término* anterior por un número no nulo llamado *razón* de la progresión.

Sus elementos fundamentales son:

a = primer término
l = último término
r = razón geométrica
n = número de términos de la progresión
S = suma de los n primeros términos de la progresión

Si se conocen cualesquiera tres de estos elementos pueden determinarse los otros dos.

Ejemplo:

Sea la progresión geométrica 2, 6, 18, 54, 162 donde

2 = primer término
162 = último término
3 = razón geométrica
5 = número de términos de la progresión
242 = suma de los términos de la progresión

7 Fórmula para el cálculo del último término, l

$$\begin{array}{lcl} a_1 & \text{———} & a_1 \\ a_2 & \text{———} & a_1r \\ a_3 & \text{———} & a_1r^2 \\ a_4 & \text{———} & a_1r^3 \\ a_n & \text{———} & a_1r^{n-1} \end{array}$$

de donde

$$a_1 = a$$
$$a_n = l$$

se obtiene

$$\boxed{l = ar^{n-1}}$$

IV. *Fórmula para el cálculo del último término.*

La fórmula IV contiene cuatro literales y permite calcular una de ellas cuando se conocen las otras tres.

Ejemplos:

Calcular el octavo término de la progresión geométrica 16, −8, 4 ...
Observamos la progresión y determinamos los datos que contiene:

$$a = 16$$
$$r = -\frac{1}{2}$$
$$n = 8$$
$$l =$$

Cálculo de d: $-8 \div 16 = -\frac{1}{2}$

$$l = ar^{n\ 1}$$
$$l = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$
$$l = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{7}$$
$$l = 16\left(-\frac{1}{2^7}\right)$$
$$l = 16\left(-\frac{1}{128}\right)$$
$$l = -\frac{1}{8}$$

Sol. $l = -\frac{1}{8}$

Ejemplos:

En una progresión geométrica calcular el número de términos con:

$$a = \frac{1}{9}$$
$$l = 81$$
$$r = 3$$
$$n =$$
$$l = ar^{n-1}$$
$$81 = \left(\frac{1}{9}\right)^{3^{n-1}}$$
$$\frac{81}{\frac{1}{9}} = 3^{n-1}$$
$$729 = 3^{n-1}$$
$$3^6 = 3^{n-1}$$
$$6 = n - 1$$
$$n = 7$$

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

de donde:
$729 = 3^6$

Sol. $n = 7$

En una progresión geométrica calcular la razón con:

$$a = 2$$
$$l = 64$$
$$n = 6$$
$$r =$$

$$l = ar^{n-1}$$
$$64 = 2r^{6-1}$$
$$\frac{64}{2} = r^5$$
$$32 = r^5$$
$$2^5 = r^5$$
$$r = 2$$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

de donde:
$32 = 2^5$
$2^5 = r^5$
$r = 2$

Sol. $r = 2$

8

Fórmula para el cálculo de la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Para obtener *la suma S* de los *n* primeros términos de una progresión geométrica, en la cual el primer término es *a* y la razón es *r*, observamos que los términos de la progresión son *a*, *ar*, ar^2 y así sucesivamente hasta llegar al último término:

Por lo tanto, ar^{n-1}

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$ multiplicamos ambos miembros por *r*

$S - rS = a - ar^n$ restamos miembro a miembro

$S(1 - r) = a - ar^n$ factorizando

$$S = \frac{a - ar^n}{(1-r)}$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

V. *Fórmula para calcular la suma de los n primeros términos en función de a, n, y r.*

La fórmula V podemos ponerla en función del último término, como

$$l = ar^{n-1}$$

multiplicando ambos miembros por *r*, queda

$$lr = ar^n$$

en la igualdad

$$S = \frac{a - ar^n}{(1-r)}$$

Sustituimos el valor de ar^n

$$S = \frac{a - lr}{1-r}$$

VI. *Fórmula para el cálculo de la suma de los n primeros términos en función de a, l, y r.*

Ejemplos de aplicación con las fórmulas:

IV. $l = ar^{n-1}$	V. $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$	VI. $S = \frac{a-lr}{1-r}$

Combinando IV y V o IV y VI tenemos dos ecuaciones con cinco literales que nos permiten calcular dos de ellas cuando conocemos las otras tres.

Ejemplos:

En una progresión geométrica el último término es $\frac{1}{4}$, el número de términos nueve y la razón $\frac{1}{2}$, calcular el primer término y la suma de ellos.

$$l = \frac{1}{4}$$
$$n = 9$$
$$r = \frac{1}{2}$$
$$a =$$
$$S =$$
$$l = ar^{n-1}$$
$$\frac{1}{4} = a\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}$$
$$\frac{1}{4} = a\left(\frac{1}{2^8}\right)$$
$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{256}} = a$$

$$a = \frac{256}{4} = 64$$

$$S = \frac{a - lr}{1 - r}$$
$$S = \frac{64 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$S = \frac{64 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}$$
$$S = \frac{\frac{511}{8}}{\frac{1}{2}}$$
$$S = \frac{1022}{8} = \frac{511}{4}$$
$$S = \frac{511}{4}$$

Sol. a = 64
$S = \frac{511}{4}$

En una progresión geométrica obtener la razón y la suma de los términos con:

$$a = -32$$
$$n = 8$$
$$l = \frac{1}{4}$$
$$r =$$
$$S =$$
$$l = ar^{n-1}$$
$$\frac{1}{4} = -32r^{8-1}$$
$$-\frac{\frac{1}{4}}{32} = r^7$$
$$-\frac{1}{128} = r^7$$

$$-\frac{1}{2^7} = r^7$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = r^7$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{a - lr}{1 - r}$$

$$S = \frac{-32 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S = \frac{-32 + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{255}{8}}{\frac{3}{2}} = -\frac{510}{24}$$

$$S = -\frac{510}{24}$$

Sol. $r = -\frac{1}{2}, \quad S = -\frac{510}{24}$

9

Inserción de medios geométricos entre dos números. Interpolación

En una progresión geométrica los términos que están entre dos términos dados a y l se llaman *medios geométricos* entre a y l; los términos a y l reciben el nombre de *extremos*.

Ejemplo:

En la progresión geométrica -8, 24, -72, 216, -648 los medios geométricos entre los extremos -8 y -648 son 24, -72, 216.

9.1 Procedimiento para interpolar

Ejemplo:

Interpolar seis medios geométricos entre $\frac{1}{4}$ y 32.

Debemos encontrar seis números que con $\frac{1}{4}$ y 32 como extremos formen una progresión geométrica; necesitamos hallar la *diferencia* r de una progresión de ocho términos con:

$$a = \frac{1}{4}$$

$$l = 32$$

$$n = 8$$

$$l = ar^{n-1}$$

$$32 = \frac{1}{4} r^{8-1}$$

$$\frac{32}{\frac{1}{4}} = r^7$$

$$128 = r^7$$
$$2^7 = r^7$$
$$r = 2$$

Sol. Los seis medios geométricos entre $\frac{1}{4}$ y 32 son

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{4}, \underline{8}, \underline{16}, 32$

9.1 Media geométrica (también se le llama media proporcional)

Si se interpola un solo medio geométrico entre dos números dados se obtiene la *media geométrica*. Sea A la media geométrica de los números a, y b, lo cual significa que a, A, b, están en progresión geométrica, por tanto, la razón es:

$$r = \frac{A}{a} = \frac{b}{A}$$

con

$$\frac{A}{a} = \frac{b}{A}$$
$$A^2 = ab$$
$$A = \pm\sqrt{ab}$$

de donde, la media geométrica de dos números dados es igual, en valor absoluto, a la raíz cuadrada de su producto.

Ejemplo:

Obtener la media geométrica entre 8 y 128.

$$A = \pm\sqrt{ab}$$
$$A = \pm\sqrt{8(128)} = \pm\sqrt{1024} = \pm 32$$

Sol. 32

10
Problemas

1. Una piedra cae libremente y la altura s en metros que cae en t segundos es aproximadamente de $4.9\,t^2$. ¿cuántos metros cae la piedra en 8 segundos?

La altura que la piedra cae en el primer segundo es de 4.9 m; en el siguiente segundo cae $4.9(2)^2 - 4.9 = 14.7$ m; en el tercer segundo cae $4.9(3)^2 - 4.9\,(2)^2 = 24.5$ m.
Observamos que es una progresión geométrica, donde

$a = 4.9$
$d = 24.5 - 14.7 = 9.8$
$n = 8$
$l =$

$l = a + (n - 1)d$
$l = 4.9 + (8 - 1)\,9.8$
$l = 4.9 + 7(9.8) = 73.5$ m

Sol. 73.5 m

2. Una pelota cae desde una altura de 81 m, cada vez que toca tierra rebota $\frac{2}{3}$ de altura que ha caído, ¿qué distancia ha recorrido la pelota cuando golpeó la tierra por quinta vez?

$$a = 81$$
$$r = \frac{2}{3}$$
$$n = 5$$
$$S =$$
$$S = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$
$$S = \frac{81\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{81\left(1-\frac{32}{243}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{51\ 273}{243} = 211\,m$$

Sol. 211 m

3. Una persona decide ahorrar *un* peso el día 1 de marzo, \$ 2 el día 2, \$ 4 el día 3, \$ 8 el día 4, y así hasta el día 15, inclusive, del mismo mes. ¿Cuánto tendrá para ese día y cuánto si su ahorro se prolonga en la misma forma por 20 días?

$$a = 1$$
$$r = 2$$
$$n = 15$$
$$n = 20$$
$$S_1 =$$
$$S_2 =$$
$$S = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$
$$S = \frac{1\,(1-2^{15})}{1-2} = \frac{1\,(1-32\ 768)}{-1} = 32\ 767$$
$$S = \frac{1\,(1-2^{20})}{1-2} = \frac{1\,(1-1\,048\ 576)}{-1} = 1\,048\ 575$$

Sol. 32 727, 1 048 575

EJERCICIO 25

Escribe los n primeros términos de las progresiones aritméticas que contienen los elementos que se indican:

1. $a = 3;\ d = 3;\ n = 6$ — *Sol.* 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21
2. $a = 6;\ d = -2;\ n = 7$ — *Sol.* 6, 4, 2, 0, −2, −4, −6
3. $a = -4;\ d = 2;\ n = 6$ — *Sol.* −4, −2, 0, 2, 4, 6
4. $a = -1;\ d = 2;\ n = 6$ — *Sol.* −1, 1, 3, 5, 7, 9
5. $a = 7$; segundo término 5; $n = 5$ — *Sol.* 7, 5, 3, 1, −1
6. $a = 8$; segundo término 5; $n = 5$ — *Sol.* 8, 5, 2, −1, −4,

Obtener la suma de las progresiones aritméticas.

7. $a = 3; d = 2; n = 12; S =$ *Sol.* 168

8. $a = 2; l = 29; n = 10; S =$ *Sol.* 155

9. $a = 5; d = -3; n = 8; S =$ *Sol.* -44

10. $a = -7; n = 7; d = -2; S =$ *Sol.* -91

Resuelve estas progresiones:

11. $l = -11; n = 8; S = -32; d =; a =$ *Sol.* $-2, 3$

12. $a = 11; d = -2; S = -28; n =; l =$ *Sol.* $14, -15$

13. $a = 30; l = -10; S = 90; n =; d =$ *Sol.* $9, -5$

14. $a = 45; d = -3; S = 357; n =; l =$ *Sol.* $17, -3$

15. Obtener la media aritmética de $7, -11$. *Sol.* -2

16. La media aritmética de dos números es 6, si uno de los números es el 21, ¿cuál es el otro? *Sol.* -9

17. Entre -4 y 8 interpolar cinco medios aritméticos. *Sol.* $-2, 0, 2, 4, 6$

18. Entre -12 y 4 interpolar cinco medios aritméticos. *Sol.* $-\frac{28}{3}, -\frac{20}{3}, -4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

Escribe los n primeros términos de la progresión geométrica que contienen los elementos que se indican.

19. $a = 3;\ r = 2;\ n = 4$ *Sol.* 3, 6, 12, 24

20. $a = \frac{1}{2};\ r = -2;\ n = 5$ *Sol.* $\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8$

21. $a = 8$; segundo término 4; $n = 5$ *Sol.* $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$

Resolver las progresiones geométricas.

