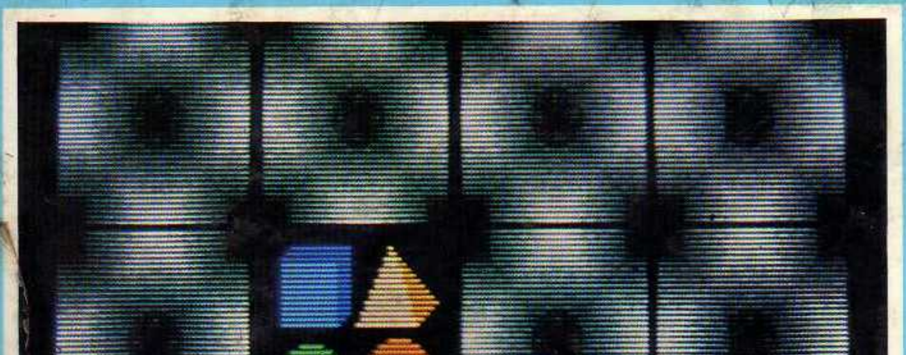
Schaum

GEOMETRÍA

Segunda Edición

Barnett Rich



McGraw Hill

Kopia

M A

GEOMETRÍA

(incluye geometría plana, analítica, transformacional y de sólidos)

GEOMETRÍA

Segunda Edición

BARNETT RICH, Ph. D.
Presidente del Departamento de Matemáticas,
Brooklyn Technical High School
New York City

Revisado por:
Philip A. Schmidt, Ph. D.
Departamento de Educación Secundaria
State College at New Paltz
New Paltz, New York

Traducción:
Dr. Rafael Morones E.
[illegible]

Revisión Técnica:
[illegible]

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
[illegible] • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

GEOMETRÍA

(incluye geometría plana, analítica, transformacional y de sólidos)

Segunda Edición

BARNETT RICH, Ph. D.
Presidente del Departamento de
Matemáticas.
Brooklyn Technical High School
New York City

Revisado por:
Phillip A. Schmidt, Ph. D.
Departamento de Educación Secundaria
Suny College at New Paltz
New Paltz, New York

Traducción:
Dr. Rafael Morones E.
Facultad Química, UNAM
Universidad de Glasgow, Escocia
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas
ITAM

Revisión Técnica:
Lic. Héctor Cirilo Hernández Valdés
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas y
Coordinador de Matemáticas "O"
ITAM

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

GEOMETRÍA

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-244-0
(ISBN 968-451-206-6 primera edición)

Traducido de la segunda edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF GEOMETRY

ISBN 0-07-052246-4

9012345678 L.M.-90 9086543217

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Junio de 1997 en
Litográfica 85, S.A. de C.V.
Fiscales Nº 43
Col. Sifón México, D.F.

Se tiraron 4100 ejemplares

Semblanza del autor

El Dr. Barnett Rich tiene el grado de Doctor en filosofía (Ph.D.) por la Universidad de Columbia y Doctor en Jurisprudencia (J.D.) por la Universidad de Nueva York. Comenzó su carrera profesional en Townsend Henir Hall High School de la ciudad de Nueva York, y fue uno de los prominentes organizadores de la preparatoria de música y arte donde se desempeñó como asistente administrativo. Posteriormente, se dedicó a la enseñanza en CUNY y en la Universidad de Columbia, y obtuvo el cargo de Jefe de Matemáticas en la preparatoria técnica de Brooklyn por 14 años. Entre sus muchos logros están los 6 grados que él ha conquistado y los 23 libros que ha escrito, entre ellos los libros de la serie Outlines de Schaum, *Elementary Algebra*, *Modern Elementary Algebra* y *Review of Elementary Algebra*.

Philip Schmidt obtuvo su licenciatura en el colegio de Brooklyn (con un curso de especialización sobre matemáticas), y su maestría en matemáticas y su Doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Syracuse, fue profesor asociado en el Colegio Berea hasta 1985, y es actualmente profesor asociado de matemáticas en educación secundaria en el colegio SUNY de New Paltz.

Contenido

Prefacio

La versión original del libro de *Geometría Plana* de Barnett Rich ha sido reimprimida unas 22 veces desde que fue publicado originalmente en 1968. El reto al revisar este texto fue actualizar el material tantas veces como fuese necesario para que mantuviera la prosa y la pedagogía necesarias para su éxito. En el caso de *Geometría Plana*, el reto fue particularmente grande. El dominio de la geometría y su pedagogía por parte del Dr. Rich fue enorme. En conversaciones que he tenido con antiguos estudiantes y con colegas del Dr. Rich se ha afirmado que su habilidad para convertir las ideas en matemáticas fue insuperable.

En esta revisión he intentado mantener el "espíritu de explicación" de Barnett Rich mientras se ajusta el libro a lo que se enseña actualmente en escuelas y colegios. Las anotaciones y la terminología se han cambiado para igualar las currículas y los textos actuales. He cambiado las frases de "segmentos comunes" y "medición de ángulos" a las más comunes, y he realizado cambios textuales para apoyar esa terminología. Un capítulo sobre geometría transformada ha sido agregado, se ha suprimido material no actualizado y han sido modificados los problemas complementarios.