22. $a = 2;\ r = 2;\ n = 7;\ l =$ *Sol.* 128

23. $a = 2;\ l = 64;\ n = 6;\ r =;\ S =$ *Sol.* 2, 126

24. $r = 2;\ S = 635;\ n = 7;\ a =;\ l =$ *Sol.* 5, 320

25. Obtener la media geométrica entre 2 y 32. *Sol.* 8

26. Obtener la media geométrica entre -4 y -25 *Sol.* -10

CAPÍTULO 21

Intervalos

1 Intervalo de una variable

Con frecuencia, el desarrollo de un problema queda restringido a los valores que se asignan a la variable independiente y que tomamos de un subconjunto del conjunto de los números *reales,* los números así considerados forman un *intervalo.*

Sean a y b dos números reales de manera que $a < b$, obtenemos:

1.1 Intervalo abierto

El *intervalo abierto* no incluye a sus extremos que representan a y b:

$a < x < b$

Ejemplo:

$-2 < x < 1$

gráficamente se expresa

1.2 Intervalo cerrado

Si al intervalo abierto se le incluyen sus extremos a y b, se le llama *intervalo cerrado* de a y b;

$a \leq x \leq b$

Ejemplo:

$-2 \leq x \leq 0$

gráficamente se expresa

1.3 Intervalo semiabierto

Al intervalo que contiene a uno de sus extremos se le llama intervalo *semiabierto:*

$a < x \leq b$

Ejemplo:

$-1 < x \leq 2$

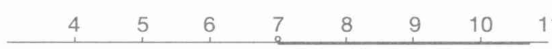
gráficamente se expresa

1.4 Intervalo infinito

El *intervalo infinito* es el que forman todos los números x tales que $x < a$, $x \leq a$; también $x > a$, $x \geq a$

Ejemplos:

Todos los números mayores que 7 se expresan $x > 7$, gráficamente:



Todos los números igual o menor que –1 se expresan $x \leq -1$, gráficamente

EJERCICIO 26

Identifica y expresa gráficamente.

1. $-3 < x < 0$
2. $-4 \leq x < 0$
3. $x \geq 2$
4. $x \geq 5$
5. $x \leq 0$
6. $5 < x < 7$
7. $-2 \leq x \leq 0$
8. $-1 \leq x < 2$
9. $x < 2$

CAPÍTULO 22

Desigualdades

En matemáticas una desigualdad señala que un número real es mayor o menor que otro.

Dados números reales a y b decimos que a es menor que b si localizados en la recta numérica, a queda a la izquierda de b.

se expresa $a < b$, el símbolo < se lee: "*es menor que*" otra forma de expresar este concepto es: $b > a$, el símbolo > se lee: "*es mayor que*".

Si los signos de dos desigualdades apuntan en la misma dirección se dice que son del *mismo sentido*, si los signos apuntan en direcciones opuestas son de sentido *opuesto*.

Una *desigualdad* incluye dos expresiones algebraicas o numéricas relacionadas con alguno de los símbolos: <, >, ≤, ≥.

Ejemplos:

$5 > 3$ se lee:		5 es mayor que 3
$4 < 7$	4	es menor que 7
$a + b$ ‡ 0		a más b es mayor o igual a cero
x £ 3		x es menor o igual a 3
$7 < x < 8$		x es mayor que 7 pero menor que 8
$x < -2$ o $x > 2$		x es menor que -2 o mayor que 2

cada símbolo de desigualdad se abre hacia el valor mayor y apunta hacia el más pequeño.

Ejemplo:

$-5 < 3$ se lee: -5 es menor que 3

en la recta numérica, dados dos números reales, el mayor está a la derecha del menor.

En algunos casos en las desigualdades podemos usar el símbolo de valor absoluto en la siguiente forma.

Desigualdades

$|x| < a$ *significa* $-a < x < a$

Ejemplo:

$|-4| < 8$ *significa* $-8 < -4 < 8$
$|x| > a$ *significa* $x < -a$ o $x > a$

Ejemplo:

$|x| > 2$ significa $x < -2$ o $x > 2$

Ejemplos:

$-7 < -3$; $11 > 8$; $x^2-1 \leq x$; $3wz^3 + w^2z^4 \geq 0$

1 Tipos de desigualdades

Son dos:

Desigualdad *absoluta* es aquella que es válida para todos los valores en números *reales* que se asignen a la variable.

Ejemplo:

$x^2 + 4 > 0$

Desigualdad *condicional o inecuación* es aquella que es válida únicamente para algunos valores *reales* de la variable.

Ejemplo:

$x + 3 > 7$ es válida para $x = 5$ pero no, por ejemplo, para $x = 2$

Como en el caso de las igualdades, la expresión a la izquierda del símbolo de desigualdad se llama *primer miembro* y el que está a la derecha, *segundo miembro.*

La solución de desigualdades con *una variable* es semejante a la solución de las ecuaciones; las desigualdades con *más de una variable* se resuelven con más efectividad empleando *métodos gráficos.*

2 Propiedades de las desigualdades

Compatibilidad de la adición y multiplicación respecto a la relación de orden "mayor que", "menor que".

A. Respecto a la suma y sustracción.
Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$

B. Respecto a la multiplicación y la división
Si $a > b$ con $c > 0$

entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

si $a > b$ con $c < 0$

entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Observa: Cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, *el signo de la desigualdad se invierte.*

Conclusiones:

1. El sentido de una desigualdad no cambia, si a cada miembro se suma o resta un mismo número.
2. El sentido de una desigualdad no se altera si cada miembro se multiplica o se divide por un mismo número positivo.
3. El sentido de una desigualdad *se invierte* si cada miembro se multiplica o divide por un mismo número negativo.

Estas propiedades son válidas para desigualdades con signos $\geq$, $\leq$.

Observa: Cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, *el signo de la desigualdad se invierte.*

Estas propiedades son válidas para desigualdades con signos $\geq$, $\leq$.

3 Desigualdades de una sola variable

Para resolver las desigualdades con *una sola variable* aplicamos los mismos procedimientos que usamos en las igualdades, excepto, y como ya se citó, cuando la desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, el signo de la desigualdad cambia de sentido.

Procedemos como se indica a continuación:

A Trasponemos los términos al primer miembro necesario para calcular las raíces.
B. En otros casos se trasponen los términos al primer miembro, se iguala a cero y se calculan las raíces. Los valores de las raíces obtenidas se señalan en la recta numérica.
C. Se determina en la recta numérica el signo de desigualdad que corresponde a cada uno de los intervalos representados, para:

– Todos los valores de x menores que la menor de las raíces.
– Todos los valores de x mayores que la mayor de las raíces.

D. Se seleccionan los intervalos que satisfacen la desigualdad dada.

Ejemplos:

Resolver las siguientes desigualdades.

Nota. En cada ejercicio el segmento unidad en que se dividió la recta numérica es de un centímetro.

1. $3x - 9 < -12$
$3x < -12 + 9$
$3x < -3$
$x < -1$

La solución gráfica se expresa:

la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que –1.

La comprobación se hace mentalmente asignando a la variable x, en la desigualdad inicial, cualquier valor menor que -1.

2. $2x - 5x > -3 - 12$

$-3x > -15$

$x < 5$

al dividir los dos miembros entre -3 el signo de la desigualdad se invierte.

La solución gráfica se expresa:

la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que 5.

La comprobación se hace mentalmente.

3. $x + 2 > 3x + 6$

$x - 3x > 6 - 2$

$-2x > 4$

$x < -2$

al dividir los dos miembros entre -2 el signo de la desigualdad se invierte.

La solución gráfica se expresa

la desigualdad se cumple para cualquier número real menor a -2.

La comprobación se hace mentalmente.

4. $\frac{3x}{4} - 4 > -3$

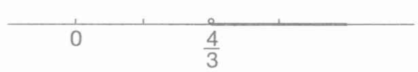
$\frac{3x}{4} > -3 + 4$

$\frac{3x}{4} > 1$

$x > \frac{1}{\frac{3}{4}}$

$x > \frac{4}{3}$

La solución gráfica se expresa:



la desigualdad se cumple para cualquier número real mayor que $\frac{4}{3}$.

La comprobación se hace mentalmente.

5. $x + 1 < 5x - 3$

$x - 5x < -3 - 1$

$-4x < -4$

$x > 1$

al dividir los dos miembros entre -4 el signo de la desigualdad se invierte.

La solución gráfica se expresa:

la desigualdad se cumple para cualquier número real mayor que 1.

6. $\dfrac{2x-1}{3}+2>\dfrac{x+1}{4}$

$\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x+1}{4}>-2$

mcm = 12

$4(2x-1)-3(x+1)>-24$

$8x-4-3x-3>-24$

$5x-7>-24$

$5x>-24+7$

$x>-\dfrac{17}{5}$

la solución gráfica se expresa:

la desigualdad se cumple para cualquier número real mayor que $-\dfrac{17}{5}$.

7. $x^2-x-6<0$

para obtener las raíces de esta desigualdad, el primer miembro se iguala a cero y se obtienen las raíces

$x^2-x-6=0$

factorizamos

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

de donde

$(x+2)(x-3)>0$

Para que el producto de dos factores sea mayor que cero, los dos factores deben ser positivos o negativos, se tiene:

Si ambos son positivos

$(x+2)>0$	$(x-3)>0$
$x>-2$	$x>3$

se expresa

$-2<x$ o $x>3$

gráficamente

si ambos son negativos

$(x+2)<0$	$(x-3)<0$
$x<-2$	$x<3$

se expresa

$x<-2$ o $x<3$

gráficamente

En este caso está excluido $x = -2$ y en el otro $x = 3$ entonces *es necesario comprobar* ambos valores en la ecuación.

$x^2 - x - 6 < 0$

Para $x = -2$	Para $x = 3$
$(-2)^2 - (-2) - 6 < 0$	$(3)^2 - (3) - 6 < 0$
$4 + 2 - 6 < 0$	$9 - 9 < 0$
$0 < 0$	$0 < 0$

Por tanto, los números –2 y 3 quedan excluidos de la solución, pero dividen la recta numérica en tres regiones.

Ahora hay que *probar* en cada una de ellas:

a) Para la región
$x < -2$
sea $x = -3$ sustituimos en $x^2 - x - 6 < 0$

$$(-3)^2 - (-3) - 6 < 0$$
$$9 + 3 - 6 < 0$$
$$6 < 0$$

para $x < -2$ no hay solución.

b) Para la región $-2 < x < 3$
sea $x = 0$ sustituimos en $x^2 - x - 6 < 0$

$$(0)^2 - 0 - 6 < 0$$
$$-6 < 0$$

para $-2 < x < 3$ hay solución.

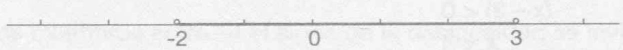
c) Para la región $x > 3$
sea $x = 5$ sustituimos en $x^2 - x - 6 < 0$

$$(5) - (5) - 6 < 0$$
$$25 - 5 - 6 < 0$$
$$14 < 0$$

para $x > 3$ no hay solución.

Conclusión:

La solución está en $-2 < x < 3$
gráficamente se expresa



La comprobación se hace mentalmente asignando a la variable x en la desigualdad inicial, cualquier valor mayor a –2 y menor a 3.

8. $(2x+1)(x-1)<0$

Observa que el primer miembro de esta desigualdad ya está factorizado.

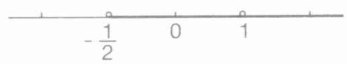
Para que el producto de dos factores sea mayor que cero, los dos factores deben ser positivos o negativos, se tiene:

Si ambos son positivos

$2x+1>0$	$x-1>0$
$2x>-1$	$x>1$
$x>-\frac{1}{2}$	

se expresa $-\frac{1}{2}<x$ y $x>1$

gráficamente

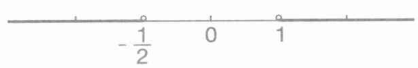


si ambos son negativos

$2x+1<0$	$x-1<0$
	$x<1$

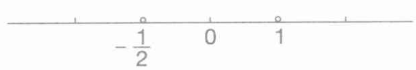
se expresa $x<-\frac{1}{2}$ $x<1$

gráficamente



como no hay ningún número que cumpla ser menor que $-\frac{1}{2}$ y mayor que 1, están excluidos de la solución (si se quiere se puede probar).

Pero estos números $x=-\frac{1}{2}$ y $x=1$ sí dividen la recta numérica en tres regiones



Ahora hay que *probar* en cada una de ellas.

a) Para la región $x<-\frac{1}{2}$

sea $x=-1$ sustituimos en $(2x+1)(x-1)<0$

$$[2(-1)+1](-1-1)<0$$
$$(-1)(-2)<0$$
$$2<0$$

para $x<-\frac{1}{2}$ no hay solución.

b) Para la región $-\frac{1}{2}<x<1$

sea $x=0$ sustituimos en $(2x+1)(x-1)<0$

$$(0+1)(0-1)<0$$
$$-1<0$$

para $-\frac{1}{2}<x<1$ hay solución.

c) Para la región $x > 1$

sea $x = 2$ sustituimos en $(2x + 1)(x - 1) < 0$

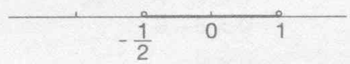
$$[2(2) + 1](2 - 1) < 0$$
$$(5)(1) < 0$$
$$5 < 0$$

para $x > 1$ no hay solución.