Agradezco a mucha gente por su ayuda durante esta revisión: a John Aliano, editor con más antigüedad en McGraw-Hill, por su gran confianza; a Brother Neal Golden, por su cuidadosa revisión a la primera edición; al Dr. Paul Zuckerman, quien me presentó a Jean Rich, esposa de Barnett Rich, quien a su vez me permitió el acceso a la biblioteca del Dr. Rich y ayudó con apoyo y amistad; a mi esposa Jan Z. Schmidt y a mi hijo Reed Schmidt, quienes han sido cariñosos apoyos en todo mi trabajo; y finalmente, al Dr. Rich por proporcionarme tan rico texto para revisar y por enseñar geometría tan significativamente a tanta gente.

PHILIP A. SCHMIDT
New Paltz, 1988

Prefacio a la primera edición en inglés

El propósito de este libro es el ser de gran ayuda para los alumnos en el aprendizaje de la Geometría y un excelente auxiliar didáctico para los maestros en la enseñanza de la materia.

PARA LOS ALUMNOS:

Este libro se ha diseñado para llevar a los alumnos más allá de los objetivos fijados por los libros ordinarios y convencionales sobre la materia. Los alumnos encontrarán de gran utilidad este texto:

— Al aprender cada regla, fórmula y principio

Cada regla, fórmula y principio se enuncia con claridad, se distingue del resto del texto, tiene relación con sus correlativos y se ilustra con claridad mediante el uso de ejemplos.

— Al estudiar cada conjunto de problemas resueltos

Cada conjunto de problemas resueltos se utiliza para clarificar y aplicar las reglas y principios más importantes. Su clasificación se indica con un título.

— Al integrar cada conjunto de problemas complementarios

Los problemas complementarios dan una explicación más amplia de las reglas y principios. Un número de referencia para cada conjunto remite al alumno al conjunto de problemas resueltos. Existen más de 200 problemas adicionales y las respuestas para cada problema se localizan al final del libro.

— Al integrar el estudio de la Geometría plana

Esta obra integra el estudio de la Geometría plana con la Aritmética, Álgebra, Trigonometría numérica, Geometría analítica y Lógica. Para llevar a cabo esta integración:

(a) Se dedica un capítulo para la Geometría analítica.

(b) Un capítulo con las pruebas desglosadas y los planos de cada teorema.

(c) Un capítulo que explica en forma detallada veintitrés construcciones geométricas básicas e incluye, conforme se van necesitando, principios geométricos elementales.

(d) Dos capítulos de métodos de comprobación y perfeccionamiento en los que se presentan las ideas fundamentales de la Lógica formal propias de este nivel.

(*e*) En este libro se insiste en la importancia de la Álgebra para la solución de problemas geométricos mediante el uso de simbolismos, ecuaciones y comprobaciones algebraicas.

— Al aprender la Geometría por medio del estudio autodidacta

La estructura del libro favorece el autodidactismo. Al alumno avanzado le permite alcanzar los objetivos de un curso normal en menos tiempo. A los alumnos menos capaces, la presentación de diversos ejemplos y soluciones proporcionan la ayuda necesaria para superar sus deficiencias y de esta forma continuar con el curso y, al mismo tiempo, obtener cierta habilidad y confianza.

— Al ampliar la Geometría plana a la Geometría espacial

Se incluye un capítulo para la extensión de la geometría de dos planos a la geometría tridimensional. En la actualidad, y muy en especial en esta etapa, es muy importante que el alumno comprenda que los principios fundamentales del espacio son el resultado de los principios aprendidos en la Geometría plana.

PARA EL MAESTRO:

Los maestros de Geometría encontrarán de suma utilidad este texto:

— Al enseñar cada capítulo

Existe un tema central unificador en cada capítulo. Éste, a su vez, tiene de dos a diez subdivisiones. Estas últimas se ordenaron de acuerdo a su grado de dificultad para mejorar la enseñanza.

— Al enseñar cada subdivisión

Cada subdivisión contiene el material y los problemas necesarios para impartir una lección completa desarrollando los principios relativos.

— Al hacer la enseñanza más eficaz

El uso apropiado de los problemas resueltos permite a los alumnos entender la forma en que los principios se aplican en situaciones diversas. Por medio de la solución de problemas se aprenden las Matemáticas correctamente —haciendo Matemáticas—. Para que la clase logre su objetivo, los alumnos deben anotar las soluciones y entender el porqué y el cómo de cada paso. Una vez que el alumno comprende el cómo se aplica un principio a un problema resuelto, estará listo para aplicarlo a un problema complementario. La Geometría no se aprende a través de la lectura de un libro de texto o la memorización de un conjunto de fórmulas. No es hasta que se han solucionado gran variedad de problemas relativos al tema cuando el alumno obtiene una mejor comprensión de la Geometría plana.