Conclusión:

La solución está en $-\frac{1}{2} < x < 1$

gráficamente se expresa



9. $x^2 - 6x > 7$

Inicialmente en el primer miembro completamos la expresión $x^2 - 6x$

para que sea cuadrado perfecto, le sumamos $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ (el cuadrado de la mitad del coeficiente de x).

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

para que la desigualdad no se altere, también le sumamos el número 9 al segundo miembro, queda:

$$x^2 - 6x > 7$$
$$x^2 - 6x + 9 > 7 + 9$$
$$(x - 3)^2 > 16$$

desarrollamos

$(x - 3)^2 - 16 > 0$

se obtiene una diferencia de cuadrados que factorizamos

$$[(x - 3) - 4][(x - 3) + 4] > 0$$
$$(x - 7)(x + 1) > 0$$

Para que el producto de dos factores sea positivo, ambos factores deben ser positivos o negativos, se tiene:

Si ambos son positivos

$x - 7 > 0$	$x + 1 > 0$
$x > 7$	$x > -1$

la solución es $x > 7$ y $x > -1$

gráficamente

Si ambos son negativos

$x - 7 < 0$	$x + 1 < 0$
$x < 7$	$x < -1$

la solución es $x < 7$ y $x < -1$

gráficamente

En este caso está excluido $x = 7$ en el otro $x = -1$, entonces es necesario comprobar ambos valores en la ecuación $x^2 - 6x > 7$

Para $x = 7$	Para $x = -1$
$(7)^2 - 6(7) > 7$	$(1)^2 - 6(-1) > 7$
$49 - 42 > 7$	$1 + 6 > 7$
$7 > 7$	$7 > 7$

Por lo tanto, estos números están excluidos de la solución pero dividen la recta numérica en tres regiones.

Ahora hay que *probar* en cada una de ellas.

a) Para la región $x < -1$

sea $x = -2$ sustituimos en $x^2 - 6x > 7$

$$(-2)^2 - 6(-2) > 7$$
$$4 + 12 > 7$$
$$16 > 7 \text{ hay solución}$$

b) Para la región $-1 < x < 7$

sea $x = 0$ sustituimos en $x^2 - 6x > 7$

$$0 - 6(0) > 7$$
$$0 > 7 \text{ no hay solución}$$

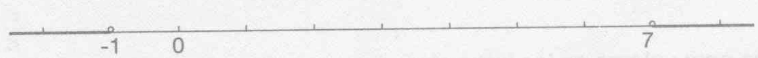
c) para la región $x > 7$

sea $x = 8$ sustituimos en $x^2 - 6x > 7$

$$(8)^2 - 6(8) > 7$$
$$64 - 48 > 7$$
$$16 > 7 \text{ hay solución}$$

Conclusión:

La solución está en las regiones $x < -1$ y en $x > 7$ gráficamente se expresa



10. $x^3 > -3x^2 + x + 3$

ordenamos los términos

$x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$

factorizamos la expresión $x^3 + 3x^2 - x - 3$

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x + 3) - (x + 3)$$
$$= (x^2 - 1)(x + 3)$$
$$= (x + 1)(x - 1)(x + 3)$$

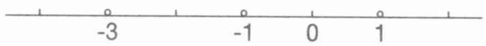
igualamos a cero cada factor para obtener las raíces

$x + 1 = 0$ $x = -1$	$x - 1 = 0$ $x = 1$	$x + 3 = 0$ $x = -3$

de donde

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$$
$$(x - 1)(x + 1)(x + 3) > 0$$

Expresaremos en la recta numérica los valores de las raíces



Observamos en la recta los intervalos siguientes:

$x < -3$
$-3 < x < -1$
$-1 < x < 1$
$1 < x$

para obtener la solución es necesario seleccionar en los intervalos algunos valores y sustituir éstos en la desigualdad para decidir si la cumple:

En $x < -3$ con $x = -4$

$x^3 > -3x^2 + x + 3$
$(-4)^3 > -3(-4)^2 - 4 + 3$
$-64 > -48 - 4 + 3$
$-64 > -49$ no la cumple

En $-3 < x < -1$ con $x = -2$

$(-2)^3 > -3(-2)^2 - 2 + 3$
$-8 > -12 - 2 + 3$
$-8 > -11$ la cumple

En $-1 < x < 1$ con $x = 0$

$(0)^3 > -3(0)^2 + 0 + 3$
$0 > 3$ no la cumple

En $1 < x$ con $x = 2$

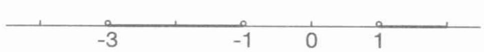
$(2)^3 > -3(2)^2 + 2 + 3$
$8 > -12 + 5$
$8 > -7$ la cumple

Solución

Se satisface para valores en los intervalos:

$-3 < x < -1$
$1 < x$

La solución gráficamente se expresa:



La comprobación se hace mentalmente.

11. $3x^2 - 2x - 5 < 0$

Para obtener las raíces de esta desigualdad, el primer miembro lo igualamos a cero y se obtiene la ecuación:

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

la resolvemos con la fórmula general para la solución de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$x_1 = \frac{5}{3}$

$x_2 = -1$

$3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)\left(x - \frac{5}{3}\right)$

de donde

$3x^2 - 2x - 5 < 0$

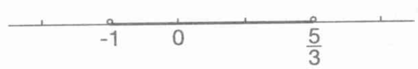
$(x + 1)\left(x - \frac{5}{3}\right) < 0$

Para que el producto de dos factores sea menor que cero uno debe ser positivo y el otro negativo, se tiene:

$(x + 1) > 0$	$\left(x - \frac{5}{3}\right) < 0$
$x > -1$	$x < \frac{5}{3}$

se expresa $-1 < x < \frac{5}{3}$

gráficamente

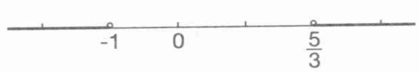


$(x + 1) < 0$	$\left(x - \frac{5}{3}\right) > 0$

$x < -1$ $x > \frac{5}{3}$

se expresa $x < -1$ y $x > \frac{5}{3}$

gráficamente



como no hay ningún número que cumpla ser menor que -1 y mayor que $\frac{5}{3}$ están excluidos de la solución (si se quiere se puede probar).

Pero estos números $x = -1$ y $x = \frac{5}{3}$ si dividen la recta numérica en tres regiones

Ahora hay que *probar* en cada una de ellas

a) Para la región $x < -1$

sea $x = -2$ sustituimos en $3x^2 - 2x - 5 < 0$

$$3(-2)^2 - 2(-2) - 5 < 0$$
$$12 + 4 - 5 < 0$$
$$11 < 0 \text{ no hay solución}$$

b) Para la región $-1 < x < \frac{5}{3}$

sea x = 0 sustituimos en $3x^2 - 2x - 5 < 0$

$$3(0)^2 - 2(0) - 5 < 0$$
$$-5 < 0 \text{ hay solución}$$

c) Para la región $x > \frac{5}{3}$

sea $x = 2$ sustituimos en $3x^2 - 2x - 5 < 0$

$$3(2)^2 - 2(2) - 5 < 0$$
$$12 - 4 - 5 < 0$$
$$3 < 0 \text{ no hay solución}$$

Conclusión:

La solución está en $-1 < x < \frac{5}{3}$

12. $5x^2 + 10 < 0$

$$5x^2 < -10$$
$$x^2 < -2$$

como cualquier número real al cuadrado siempre es positivo, concluimos señalando que esta desigualdad no tiene solución.

La comprobación se hace mentalmente.

4 Desigualdades dobles

Las desigualdades dobles son de la forma $p < q < r$, su solución incluye los valores comunes de las desigualdades tomadas por separado $p < q$ y $q < r$.

Ejemplos:

Resolver las desigualdades dobles.

13. $3x - 1 < 2x + 3 < 4x + 15$

Resolvemos por separado las desigualdades:

$3x - 1 < 2x + 3$ y $2x + 3 < 4x + 15$

$$\begin{array}{r|l} 3x - 1 < 2x + 3 & 2x + 3 < 4x + 15 \\ 3x - 2x < 3 + 1 & 2x - 4x < 15 - 3 \\ x < 4 & -2x < 12 \\ & x > -6 \end{array}$$

al dividir los miembros entre –2 el signo de la desigualdad se invierte.
la solución es

$-6 < x < 4$

gráficamente se expresa:

La comprobación se hace mentalmente.

14. $-1 \leq 7 - 2x < 3$

La desigualdad es doble y se puede resolver como el ejemplo anterior; o bien, considerando que tiene tres componentes las propiedades de la desigualdad se aplican a cada uno.

$-1 \leq 7 - 2x < 3$
$-1 - 7 \leq -2x < 3 - 7$
$-\frac{8}{2} \leq -x < -\frac{4}{2}$
$-4 \leq -x < -2$

dividimos los tres miembros entre –1, entonces los signos de las desigualdades se invierten

$4 \geq x > 2$
$2 < x \leq 4$

Se prefiere esta última forma de la desigualdad porque aumenta de izquierda a derecha.

La solución gráficamente se expresa:

La comprobación se hace mentalmente.

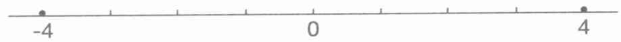
5 Valor absoluto

La distancia, en la recta numérica, de un número *a* hasta el cero, se llama: *valor absoluto del número* y se representa poniendo el número entre dos rayas verticales, así:

El valor absoluto de 4 es 4

$|4| = 4$
el de –4 es 4
$|-4| = 4$

expresamos los resultados en la recta numérica



Si un número es positivo, su distancia al origen es él mismo.

$|x| = x$

si el número es negativo:

$|-x| = x$

el valor absoluto de cero es cero

$|0| = 0$

Ejemplos:

$\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

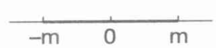
$-|-7| = -7$

En la página 31 señalamos: "el valor absoluto de un número real es el valor que tiene el número cuando prescinde del signo".

6

Propiedades del valor absoluto

A. La igualdad $|x| = m$ con $m \geq 0$ *sólo la satisfacen* $x = m$ y $x = -m$ *ya que son los únicos puntos cuya distancia al origen es exactamente* m.



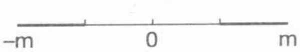
$x = m$
$x = -m$

B. La igualdad $|x| = m$ con $m < 0$ *no tiene solución*

C. Si $|x| \leq m$ y $m > 0$ *entonces* $-m \leq x \leq m$

Los puntos que satisfacen: son aquellos cuya distancia al origen es menor o igual a m; son los que se encuentran a la izquierda de m y a la derecha de $-m$.

D. Si $|x| \geq m$ *entonces* $x \geq m$ o $x \leq -m$



Los puntos que satisfacen son aquellos cuya distancia es mayor o igual a m; son los que están a la derecha de m, y los que se encuentran a la izquierda de $-m$

Ejemplos:

Resolver

15. $|5y + 2| = 12$

La igualdad se *satisface* si se cumplen $5y + 2 = 12$ y $5y + 2 = -12$

Resolución

$5y + 2 = 12$	$5y + 2 = -12$
$5y = 12 - 2$	$5y = -12 - 2$
$y = \frac{10}{5}$	$5y = -14$
$y = 2$	$y = -\frac{14}{5}$

Solución

Los valores que cumplen la ecuación son:

$y = 2$ y $y = -\frac{14}{5}$

Comprobación

con $y = 2$

$|5y + 2| = |5(2) + 2| = 12$

con $y = -\frac{14}{5}$

$|5y + 2| = |\cancel{5}(-\frac{14}{\cancel{5}}) + 2| = |-14 + 2| = |-12| = 12$

16. $|7x - 3| = 6$

La igualdad se *satisface* si se cumplen $7x - 3 = 6$ y $7x - 3 = -6$

Resolución

$7x - 3 = 6$	$7x - 3 = -6$
$7x = 6 + 3$	$7x = -6 + 3$
$x = \frac{9}{7}$	$x = -\frac{3}{7}$

Solución

Los valores que cumplen la ecuación son:

$x = \frac{9}{7}$ y $x = -\frac{3}{7}$

Comprobación

con $x = \frac{9}{7}$

$$|7x - 3| = \left|\cancel{7}\left(\frac{9}{\cancel{7}}\right) - 3\right| = |6| = 6$$

$x = -\frac{3}{7}$

$$|7x - 3| = \left|\cancel{7}\left(-\frac{3}{\cancel{7}}\right) - 3\right| = |-6| = 6$$

17. $|x^2 - 15| = 2$

La igualdad se *satisface* si se cumple $x^2 - 15 = 2$ y $x^2 - 15 = -2$

Resolución

$x^2 - 15 = 2$	$x^2 - 15 = -2$
$x^2 = 2 + 15$	$x^2 = -2 + 15$
$x = \pm\sqrt{17}$	$x = \pm\sqrt{13}$

Solución

Los valores que cumplen la ecuación son $x = \pm\sqrt{17}$ y $x = \pm\sqrt{13}$

Tomamos los signos positivos de las raíces ya que al obtener el cuadrado de una raíz negativa su resultado es positivo.

Comprobación

con $x = \sqrt{17}$

$$\left|x^2 - 15\right| = \left|\left(\sqrt{17}\right)^2 - 15\right| = \left|17 - 15\right| = 2$$

con $x = \sqrt{13}$

$$\left|x^2 - 15\right| = \left|\sqrt{13}\;^2 - 15\right| = \left|13 - 15\right| = \left|-2\right| = 2$$

7

El valor absoluto en las desigualdades

Algunas desigualdades incluyen el valor absoluto y los símbolos "mayor que" y "menor que", en la forma siguiente.

$|x| < b$ *significa* $-b < x < b$
se lee: el valor absoluto de x es mayor que $-b$ y menor que b
$|x| > b$ *significa* $x < -b$ y $x > b$
se lee: x es menor que $-b$ o x es mayor que b

Ejemplos:

$|-4| < 8$ significa $-8 < -4 < 8$
$|-8| > 2$ significa $-8 < -2$ y $8 > 2$

Ejemplos:

Resolver

18. $\left|\dfrac{x}{3} + 5\right| < 7$

La desigualdad se *satisface* únicamente si se cumplen: $-7 < \dfrac{x}{3} + 5 < 7$.

Observa el sentido de la desigualdad

Resolución

$-7 < \frac{x}{3} + 5$

$-7 - 5 < \frac{x}{3}$

$\frac{x}{3} + 5 < 7$

$\frac{x}{3} < 7 - 5$

$3(-12) < x$
$-36 < x$
$x > -36$

$x < 2(3)$
$x < 6$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$x < 6$ y $x > -36$ que se expresa $-36 < x < 6$

gráficamente:

19. $\left|\frac{3x}{5} - 2\right| > 3$

La desigualdad se *satisface* únicamente si se cumplen:

$\frac{3x}{5} - 2 > 3$ y $\frac{3x}{5} - 2 < -3$. Observa el sentido de las desigualdades.

Resolución

$\frac{3x}{5} - 2 > 3$

$\frac{3x}{5} > 3 + 2$

$3x > 5(5)$

$x > \frac{25}{3}$

$\frac{3x}{5} - 2 < -3$

$\frac{3x}{5} < -3 + 2$

$3x < -1(5)$

$x < -\frac{5}{3}$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$x > \frac{25}{3}$ y $x < -\frac{5}{3}$

La solución gráficamente se expresa:

20. $|5x - 4| > 3x + 6$

La desigualdad se *satisface* únicamente si se cumplen:

$5x - 4 > 3x + 6$ y $5x - 4 < -(3x + 6)$

Resolución

$5x - 4 > 3x + 6$	$5x - 4 < -(3x + 6)$
$5x - 3x > 6 + 4$	$5x - 4 < -3x - 6$
$2x > 10$	$5x + 3x < -6 + 4$
$x > 5$	$x < -\frac{1}{4}$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$x > 5$ y $x < -\frac{1}{4}$

La solución gráficamente se expresa:

21. $|2x + 1| \leq x + 3$

Con base en la propiedad B del valor absoluto, si $x + 3 < 0$ no tiene solución. Si $x + 3 \geq 0$ se tiene:

$-(x + 3) \leq 2x + 1$	$2x + 1 \leq x + 3$
$-x - 3 \leq 2x + 1$	$2x - x \leq 3 - 1$
$-3 - 1 \leq 2x + x$	$x \leq 2$
$-4 \leq 3x$	
$-\frac{4}{3} \leq x$	

Para que x sea la solución se debe cumplir:

$x \geq -3$ y $-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$

si x satisface que $-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$, entonces también satisface que

$x \geq -3$

por tanto, todas las soluciones de la desigualdad son:

$-\frac{4}{3} \leq x \leq 2$

gráficamente se expresa:

22. $|y + 4| \leq 6$

La desigualdad $|y + 4| \leq 6$ *es equivalente a las desigualdades:*

$y + 4 \leq 6$ y $y + 4 \geq -6$

Resolución

$y + 4 \leq 6$	$y + 4 \geq -6$
$y \leq 6 - 4$	$y \geq -6 - 4$
$y \leq 2$	$y \geq -10$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$y \leq 2$ y $y \geq -10$, que se expresa $-10 \leq y \leq 2$

gráficamente

23. $|7x - 1| \geq 4x + 3$

La desigualdad $|7x - 1| \geq 4x + 3$ es *equivalente* a las desigualdades:

$7x - 1 \geq 4x + 3$ y $7x - 1 \leq -(4x + 3)$

Resolución

$$7x - 1 \geq 4x + 3$$
$$7x - 4x \geq 3 + 1$$
$$3x \geq 4$$
$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$7x - 1 \leq -(4x + 3)$$
$$7x - 1 \leq -4x - 3$$
$$7x + 4x \leq -3 + 1$$
$$11x \leq -2$$
$$x \leq \frac{-2}{11}$$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$x \leq -\frac{2}{11}$ o $x \geq \frac{4}{3}$

La solución gráfica

24. $2x^2 - x \leq -5x + 16$
$2x^2 - x + 5x \leq 16$
$2x^2 + 4x \leq 16$

dividimos entre 2 cada miembro

$x^2 + 2x \leq 8$

para que el primer miembro sea cuadrado perfecto, le sumamos a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, que es uno.

$$x^2 + 2x + 1 \leq 8 + 1$$
$$(x + 1)^2 \leq 9$$
$$x + 1 \leq \sqrt{9}$$
$$|x + 1| \leq 3$$

Resolvemos esta última desigualdad aplicando las propiedades del valor absoluto.

La desigualdad $|x + 1| \leq 3$ es equivalente a las desigualdades $x + 1 \leq 3$ y $x + 1 \geq -3$

Resolución

$$x + 1 \leq 3$$
$$x \leq 3 - 1$$
$$x \leq 2$$

$$x + 1 \geq -3$$
$$x \geq -3 - 1$$
$$x \geq -4$$

Los valores que satisfacen la desigualdad son: $x \le 2$ o $x \ge -4$ se expresa $-4 \le x \le 2$ gráficamente:

25. $|3y - 1| \ge 7$

La desigualdad $|3y - 1| \ge 7$ es equivalente a las desigualdades:

$3y - 1 \ge 7$ y $3y - 1 \le -7$

Resolución

$3y - 1 \ge 7$	$3y - 1 \le -7$
$3y \ge 7 + 1$	$3y \le -7 + 1$
$3y \ge 8$	$3y \le -6$
$y \ge \frac{8}{3}$	$y \le -2$

Los valores que satisfacen la desigualdad son:

$y \ge \frac{8}{3}$ o $y \le -2$

gráficamente:

8

Desigualdades con dos variables

Las desigualdades con más de una variable se resuelven con facilidad empleando *métodos gráficos.*

El concepto de la desigualdad con dos variables está *relacionado* **con el correspondiente a la igualdad con dos variables.**

La solución de una desigualdad en x y y es cualquier pareja ordenada (x, y) que la satisface.

Ejemplo:

26. Trazar la gráfica de la ecuación lineal $2x + y = -4$

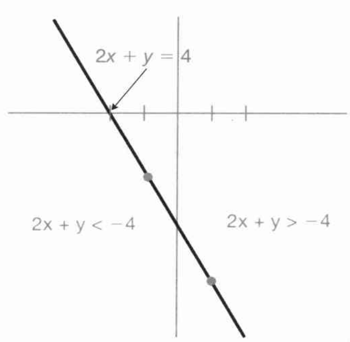
Resolución

$2x + y = -4$

$y = -4 - 2x$

tabla para trazar la gráfica

x	1	−1
y	−6	−2



asignamos valores a la variable x y mentalmente calculamos los de y.

Observa en la gráfica de la ecuación que la recta separa el plano en dos partes y los puntos en el plano se comportan de tres maneras diferentes:

A. Los puntos que están *sobre* la recta $2x + y = -4$
B. Los puntos que se encuentran *arriba* de la recta, éstos se describen con la desigualdad $2x + y > -4$
C. Los puntos *abajo* de la recta; se describen con la desigualdad $2x + y < -4$

Una desigualdad con dos variables x y y se *resuelve gráficamente.*

Nota: *En todas las gráficas de los ejercicios siguientes el segmento unidad en que se dividieron los ejes del plano cartesiano es de 0.5 cm*

Ejemplo:

27. Resolver la desigualdad $3x - y < 2$

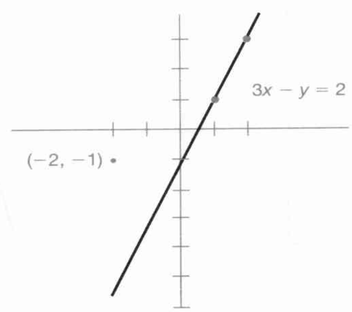
A. Se traza la gráfica de la recta $3x - y = 2$

Resolución

$$3x - y = 2$$
$$-y = 2 - 3x$$
$$y = 3x - 2$$

Tabla para trazar la gráfica

x	1	2
y	1	4

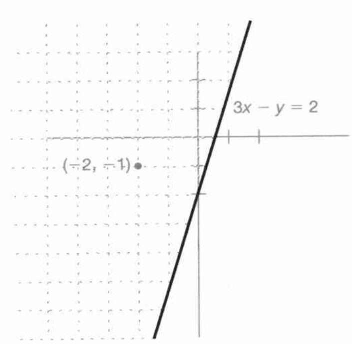


B. A continuación es necesario *decidir qué lado de la recta representa la solución,* en este caso para $3x - y < 2$, para ello se *selecciona* algún punto (x, y) que no esté en la recta y *lo sustituimos en la desigualdad. Si (x, y) satisface la desigualdad, el punto está en la región apropiada* y el semiplano que la contiene es la gráfica de la *solución.*

Para el ejemplo tomamos el punto $(-2, -1)$ y lo sustituimos en $3x - y < 2$

$$3x - y < 2$$
$$3(-2) - (-1) < 2$$
$$-6 + 1 < 2$$
$$-5 < 2$$

C. La solución es el semiplano *donde hemos comprobado* que está el punto $(-2, -1)$; la cual en la gráfica queda en forma punteada e indica que la recta $3x - y = 2$ está excluida de la solución. Gráficamente se expresa



Ejemplos:

Resolver las desigualdades siguientes:

28. $3x + y - 2 \leq x + 2y + 4$

Resolución

Ordenamos los términos

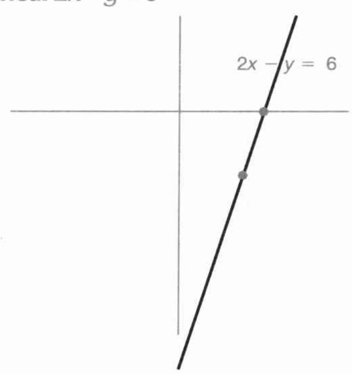
$$3x + y - 2 \leq x + 2y + 4$$
$$3x - x + y - 2y \leq 4 + 2$$
$$2x - y \leq 6$$

trazamos la gráfica de la ecuación lineal $2x - y = 6$

$$2x - y = 6$$
$$-y = 6 - 2x$$
$$y = 2x - 6$$

tabla para trazar la gráfica

x	2	3
y	–2	0

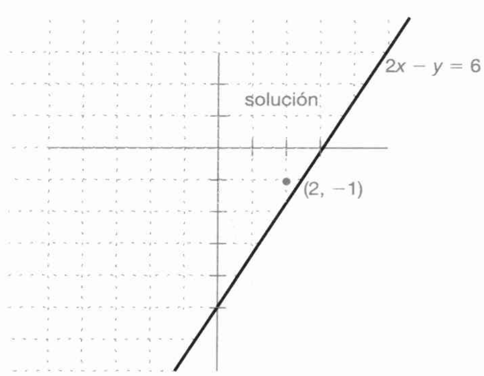


Seleccionamos el punto de coordenada $(2, -1)$ para determinar la solución, sustituimos en $3x + y - 2 \leq x + 2y + 4$

$$3x + y - 2 \leq x + 2y + 4$$
$$3(2) + (-1) - 2 \leq 2 + 2(-1) + 4$$
$$6 - 3 \leq 4$$
$$3 \leq 4$$

como el punto de coordenadas $(2, -1)$ *verifica* la desigualdad concluimos que la solución es el semiplano que está arriba de la recta $2x - y = 6$; la recta que se traza es continua e indica que se incluye en la solución.