— Al hacer la enseñanza más eficaz por medio del trabajo en casa

La preparación de la clase y la realización de tareas relativas a los problemas se facilita gracias a que los problemas complementarios de este libro se relacionan con los problemas resueltos. Se debe dar mucha atención al principio rector y a los pasos más importantes que se siguieron para la solución de los problemas resueltos. Después de esto, el alumno puede repetirlos y más tarde hacer los problemas complementarios que se relacionan con los anteriores.

OTROS QUE ENCONTRARÁN MUY ÚTIL ESTE LIBRO:

Además de los maestros y alumnos, este libro puede ser de gran utilidad para otras personas. Este grupo incluye a los padres de los estudiantes de Geometría que deseen ayudar a sus hijos apoyándose en los materiales autodidactas del libro o que quieran repasar sus conocimientos sobre la materia para auxiliar a sus hijos adecuadamente; a los jefes de departamento que quieran enriquecer su material bibliográfico en Geometría o que quieran mejorar la calidad de la enseñanza de la materia, y a las personas que se esfuerzan por repasar el tema o que desean estudiarlo por su propia cuenta.

1

Líneas, ángulos y triángulos

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA

La palabra *geometría* se deriva de los vocablos griegos *geos* (tierra) y *metron* (medida). Los antiguos egipcios, chinos, babilonios, romanos y griegos utilizaron la geometría en la agrimensura, navegación, astronomía y otras labores prácticas.

Los griegos trataron de sistematizar los datos geométricos que conocían estableciendo razones lógicas y relaciones entre ellos. El trabajo para sistematizar los hechos y principios geométricos por hombres como Tales de Mileto (600 a. de J.), Pitágoras (540 a. de J.), Platón (390 a. de J.) y Aristóteles (350 a. de J.) culminó con el texto sobre geometría intitulado: *Elementos*, escrito por Euclides alrededor de 325 a. de J. Este texto tan extraordinario se ha utilizado por más de 2 000 años.

1.2 TÉRMINOS INDEFINIDOS DE LA GEOMETRÍA: PUNTO, LÍNEA Y PLANO

1.2A Punto, línea y plano son términos indefinidos

En estos términos indefinidos se basa la definición de todos los términos geométricos. Se les puede dar un significado por medio de descripciones. Sin embargo, las descripciones que aparecen en seguida no deben considerarse como definiciones.

1.2B Punto

Un punto sólo tiene posición. No tiene longitud, anchura o grosor.

Se representa al punto por medio de un "punto dibujado". No debe olvidarse, sin embargo, que el "punto dibujado" *representa* al concepto de punto pero *no es* un punto conceptualmente, al igual que un "punto dibujado" en un mapa representa una localidad pero no es la localidad misma. Un "punto dibujado", a diferencia de un punto conceptual, tiene tamaño.

Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula junto al punto dibujado, esto es: $\cdot A$ $\cdot P$

1.2C Línea

Una línea tiene longitud pero no anchura o grosor.

Una línea puede representarse por medio de un gis en una pizarra o por una banda de caucho estirada.

Una línea se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella o con una letra minúscula; esto es: $\overleftrightarrow{AB}$ (A B), C D, a o $\overleftrightarrow{AB}$.

Una línea puede ser: recta, curva, o una combinación de ambas. Para entender cómo difieren las líneas, piense en que una línea se genera por un punto en movimiento. Una *línea recta*, tal como ⟷, es generada por un punto que se mueve siempre en la misma dirección. Una *línea curva*, tal como ⌒, por un punto que se mueve cambiando de dirección continuamente.

Dos líneas se intersectan en un punto.

Una línea recta puede extenderse en forma ilimitada; en cualquier dirección indefinidamente.

Un *rayo* es la parte de una línea recta que comienza en un punto dado y que se extiende en forma ilimitada en una dirección: $\overrightarrow{AB}$ y $\overset{\nearrow}{_{A}\ _{B}}$ designan rayos.

En este libro, a menos que se indique otra cosa, se utilizará la palabra *línea* para representar una "línea recta".

1.2D Planos

Un plano tiene longitud y anchura pero no espesor. Puede representarse por medio de una pizarra o el lado de una caja; sin embargo, recuerde que éstas son representaciones del plano, pero no planos realmente.

Una superficie plana (o plano) es una superficie tal que si una línea recta conecta dos puntos cualesquiera, ésta queda contenida en ella en forma total. Un plano es una superficie plana.

La geometría plana es la geometría de las figuras planas —aquéllas que pueden trazarse sobre un plano. A menos que se indique otra cosa, en este libro la palabra *figura* significará "figura plana".

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Ilustración de Términos Indefinidos

Punto, línea y plano son términos indefinidos. Indique cuál de estos términos se ilustra con: (*a*) la cubierta de un escritorio; (*b*) una pantalla cinematográfica; (*c*) el filo de una regla; (*d*) un hilo en tensión; (*e*) la punta de un alfiler.

Soluciones

(*a*) Plano (*b*) plano (*c*) línea (*d*) línea (*e*) punto.

1.3 SEGMENTOS DE LÍNEA

Un segmento de línea es la parte entre dos puntos de una línea recta, incluyendo estos dos puntos. Se designa por las letras mayúsculas que representan a estos puntos o por una letra minúscula. Así $\overline{AB}$ o *r* representan el segmento de línea $A \overset{r}{\text{———}} B$ entre *A* y *B*.