Gráficamente, se expresa

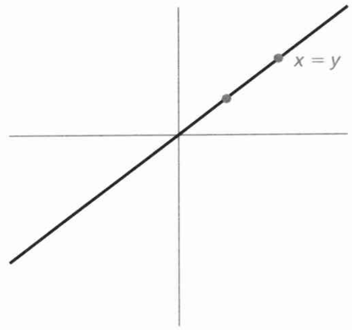


29. $x > y$

Resolución

Trazamos la gráfica de la ecuación lineal $x = y$
tabla para trazar la gráfica

x	1	2
y	1	2



seleccionamos el punto de coordenadas (2, 3) para determinar la solución, sustituimos en $x > y$

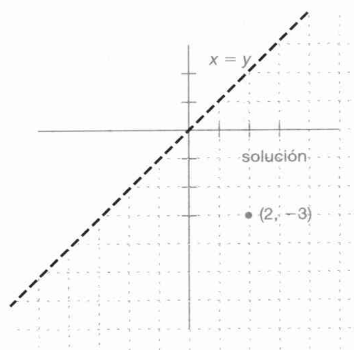
$x > y$
$2 > 3$

no se *verifica* la desigualdad, seleccionamos un nuevo punto, sea (2, –3) y sustituimos en $x > y$

$x > y$
$2 > -3$

como se *verifica* la desigualdad concluimos que la solución es el semiplano que está abajo de la recta $x = y$, la recta en la gráfica queda en forma punteada pues se excluye de la solución.

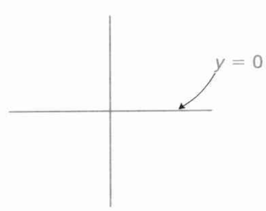
Gráficamente se expresa



30. $x + y > x - y$

Ordenamos los términos

$$x + y > x - y$$
$$x - x > -y - y$$
$$0 > -2y$$
$$\frac{0}{2} > -y$$
$$0 > -y$$
$$0 < y$$



al dividir los dos miembros entre –1 el signo de la desigualdad se invierte.

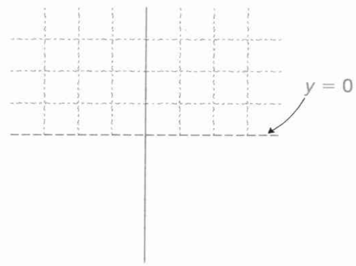
La gráfica de la ecuación $y = 0$ es la ecuación del eje x.

seleccionamos el punto de coordenadas (2, 1) para determinar la solución, sustituimos en $x + y > x - y$

$x + y > x - y$
$2 + 1 > 2 - 1$
$3 > 1$

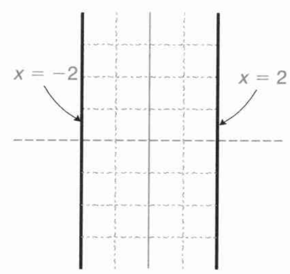
como el punto de coordenadas (2, 1) *verifica* la desigualdad concluimos que la solución son los semiplanos arriba de la recta $y = 0$, la recta en la gráfica queda en forma punteada pues se excluye de la solución.

Gráficamente se expresa:



31. $|x| < 2$

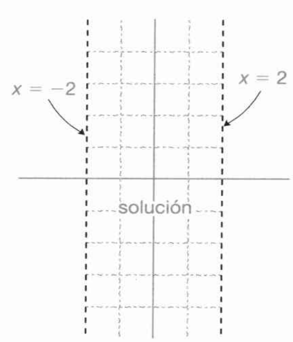
La desigualdad se satisface únicamente si se cumplen $x < 2$ y $x > -2$ trazamos las gráficas de las ecuaciones lineales $x = 2$ y $x = -2$



seleccionamos los puntos de coordenadas (−1, 0) y (1, 0) para determinar la solución de cada una, sustituimos en $x < 2$ y en $x > -2$, respectivamente.
En $x < 2$ con (−1, 0) en $x > -2$ con (1, 0)

$x < 2$	$x > -2$
$-1 < 2$	$1 > -2$

como los puntos *verifican* las desigualdades concluimos que la solución son los semiplanos a la derecha e izquierda del eje y, limitados por las rectas $y = 2$, $y = -2$



Las gráficas de las rectas punteadas.

9
Sistemas de desigualdades

Para resolver un sistema de dos o más desigualdades procedemos en la forma siguiente:

A. Se grafica cada desigualdad como lo hicimos en el apartado anterior.
B. La solución es la región común a todas las desigualdades dadas.

Ejemplos:

32. Resolver el sistema de siguiente desigualdades.

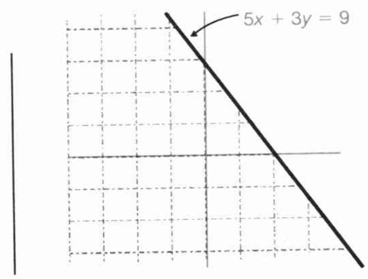
$$\begin{aligned} 5x+3y&<9\\ x+2y&\leq 2 \end{aligned}$$

A. Trazamos la gráfica de la recta $5x + 3y = 9$

$$5x + 3y = 9$$
$$3y = 9 - 5x$$
$$y = \frac{9-5x}{3}$$

tabla para trazar la gráfica

x	0	1
y	3	$\frac{4}{3}$



Seleccionamos el punto de coordenadas (0, 1) para determinar su solución, sustituimos en $5x + 3y < 9$

$$5x + 3y < 9$$
$$5(0) + 3(1) < 9$$
$$3 < 9$$

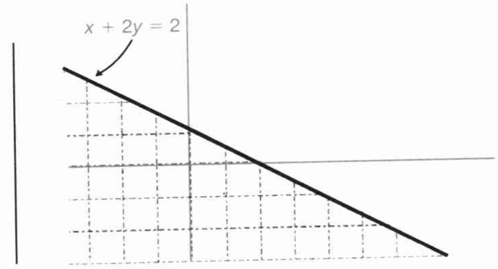
Se *verifica* la desigualdad, su solución es el semiplano sombreado en la gráfica.

B. Trazamos la gráfica de la recta $x + 2y = 2$

$$x + 2y = 2$$
$$2y = 2 - x$$
$$y = \frac{2-x}{2}$$

Tabla para trazar la gráfica

x	0	4
y	1	−1

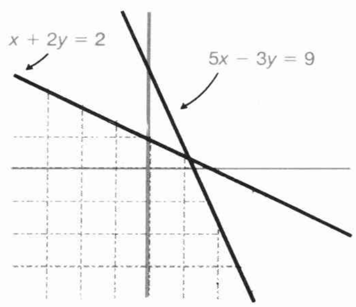


Seleccionamos el punto de coordenadas $(-1, 1)$ para determinar su solución, sustituimos en $x + 2y \leq 2$

$$x + 2y \leq 2$$
$$(-1) + 2(1) \leq 2$$
$$1 \leq 2$$

se *verifica* la desigualdad, su solución es el semiplano sombreado en la gráfica.

C. La solución del sistema es el *área común* de las soluciones obtenidas en los semiplanos de las rectas $5x + 3y = 9$ y $x + 2y = 2$



33. Resolver el sistema de desigualdades $x + y \leq 8$, $x + 3y \leq 9$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$

Observa: Las expresiones $x \geq 0$, $y \geq 0$ *condicionan la solución al primer cuadrante.*

Cuando no se pone ninguna condición se deben considerar los cuatro semiplanos que generan los ejes del plano cartesiano (ejercicio 29).

Resolución

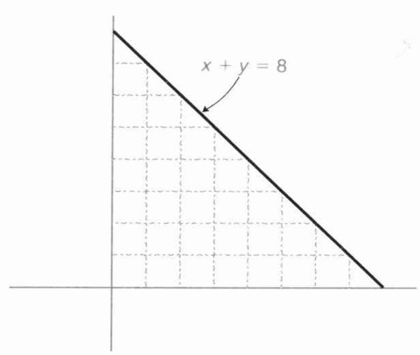
$$x + y \leq 8$$
$$x + 3y \leq 9$$

A. Trazamos la gráfica de la recta $x + y = 8$

$$x + y = 8$$
$$y = 8 - x$$

tabla para trazar la gráfica

x	1	3
y	7	5



Seleccionamos el punto de coordenadas $(1, 1)$ para determinar su solución, sustituimos en $x + y \leq 8$

$$x + y \leq 8$$
$$1 + 1 \leq 8$$
$$2 \leq 8$$

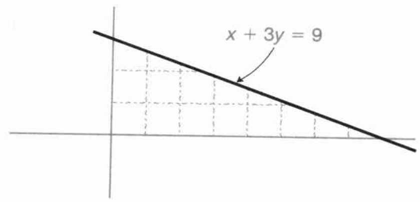
Se *verifica* la desigualdad en la superficie del triángulo cuyos vértices son (0, 0), (0, 8), (8, 0).

B. Trazamos la gráfica de la recta $x + 3y = 9$

$$x + 3y = 9$$
$$3y = 9 - x$$
$$y = \frac{9 - x}{3}$$

tabla para trazar la gráfica

x	3	6
y	2	1

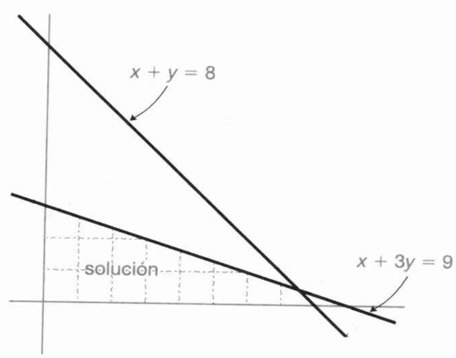


Seleccionamos el punto de coordenadas (0,1) para determinar su solución, sustituimos en $x + 3y \leq 9$

$$x + 3y \leq 9$$
$$0 + 3(1) \leq 9$$
$$3 \leq 9$$

se *verifica* la desigualdad, su solución es el semiplano abajo de la recta $x + 3y = 9$ limitado por los ejes x, y.

C. La solución del sistema *es el área común* a las dos áreas abajo de las rectas entre los ejes de las x y de las y.



34. Resolver el sistema $8x + y \leq 12$, $2x + 3y \leq 10$; $x \geq 0$, $y \geq 0$

Las expresiones $x \geq 0$, $y \geq 0$ condicionan la solución al primer cuadrante.

Resolución

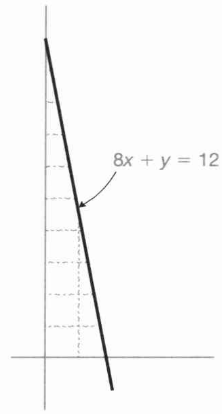
$$8x + y \leq 12$$
$$\underline{2x + 3y \leq 10}$$

A. Trazamos la gráfica de la recta $8x + y = 12$

$$8x + y = 12$$
$$y = 12 - 8x$$

tabla para trazar la gráfica

x	1	2
y	4	–4



Seleccionamos el punto de coordenadas (0, 1) para determinar su solución, sustituimos en $8x + y \leq 12$

$$8x + y \leq 12$$
$$8(0) + 1 \leq 12$$
$$1 \leq 12$$

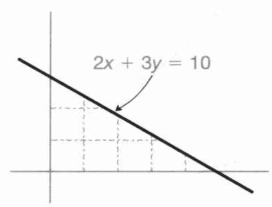
Se *verifica* la desigualdad, su solución es el triángulo sombreado.

B. Trazamos la gráfica de la recta $2x + 3y = 10$

$$2x + 3y = 10$$
$$3y = 10 - 2x$$
$$y = \frac{10 - 2x}{3}$$

tabla para trazar la gráfica

x	2	5
y	2	0

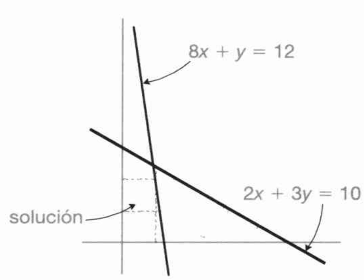


Seleccionamos el punto de coordenadas (1, 1) para determinar su solución, sustituimos en $2x + 3y \leq 10$.

$$2x + 3y \leq 10$$
$$2(1) + 3(1) \leq 10$$
$$5 \leq 10$$

Se *verifica* la desigualdad, su solución es el triángulo sombreado.

C. La solución del sistema *es el área común* de las dos áreas abajo de las rectas.



35. Resolver el sistema $y \geq 3x^2$, $x + y \geq 4$ con $x \geq 0$

Resolución

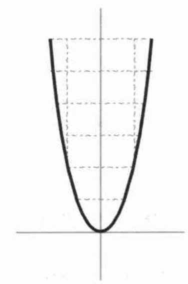
$$\begin{aligned} y &= 3x^2 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

A. Trazamos la gráfica de la parábola $y = 3x^2$

$y = 3x^2$

tabla para trazar la gráfica

x	0	1.5	1	0.5
y	0	$\pm$ 6.75	$\pm$3	$\pm$0.75



Seleccionamos el punto de coordenadas (0, 1) para determinar su solución, sustituimos en $y \geq 3x^2$

$y \geq 3x^2$
$1 \geq 3(0)^2$
$1 \geq 0$

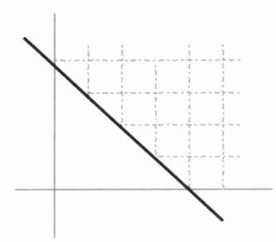
Se *verifica* la desigualdad, su solución es el área interior de la parábola.

B. Trazamos la gráfica de la recta $x + y = 4$

$x + y = 4$
$y = 4 - x$

tabla para trazar la gráfica

x	0	2
y	4	2

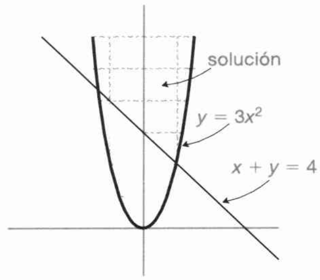


Seleccionamos el punto de coordenadas (1, 1) para determinar su solución, sustituimos en $x + y \geq 4$
$x + y \geq 4$
$1 + 1 \geq 4$
$2 \geq 4$
no se verifica la desigualdad.

Ahora seleccionamos el punto de coordenadas (3, 4) para determinar su solución, sustituimos en $x + y \geq 4$
$x + y \geq 4$
$3 + 4 \geq 4$
$7 \geq 4$

se *verifica* la desigualdad, su solución es el semiplano arriba de la recta $x + y \geq 4$

C. La solución del sistema es *el área común* de las áreas en el interior de la parábola y arriba de las rectas.



EJERCICIO 27

Usando los signos de desigualdad, expresa.

1. π es mayor que 3.141, pero menor que 3.142.
2. $a^2 - b^2$ es mayor que cero
3. r es mayor o igual a $\sqrt{2}$
4. x es menor que –2
5. –2 es mayor que –3
6. 19.99 es menor que 20
7. $3ab$ es menor que o igual a $a^2 + b^2$
8. e es mayor que 2171 y menor que 2.72
9. r está entre –2 y 2
10. $3x + 2 < 5$ *Sol.* $x < 1$
11. $6x > 4 - x$ *Sol.* $x > \frac{4}{7}$
12. $3 - x \leq 5$ *Sol.* $x \geq -2$
13. $3x - 1 > x - 2$ *Sol.* $x > -\frac{1}{2}$
14. $2x + 4 < -x + 9$ *Sol.* $x < \frac{5}{3}$
15. $\frac{2x-1}{3} + 1 > \frac{x+1}{2}$ *Sol.* $x > -1$
16. $\frac{3x-2}{2} - 1 < \frac{2x-1}{4}$ *Sol.* $x < \frac{7}{4}$

Valor absoluto. Resolver.

17. $|y + 8| = 15$ *Sol.* 7, –23
18. $\left|x + \frac{3}{2}\right| = 3$ *Sol.* $-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}$

19. $|x^2 - 8| = 7$ 	*Sol.* $\pm\sqrt{15}, \ \pm 1$

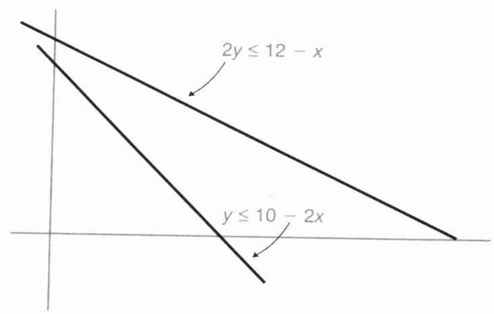
20. $\left|\dfrac{x}{3} + 2\right| < 4$ 	*Sol.* $-18 < x < 6$

21. $|x - 1| < 2$ 	*Sol.* $-1 < x < 3$

22. $|x - 3| > 1$ 	*Sol.* $x < 2$; $x > 4$

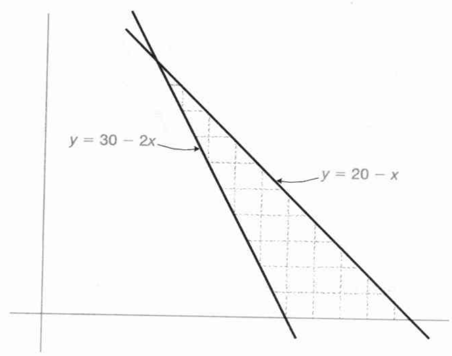
23. $\begin{array}{l} y \leq 10 - 2x \\ \underline{2y \leq 12 - x} \end{array}$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$

Sol. Área común abajo de las dos rectas hasta el eje de las x. Gráficamente.



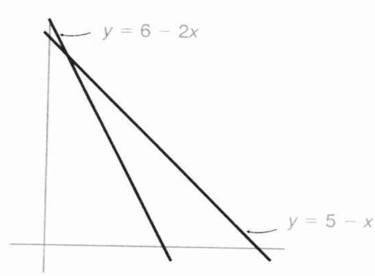
24. $y \leq 20 - x$
$y \geq 30 - 2x$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$

Sol. Área entre las rectas hasta el eje de las x. Gráficamente:



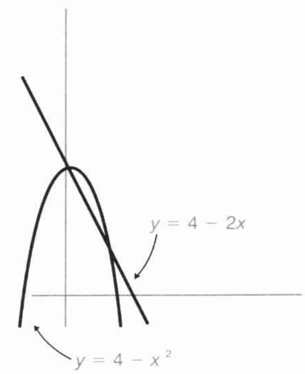
25. $\begin{array}{l} y \leq 5 - x \\ \underline{y \leq 6 - 2x} \end{array}$

Sol. Área común abajo de las dos rectas. Gráficamente:



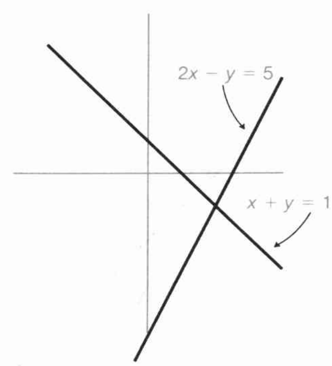
26. $y \geq 4 - 2x$
$\underline{y \leq 4 - x^2}$

Sol. Área común abajo de la recta y una parte del interior de la parábola. Gráficamente:



27. **Resolver el sistema $x + y \leq 1$, $2x - y < 5$**

Sol. Área común abajo de la recta $x + y = 1$ y arriba de la recta $2x - y = 5$. Gráficamente.



Trazar la gráfica de las siguientes desigualdades de segundo grado.

28. $x^2 - 2x > 3$
29. $x^2 + 4x + 3 < 0$
30. $x^2 \geq 9$
31. $2n^2 < n + 15$
32. $5m^2 > 12 - 4m$
33. $r^2 + 6 \leq 7r$
34. $x^2 + 10x + 25 \geq 0$

ANEXOS A

Álgebra divertida con Excel 97

Suplemento para acompañar a Fuenlabrada

1 Introducción

Álgebra divertida con Excel 97 fue desarrollado para acompañar el libro de Samuel Fuenlabrada de la Vega Trucíos: *Aritmética y Álgebra,* de la editorial McGraw-Hill.

Independientemente de cómo se considere a las matemáticas modernas, éstas pueden dividirse en dos grandes campos: matemáticas puras y matemáticas aplicadas. En este trabajo trataremos sobre matemáticas aplicadas, básicamente sobre álgebra y sus procedimientos que se consideran necesarios para que puedas tener éxito en su estudio, y que de alguna forma te sirvan de soporte para el cálculo o el álgebra lineal en forma divertida, simple y sencilla.

Sabemos que, como estudiante tradicional, eres escéptico en cuanto al estudio de las matemáticas. Este programa espera convencerte de que las matemáticas, cualquiera que sea tu campo de acción, son verdaderamente útiles y su estudio es muy divertido.

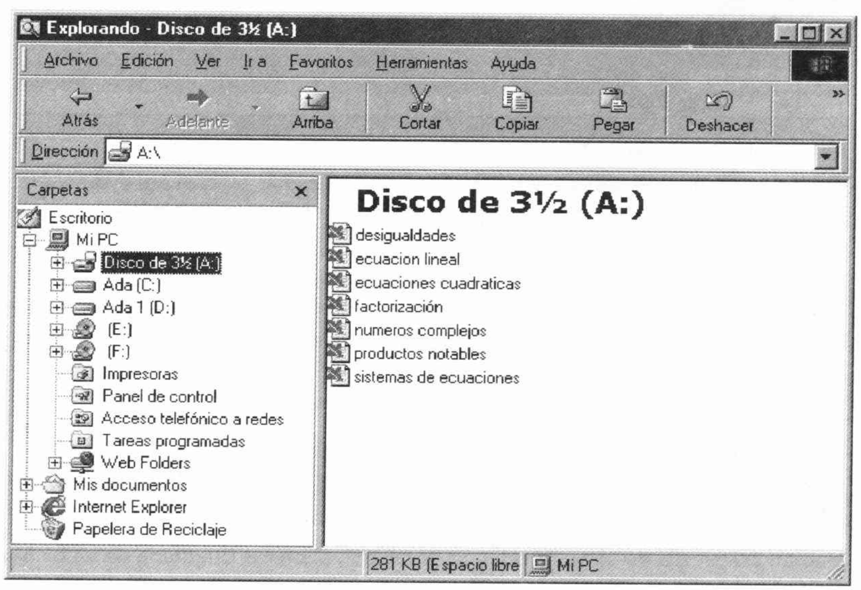


Ilustración 1. Archivos que contienen el disco Álgebra divertida con Excel 97.

Uno de los problemas más frecuentes, y que de alguna forma te han dificultado la comprensión del álgebra, es que ésta se estudia en forma abstracta. Por eso, en este trabajo plantearemos soluciones a problemas prácticos que tú podrás resolver de forma inmediata en tu computadora.

Suponemos que tienes un conocimiento elemental en el manejo del programa Microsoft Excel[1] y que sabes realizar algunas instrucciones de aritmética y sus operaciones fundamentales, a saber: adición, sustracción, multiplicación y división, y las extensiones de éstas: potencias y raíces.

En este programa se incluyen los modelos algebraicos necesarios para que tú asimiles los conceptos, involucrándote activamente en el proceso de aprendizaje.

Los capítulos de este suplemento no se corresponden con los capítulos del texto original, sino que están agrupados por temas; así, en el disco que hoy tienes en tus manos, al consultar el directorio te encontrarás con los archivos señalados en la Ilustración 1.

Es importante que antes de utilizar los archivos que contiene este disco, generes en tu disco duro un directorio llamado fuenlabrada o álgebra, y que copies todos los archivos en ese directorio, y una vez hecho esto guardes este disco en lugar seguro, pues, aunque los archivos vienen protegidos, en caso de algún accidente siempre es posible volver a copiar los archivos del disco original.

Como puedes observar, cada uno de estos archivos tiene el título del tema tratado.

2 Utilización de Álgebra divertida con Microsoft Excel 97

Los objetivos de este suplemento son muy amplios y nos permiten realizar no sólo los ejercicios de los temas correspondientes, sino que incluyen modificaciones y adiciones que el libro no incluye, pero que son convenientes.

El hecho de que el suplemento se haya desarrollado en Excel 97[2] (versión en español) no significa que se tenga que buscar otro material para desarrollar los ejemplos. Más aún, la facilidad en su utilización y su diseño (en general, los ejercicios se realizan en forma idéntica a como se hace en una clase típica de álgebra) permiten al estudiante concentrarse en aprender álgebra y no en el manejo del software.