La expresión *segmento de línea recta* puede restringirse a *segmento de línea* o *segmento*, si el significado es claro. De esta forma, $\overline{AB}$ y *segmento AB* significan "el segmento de línea recta *AB*".

1.3A División de un segmento de línea en partes

Si dividimos un segmento de línea en partes:

1. La longitud del segmento completo es igual a la suma de las longitudes de sus partes. Nótese que la longitud de $\overline{AB}$ se designa por *AB*.
2. La longitud del segmento de línea completo es mayor que la longitud de cualquiera de sus partes.

Supóngase que $\overline{AB}$ se divide en tres partes de longitud *a*, *b*, y *c*, esto es: $A \overset{a}{\text{——}} \cdot \overset{b}{\text{——}} \cdot \overset{c}{\text{————}} B$. Entonces $AB = a + b + c$. También, *AB* es mayor que *a*; lo que se denota como: $AB > a$.

Si .n segmento de línea se divide en dos partes iguales:

1. El punto de división es el punto medio del segmento de la línea.
2. Se dice que una línea bisecta el segmento cuando pasa por el punto medio de un segmento.

Como $AM = MB$ en la figura 1-1, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y $\overline{CD}$ bisecta a $\overline{AB}$. Puede observarse que dos segmentos de línea son iguales marcando en ellos el mismo número de trazos equidistantes. Nótese que $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ están marcadas con un solo trazo.

3. Si tres puntos A, B y C están sobre una línea, decimos que son *colineales*. Si A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$, entonces B está entre A y C (Fig. 1-2).

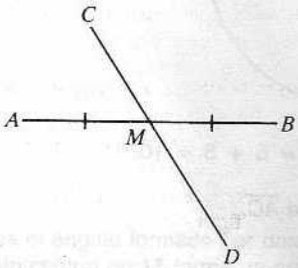


Fig. 1-1

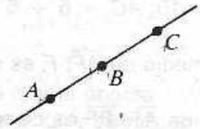


Fig. 1-2

1.3B Segmentos congruentes

Se dice que dos segmentos de línea son *congruentes* si tienen la misma longitud. De aquí que, si $AB = CD$, entonces $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, y se denota como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.2 Identificación de Segmentos de Línea y Puntos
(Fig. 1-3.)

(*a*) Identifique cada uno de los segmentos de línea indicados.

(*b*) Identifique los segmentos de línea que se intersectan en A.

(*c*) ¿Qué otro segmento de línea se puede trazar?

(*d*) Identifique el punto de intersección de $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.

(*e*) Identifique el punto de intersección de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$.

Soluciones

(*a*) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. Estos segmentos pueden designarse intercambiando las letras; por lo que $\overline{BA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DC}$ $\overline{CA}$ y $\overline{DA}$ son correctos también.

(*b*) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$

(*c*) $\overline{BD}$

(*d*) D

(*e*) C

1.3 Cálculo de Longitudes y Puntos en Segmentos de Línea (Fig. 1-4)

(*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AF}$

(*b*) Identifique dos puntos medios.

(*c*) Identifique dos bisectores.

(*d*) Identifique todos los segmentos congruentes.

Soluciones

(a) $AB = 3 + 7 = 10$; $AC = 5 + 5 + 10 = 20$; $AF = 5 + 5 = 10$.

(*b*) E es el punto medio de $\overline{AF}$; F es el punto medio de $\overline{AC}$.

(*c*) $\overline{DE}$ es bisector de $\overline{AF}$; $\overline{BF}$ es bisector de $\overline{AC}$.

(*d*) $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, y $\overline{FC}$ (todos tienen longitud 10); $\overline{AE}$ y $\overline{EF}$ (los dos tienen longitud 5).

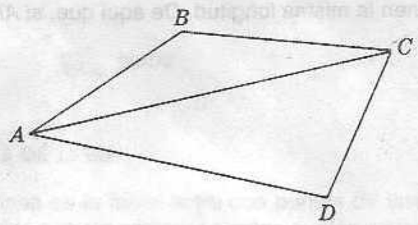


Fig. 1-3

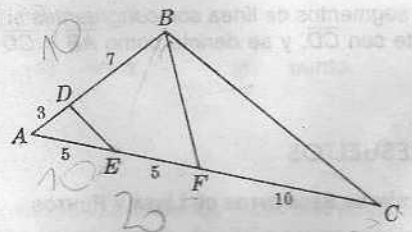


Fig. 1-4

1.4 CÍRCULOS

Un *círculo* es el conjunto en que todos los puntos de un plano son equidistantes de un punto fijo denominado *centro*. El símbolo para un círculo es ⊙; para círculos, ⊚. Así ⊙O representa al círculo cuyo centro es O.

La *circunferencia* de un círculo es la distancia alrededor del círculo (su perímetro). Contiene 360 grados (360°).

Radio es el segmento que une el centro del círculo con un punto sobre el círculo (Fig. 1-5). De la definición de círculo, se deduce que los radios de un círculo son congruentes. Así $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, y $\overline{OC}$ en la figura 1-5 son radios de ⊙Q y $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

Una *cuerda* es el segmento que une dos puntos cualesquiera de un círculo. Así $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas de ⊙Q.