Para utilizar este disco es necesario contar con un equipo de cómputo que incluya una computadora Pentium con los paquetes Windows, en cualquiera de sus versiones y, por supuesto, Excel 97 o alguna versión más actualizada.

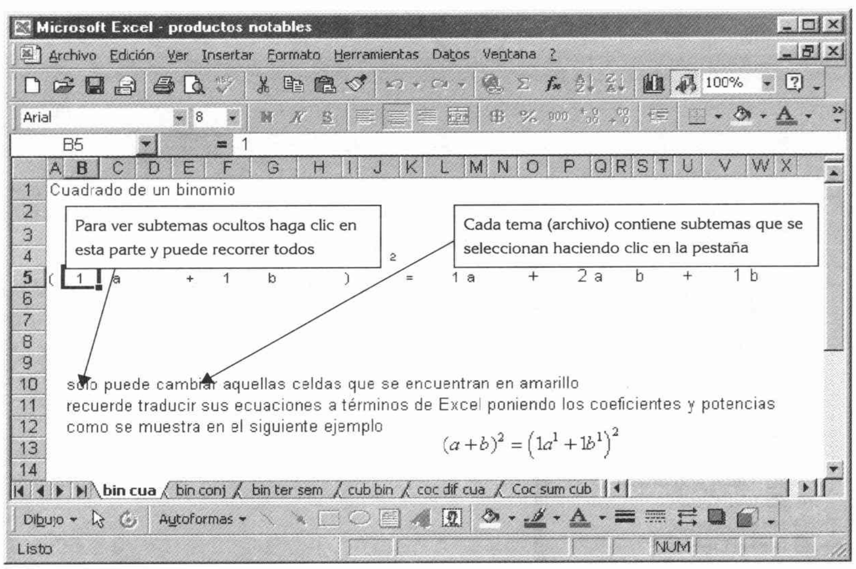


Ilustración 2. Pantalla del tema "productos notables", subtema Cuadrado de un binomio.

Se supone que el lector sabe utilizar, aunque sea en forma mínima, el paquete Excel 97; es decir, cómo entrar al sistema, abrir, cerrar y guardar archivos y cómo introducir datos e imprimir reportes.

[1]Microsoft Excel es un programa registrado por Microsoft.

[2]Este paquete utiliza la versión en español y se probó hasta la versión de Excel 97 SR 1.

La forma de utilizar el material es muy simple; utilizaremos la pantalla correspondiente al tema "productos notables" para explicar.

Por razones de espacio cada subtema se tituló con las iniciales mnemotécnicas del subtema tratado; sin embargo, cada subtema tiene en la primera celda el título de que se trata.

Como se indica en la Ilustración 2, es posible que haya más subtemas que los que se pueden ver en pantalla; para ver todos los subtemas se utilizarán los iconos de movimiento entre temas (hojas de Excel) hacia atrás (izquierda) y adelante (derecha).

Todo subtema contiene una parte sombreada en color amarillo donde se introducen los datos. La otra parte de cada hoja se encuentra protegida, por lo que no se podrán hacer cambios fuera de la zona amarilla.

De hecho, lo único que tiene que hacer el lector es:

1. Buscar esa parte e introducir los datos de los ejercicios a desarrollar.
2. Revisar que los datos introducidos sean correctos.
3. Mandar a imprimir sus archivos, si es que desea el reporte en forma escrita.

Si lo deseas puedes copiar los resultados utilizando el comando Edición Copiar, para que sean presentados mediante el procesador de textos Microsoft Word, donde puedes realizar cualquier edición o adorno deseado.

Esta edición o adorno no puede realizarse en los archivos de Excel, ya que se encuentran protegidos contra escritura para garantizar que los resultados obtenidos sean siempre correctos.

Podrás observar que en algunos casos es necesario introducir las potencias a que se encuentran elevados los términos y los coeficientes. En esos casos te encontrarás con el espacio adecuado para ello.

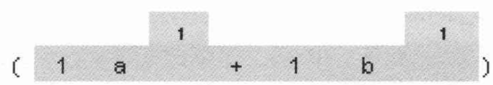


Ilustración 3. Ejemplo de Plantilla para introducir datos.

Además, deberás hacer algunas traducciones de la forma normal de escribir las ecuaciones en álgebra a la forma estándar en que se presentan las plantillas de resolución de ecuaciones en Álgebra divertida con Excel 97.

Así, la plantilla mostrada en la Ilustración 3 se escribe normalmente como se señala en la Ilustración 4.

$$(a + b)^2 = (1a^1 + 1b^1)^2$$

Ilustración 4. Ejemplo de traducción de la forma normal a la forma estándar.

En la escritura normal de las ecuaciones algebraicas se omiten los coeficientes y las potencias de las variables cuando estos valores son 1. En la forma estándar presentada por las plantillas **siempre que aparezca el espacio para los coeficientes deberás escribir éstos**. Lo mismo sucede con las potencias.

Los subtemas tratados en "productos notables" son: Cuadrado de un binomio, Binomio conjugado, Binomios con términos semejantes, Cubo de un binomio, Cociente de la diferencia de cuadrados y Cociente de la suma de cubos.

3 Factorización

Este tema contiene cinco subtemas como se muestra en la Ilustración 5.

En este caso, es posible que algunas veces el trinomio indicado en la plantilla no sea factorizable, como se señala en la Ilustración 5, **aunque se señale un resultado**. Insisto, si alguna de las respuestas es no, el trinomio indicado no es factorizable. Y el sistema no señalará respuesta alguna.

En este subtema es importante indicar que si existe un término en x, y y, se recomienda que las potencias de estos términos (o de cualquier otra variable) debe ser par.

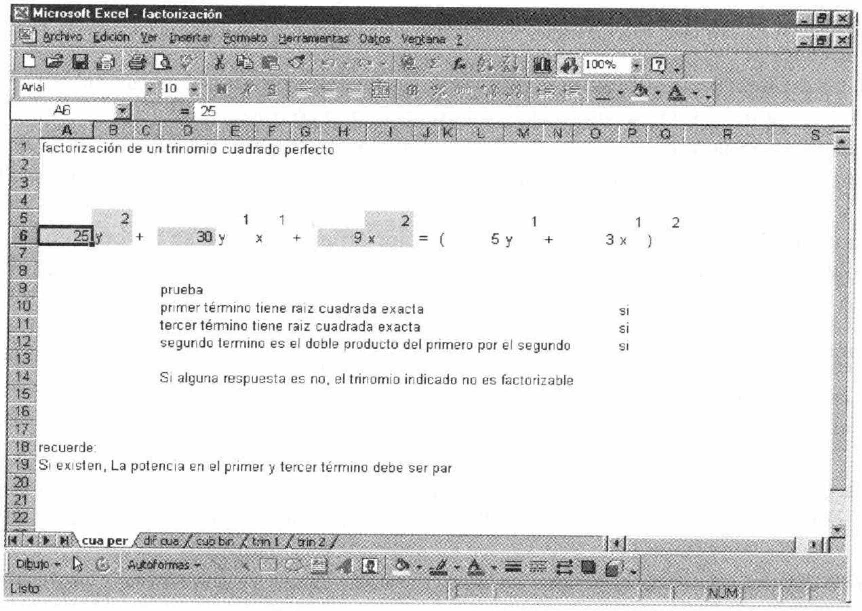


Ilustración 5. Archivo correspondiente al tema factorización, subtema Trinomio cuadrado perfecto.

Para el subtema trin 1 (Ilustración 6).

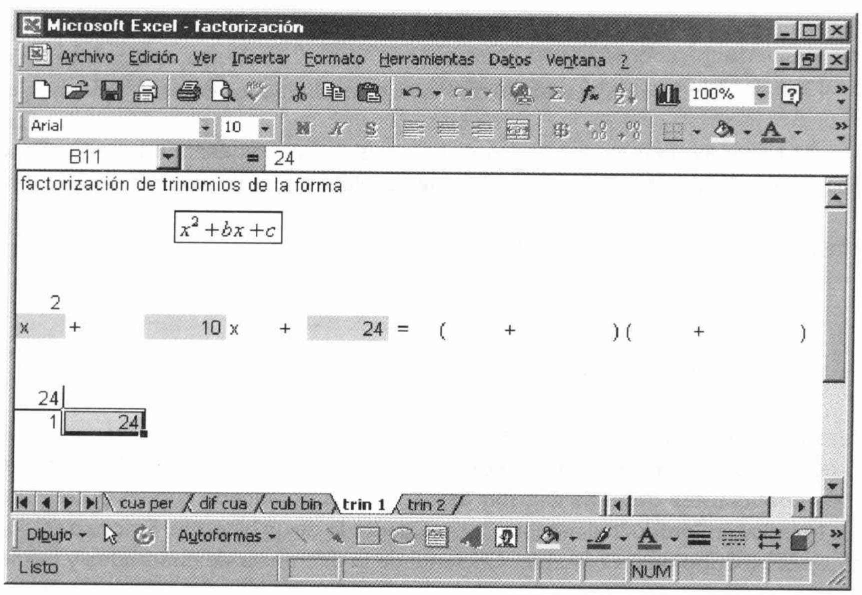


Ilustración 6. Plantilla para factorización de trinomios, sin resultados.

Observa cómo en esta plantilla aparece un área donde se encuentra el valor que tiene c (c es igual a 24 en este caso). En la celda amarilla, que aparece abajo a la derecha, debes jugar con los factores de 24, hasta que aparezca un resultado en la plantilla de la derecha (que en esta ilustración aparece vacía, mostrando sólo los paréntesis).

Para este ejemplo, los factores de 24 son (24, 1), (1, 24), (12, 2), (2, 12) (8, 3), (3, 8), (6, 4), (4, 6), (−24 , −1), (−1, −24), (−12, −2), (−2, −12) (−8, −3), (−3, −8), (−6, −4), (−4, −6).

Es decir, que hay, para este ejemplo, 16 pares de factores de 24; sin embargo, en este caso sólo dos pares de factores (6, 4) y (4, 6) sumados son 10 y multiplicados son 24, por lo que se aparece el resultado mostrado en la Ilustración 7.

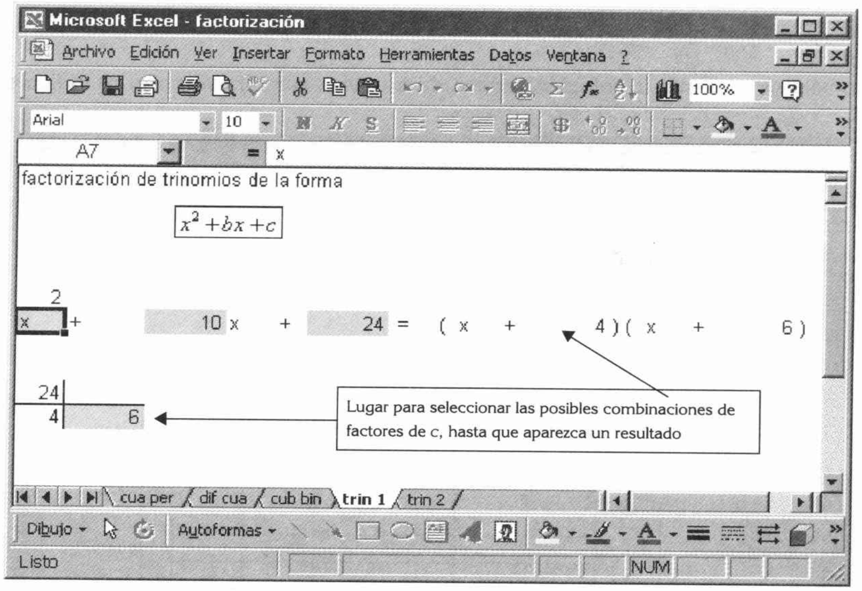


Ilustración 7. Plantilla para factorización de trinomios con resultados.

Habrá casos en que tal vez haya más de una solución, es decir, haya más de dos pares de factores que den respuesta al problema.