Un *diámetro* es una cuerda que pasa por el centro de un círculo; es la cuerda más grande y tiene el doble de longitud del radio. $\overline{AC}$ es un diámetro de ⊙O.

Un *arco* es una parte continua de un círculo. El símbolo del arco es ⌒, de tal manera que AB representa el arco AB. Un arco que mide 1° es 1/360 de una circunferencia.

Un *semicírculo* es un arco que mide la mitad de la circunferencia de un círculo; y, por lo tanto, contiene 180°. Un diámetro divide al círculo en dos semicírculos. Por ejemplo, el diámetro $\overline{AC}$ corta a ⊙O de la figura 1-5 en dos semicírculos.

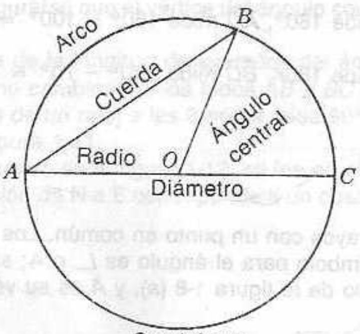


Fig. 1-5

Un *ángulo central* es el ángulo formado por dos radios. De modo que el ángulo entre los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ es un ángulo central. Un ángulo central de 1° forma un arco de 1°; así, si el ángulo central entre $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ en la figura 1-6 es de 1°, entonces el arco EF mide 1°.

Los *círculos congruentes* son círculos con radios congruentes. De modo que si $\overline{OE} \cong \overline{O'G}$, entonces $\odot O \cong \odot O'$.

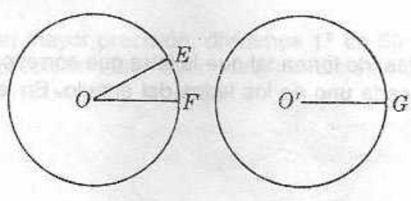


Fig. 1-6

PROBLEMAS RESUELTOS

1.4 DETERMINACIÓN DE LÍNEAS Y ARCOS EN UN CÍRCULO

En la figura 1-7, calcule: (*a*) la longitud de OC y AB; (*b*) la cantidad de grados en $\widehat{AD}$ y (*c*) la cantidad de grados en BC.

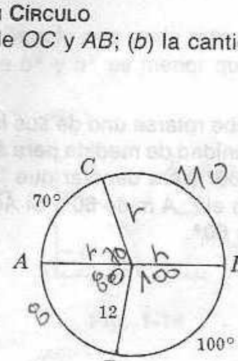


Fig. 1-7

Soluciones

(*a*) Radio OC = radio OD = 12. Diámetro AB = 24.

(*b*) Como el semicírculo *ADB* mide 180°, $\widehat{AD}$ mide $180° - 100° = 80°$.

(*c*) Como el semicírculo *ACB* mide 180°, $\widehat{BC}$ mide $180° - 70° = 110°$.

1.5 ÁNGULOS

Un ángulo es la figura formada por dos rayos con un punto en común. Los rayos son los *lados* del ángulo, mientras que el punto terminal es su *vértice*. El símbolo para el ángulo es $\angle$ o $\measuredangle$; su plural es $\angle$s.

Así $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados del ángulo de la figura 1-8 (*a*), y *A* es su vértice.

1.5A Notación de ángulos

Un ángulo se puede designar de las siguientes formas:

1. Por medio de la letra del vértice, en el caso de que sólo exista un ángulo con este vértice, como $\angle B$ en la figura 1-8(*b*).

2. Por medio de una letra minúscula, colocada entre los lados del ángulo y cerca de su vértice, como $\angle a$ o $\angle 1$ en la figura 1-8(*c*).

3. Por medio de tres letras mayúsculas; de forma tal que la letra que corresponde al vértice, esté entre las otras dos, correspondiendo estas últimas a cada uno de los lados del ángulo. En la figura 1-8(*d*), $\angle E$ puede denominarse como $\angle DEG$ o $\angle GED$.

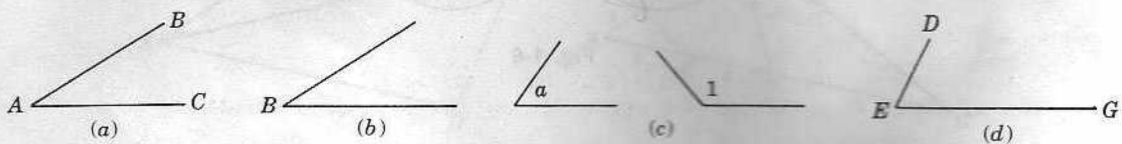


Fig. 1-8

1.5B Medición de ángulos

El tamaño de un ángulo depende de qué tanto debe rotarse uno de sus lados alrededor del vértice, hasta que coincida con el otro lado. Hemos escogido al grado como unidad de medida para ángulos. La medida de un ángulo es el número de grados que contiene. Escribiremos $m\angle A = 60°$ para denotar que "el ángulo *A* mide 60°".