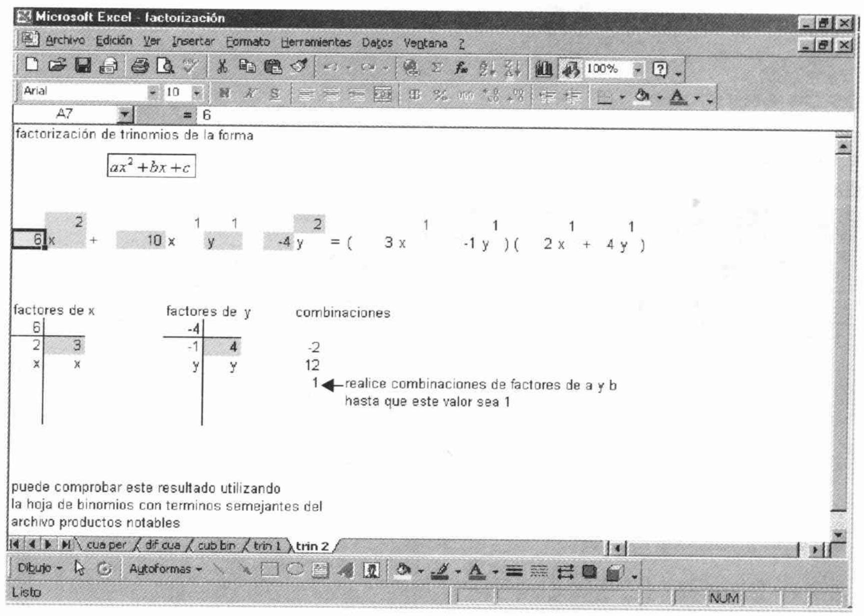


Ilustración 8. Subtema trin 2.

Para el subtema trin 2, mostrado en la Ilustración 8, se realiza la misma operación de búsqueda de factores, sólo que ahora por doble partida. Busca los factores de x que sumados den el coeficiente a y los factores de y que sumados den c, y cuya combinación nos dé el coeficiente b.

Aquí debes jugar con las combinaciones hasta obtener un uno en el último valor de la fila titulada combinaciones. Es posible que el resultado no aparezca a la primera, por lo que será necesario buscar tanto los factores positivos como los negativos y diversas combinaciones de ambos; es decir, es posible que el primer factor buscado sea positivo y el segundo negativo, o a la inversa. O bien, que ambos sean positivos o negativos.

4 Ecuación lineal

En este apartado sólo se presenta la solución gráfica de una ecuación lineal como se indica en la Ilustración siguiente.

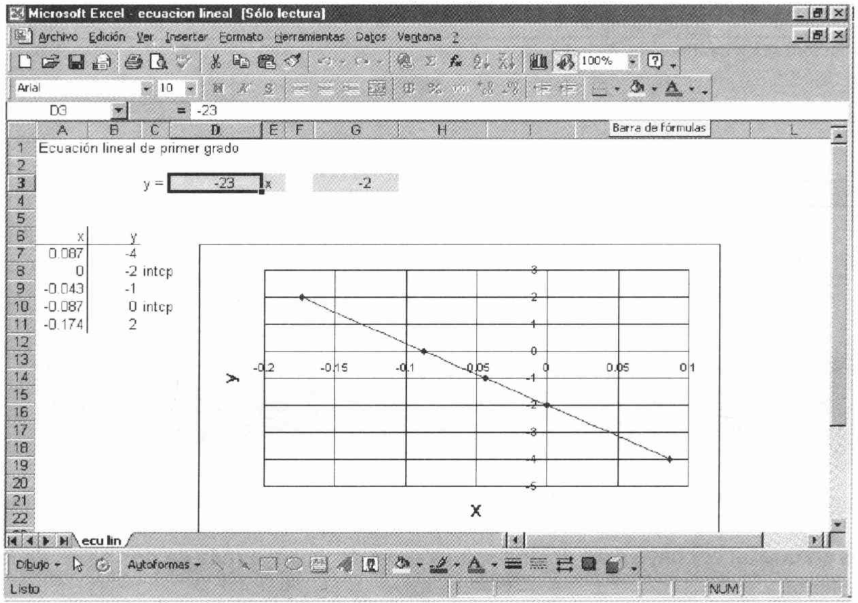


Ilustración 9. Ecuación lineal.

5 Sistemas de ecuaciones

En este tema se incluyen siete subtemas y no presenta instrucciones especiales adicionales. Simplemente rellena las plantillas.

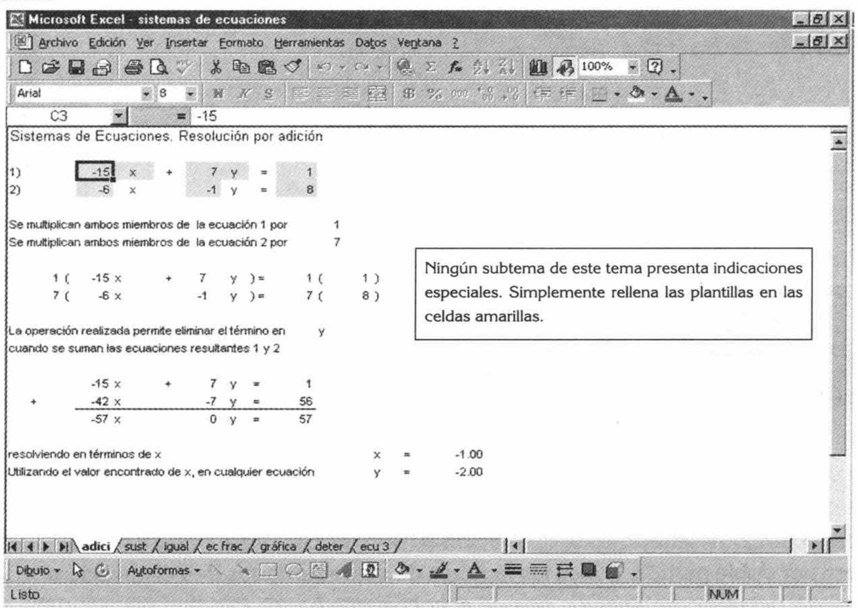


Ilustración 10. Tema Sistemas de ecuaciones.

Los subtemas incluidos son Resolución por adición, Resolución por sustitución, Resolución por igualación, Resolución de un sistema de ecuaciones fraccionarias, Resolución gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas, Resolución de un sistema de ecuaciones por determinantes y Resolución de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

6 Ecuaciones cuadráticas

Para este tema, se presentan seis subtemas, debiendo resaltar que, cuando se vuelve necesario, la solución se presenta con raíces imaginarias como se indica en la Ilustración 11.

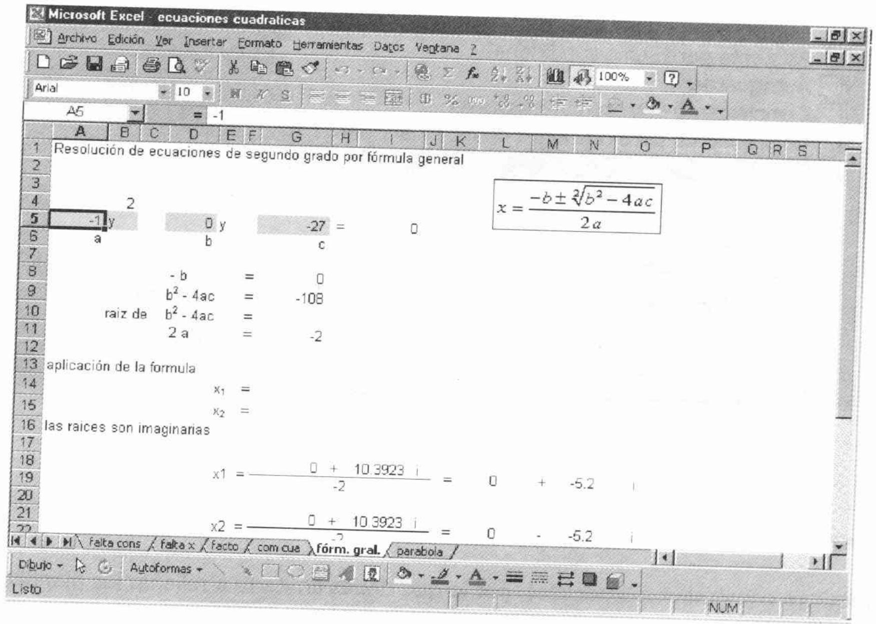


Ilustración 11. Resolución de ecuaciones con raíces imaginarias.

7 Números complejos

Para que las operaciones con números complejos funcionen en forma adecuada debes habilitar las herramientas para análisis. Para hacer esto selecciona Herramientas complementos.

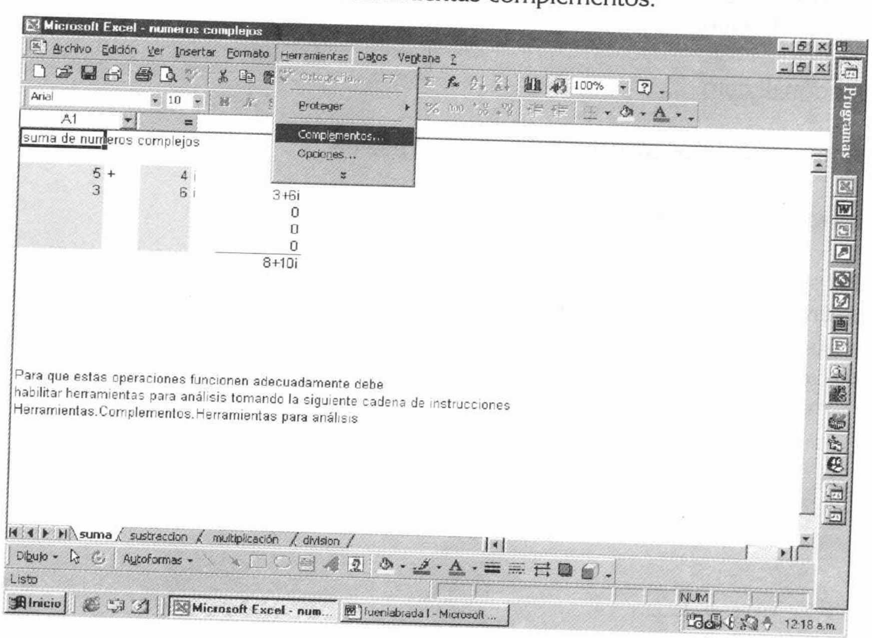


Ilustración 12. Tema Números complejos con selección de herramientas.

Y en la ventana que aparezca habilita las herramientas para análisis.

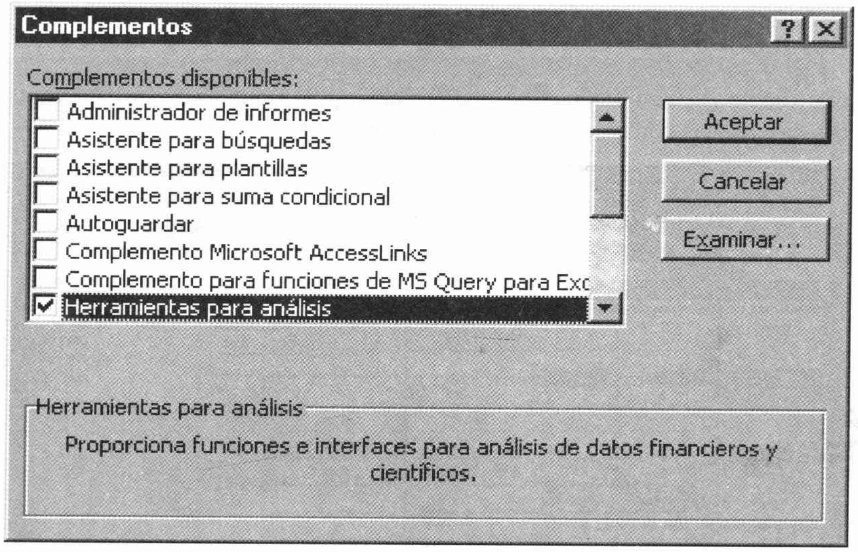


Ilustración 13. Habilitación de herramientas para análisis.

8 Desigualdades

Este tema no requiere comentarios especiales, por lo que debes limitarte a rellenar las plantillas.

9 Comentarios adicionales

El autor de este producto considera que estas indicaciones son suficientes para poder utilizarlo de forma completa y adecuada, sin embargo si surgiera alguna duda, comentario o sugerencia puede hacerse a la siguiente dirección de correo electrónico:

aarango54@hotmail.com

Cabe señalar que también se encuentra disponible la página:

www.prodigyweb.net.mx/aarangod

en la que cualquier sugerencia es bienvenida y donde, a los profesores que adopten este material complementario, se les puede brindar información adicional y sugerencias y ejemplos para un mejor desarrollo de su curso.

Para obtener su clave como profesor adoptante, envíe por correo a McGraw-Hill la tarjeta que viene dentro del sobre del disco, con los datos solicitados.

Arturo Arango Durán

Marzo 2000

A Yolanda Orozco