El transportador en la figura 1-9 muestra que el $\angle A$ mide 60°. Si $\overrightarrow{AC}$ es rotado alrededor del vértice *A*, hasta que coincida con $\overrightarrow{AB}$, la medida de rotación sería de 60°.

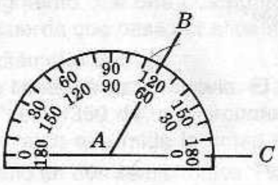


Fig. 1-9

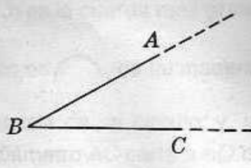


Fig. 1-10

Al utilizar un transportador, debe asegurarse que el vértice del ángulo coincida con el centro y que un lado coincida con el diámetro 0°-180°.

El tamaño de un ángulo *no* depende de la longitud de los lados del ángulo.

El tamaño de $\angle B$ en la figura 1-10 no cambiaría si los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ fueran más largos o cortos.

El ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 3 horas mide 90°, sin importar qué tan grande o pequeño sea el reloj, tal como se muestra en la figura 1-11.

La brújula de navegación, que se muestra en la figura 1-12, se lee en el sentido de las manecillas del reloj de 0° a 360°, empezando en el norte. Una rotación de N a E corresponde a un cuarto de vuelta o 90°; una de NE a E corresponde a un octavo de vuelta o 45°.

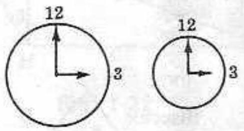


Fig. 1-11

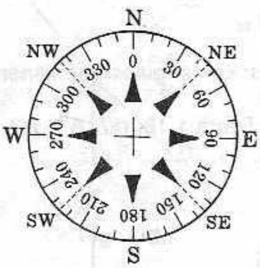


Fig. 1-12

Con el objeto de medir ángulos con mayor precisión, dividimos 1° en 60 partes iguales, denominadas *minutos*. Así, 1° = 60 minutos = 60'. Para una precisión aún mayor, cada minuto se divide en 60 partes iguales denominadas *segundos*. De esta forma, tenemos que 1° = 60' y 1' = 60".

1.5C Tipos de ángulos

1. *Ángulo agudo:* un ángulo agudo es un ángulo que mide menos de 90°.
   Por lo tanto, en la figura 1-13, $a°$ es menor de 90°; esto se denota como $a° < 90°$.

2. *Ángulo recto:* un ángulo recto es un ángulo que mide 90°.
   En la figura 1-14, $m(\text{rt. } \angle A) = 90°$. La esquina rectangular denota un ángulo recto.

3. *Ángulo obtuso:* un ángulo obtuso es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.
   En la figura 1-15, 90° es menor que $b°$ y $b°$ es menor que 180°; esto se denota por $90° < b° < 180°$.

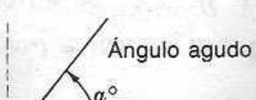


Fig. 1-13

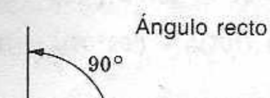


Fig. 1-14

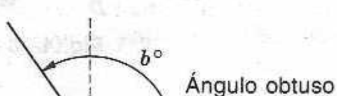


Fig. 1-15

4. *Ángulo derecho o rectilíneo:* un ángulo derecho es un ángulo que mide 180°.
   Así, en la figura 1-16, $m(\text{st. } \angle B) = 180°$. Nótese que los lados de un ángulo derecho están en la misma línea recta; pero no confunda un ángulo derecho con una línea recta.

5. *Ángulo reflejo:* un ángulo reflejo es un ángulo que mide más de 180° y menos de 360°.
   En la figura 1-17, 180° es menor de $c°$ y $c°$ es menor de 360°; esto se denota como $180° < c° < 360°$.

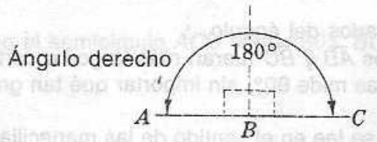


Fig. 1-16

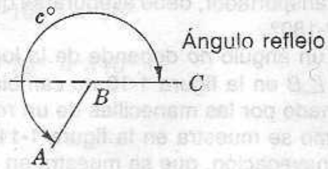


Fig. 1-17

1.5D Más sobre ángulos

1. *Ángulos congruentes:* son ángulos que tienen el mismo número de grados. En otras palabras, si $m\angle A = m\angle B$, entonces $\angle A \cong \angle B$.

   Entonces en la figura 1-18, rt.$\angle A \cong$ rt.$\angle B$ ya que ambos miden 90°.

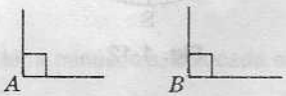


Fig. 1-18

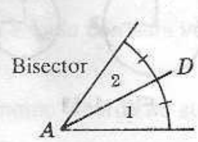


Fig. 1-19

2. *Bisectriz* es una línea que divide un ángulo en dos partes congruentes.

   Así, en la figura 1-19, si $\overline{AD}$ bisecta a $\angle A$, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$. (Puede comprobarse que dos ángulos son congruentes marcando sus arcos con el mismo número de trazos equidistantes. Aquí los arcos de $\angle$s 1 y 2 están marcados con un solo trazo.)

3. *Perpendiculares:* son líneas, rayos o segmentos que se intersectan formando ángulos rectos.

   El símbolo para una perpendicular es $\perp$; para varias perpendiculares, $\perp$s. En la figura 1-20, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, de tal manera que se forman los ángulos rectos 1 y 2.

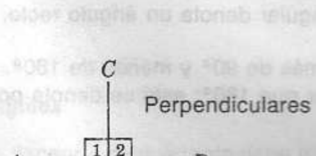


Fig. 1-20

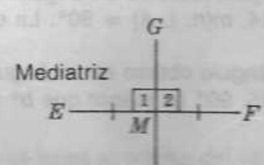


Fig. 1-21

4. Una *mediatriz* de un segmento dado es un bisector perpendicular al segmento que lo bisecta.

   En la figura 1-21, $\overleftrightarrow{GH}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{EF}$; de modo que $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos y M es el punto de $\overline{EF}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.5 Identificación de Ángulos

Identifique los siguientes ángulos en la figura 1-22: (*a*) dos ángulos obtusos; (*b*) un ángulo recto; (*c*) un ángulo derecho; (*d*) un ángulo agudo en *D*; (*e*) un ángulo agudo en *B*.

Soluciones

(*a*) $\angle ABC$ y $\angle ADB$ (o $\angle 1$). Es posible designar a los ángulos cambiando el orden de las letras: $\angle CBA$ y $\angle BDA$.

(*b*) $\angle DBC$

(*c*) $\angle ADC$

(*d*) $\angle 2$ o $\angle BDC$

(*e*) $\angle 3$ o $\angle ABD$

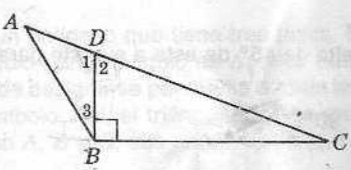


Fig. 1-22

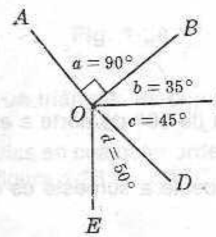


Fig. 1-23

1.6 Adición y Resta de Ángulos

En la figura 1-23, calcule (*a*) $m\angle AOC$, (*b*) $m\angle BOE$, (*c*) la magnitud del ángulo obtuso $\angle AOE$.

Soluciones

(*a*) $m\angle AOC = m\angle a + m\angle b = 90° + 35° = 125°$

(*b*) $m\angle BOE = m\angle b + m\angle c + m\angle d = 35° + 45° + 50° = 130°$

(*c*) $m\angle AOE = 360° - (m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d) = 360° - 220° = 140°$

1.7 Cálculo de Partes de Ángulos

Calcule: (*a*) $\frac{2}{5}$ de un $\angle$ recto; (*b*) $\frac{2}{3}$ de un $\angle$ derecho; (*c*) $\frac{1}{2}$ de 31°; (*d*) $\frac{1}{10}$ de 70°20'.

Soluciones

(*a*) $\frac{2}{5}(90°) = 36°$

(*b*) $\frac{2}{3}(180°) = 120°$

(*c*) $\frac{1}{2}(31°) = 15\frac{1}{2}° = 15°30'$

(*d*) $\frac{1}{10}(70°20') = \frac{1}{10}(70°) + \frac{1}{10}(20') = 7°2'$

1.8 Cálculo de Rotaciones

En media hora, ¿qué rotación realiza: (*a*) el minutero y (*b*) la manecilla que marca las horas de un reloj? ¿Qué rotación se necesita para voltear: (*c*) del norte al sureste en dirección de las manecillas del reloj; (*d*) del noroeste al suroeste en dirección contraria a las manecillas del reloj (Fig. 1-24)?

Soluciones

(*a*) En 1 hora, el minutero completa un círculo de 360°. Por lo que en media hora recorre 180°.

(*b*) En 1 hora, la manecilla de las horas recorre $\frac{1}{12}$ de 360° o 30°. Por lo que en media hora recorre 15°.

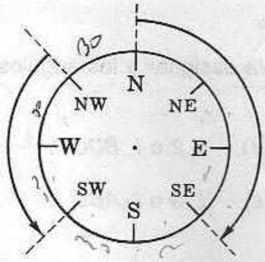


Fig. 1-24

(*c*) Sume una vuelta de 90° de norte a este y una vuelta de 45° de este a sureste para obtener 90° + 45° = 135°.

(*d*) La vuelta de noroeste a suroeste es de $\frac{1}{4}(360°) = 90°$.

1.9 Medición de Ángulos

Encuentre la medida del ángulo formado por las manecillas del reloj en la figura 1-25, (*a*) cuando el reloj marca las 8 y (*b*) cuando el reloj marca las 4:30.

Soluciones

(*a*) Cuando el reloj marca las 8, $m\angle a = \frac{1}{3}(360°) = 120°$.

(*b*) Cuando el reloj marca las 4:30, $m\angle b = \frac{1}{2}(90°) = 45°$.

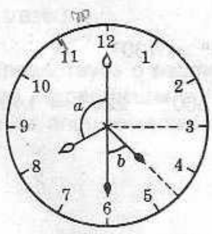


Fig. 1-25

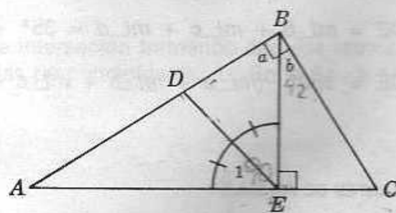


Fig. 1-26

1.10 Aplicación de Ángulos Equivalentes

En la figura 1-26, (*a*) identifique dos pares de segmentos perpendiculares; (*b*) calcule $m\angle a$ si $m\angle b = 42°$; (*c*) calcule $m\angle AEB$ y $m\angle CED$.

Soluciones

(*a*) Como $\angle ABC$ es un ángulo recto, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Como $\angle BEC$ es un ángulo recto, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

(*b*) $m\angle a = 90° - m\angle b = 90° - 42° = 48°$.

(*c*) $m\angle AEB = 180° - m\angle BEC = 180° - 90° = 90°$. $m\angle CED = 180° - m\angle 1 = 180° - 45° = 135°$.

1.6 TRIÁNGULOS

Un *polígono* es una figura plana cerrada y acotada; que tiene por lados segmentos de líneas rectas. Así, la figura 1-27 muestra un polígono de cinco lados, denominado *pentágono*; se le designa como pentágono *ABCDE*, con las literales en el orden que aparecen.

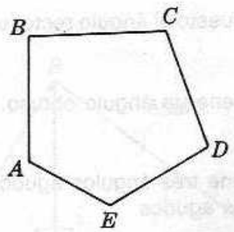


Fig. 1-27

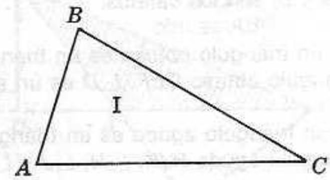


Fig. 1-28

Un *triángulo* es un polígono que tiene tres lados. El *vértice* de un triángulo es el punto en el que se juntan dos de sus lados. El símbolo para triángulo es △; para triángulos, ⧍.

Un triángulo puede designarse por medio de tres letras mayúsculas en cualquier orden o por medio de un número romano dentro del símbolo. Así, el triángulo que se muestra en la figura 1-28 es $\triangle ABC$ o △I; sus lados son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$; sus vértices son A, B y C; sus ángulos son $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

1.6A Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican de acuerdo a los lados iguales que tienen o de acuerdo al tipo de ángulos que poseen.

Triángulos de acuerdo al número de lados iguales que tienen (Fig. 1-29)

1. *Triángulo escaleno:* un triángulo escaleno es un triángulo que no tiene lados congruentes.
   Así en el triángulo escaleno ABC, $a \neq b \neq c$. La letra minúscula utilizada para denotar cada uno de sus lados corresponde a la letra mayúscula del vértice opuesto a éstos. Asimismo $\neq$ significa "distinto de".

2. *Triángulo isósceles:* un triángulo isósceles es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.
   Así, en un triángulo isósceles ABC, $a = c$. Tales lados iguales se conocen como los *lados* del triángulo isósceles. El lado principal es la *base b*. Los ángulos de cada lado de la base son los *ángulos base*; el ángulo opuesto a la base es el ángulo *vértico o vértice*.

3. *Triángulo equilátero:* un triángulo equilátero es un triángulo que tiene tres lados congruentes.
   Así, en el triángulo equilátero ABC, $a = b = c$. Nótese que un triángulo equilátero es un triángulo isósceles también.

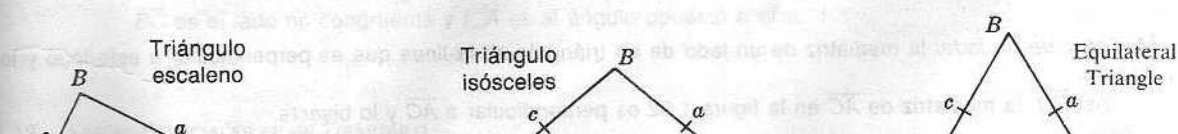


Fig. 1-29

Clasificación de triángulos de acuerdo al tipo de ángulos que contienen (Fig. 1-30)

1. *Triángulo rectángulo:* un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo recto.

Así, en el triángulo ABC, $\angle C$ es el ángulo recto. El lado c, opuesto al ángulo recto, es la *hipotenusa*. Los lados perpendiculares, a y b, son los *catetos*.

2. *Triángulo obtuso:* un triángulo obtuso es un triángulo que contiene un ángulo obtuso.
   Así, en el triángulo obtuso DEF, $\angle D$ es un ángulo obtuso.

3. *Triángulo agudo:* un triángulo agudo es un triángulo que contiene tres ángulos agudos.
   Así, en el triángulo agudo HJK, $\angle H$, $\angle J$ y $\angle K$ son ángulos agudos.

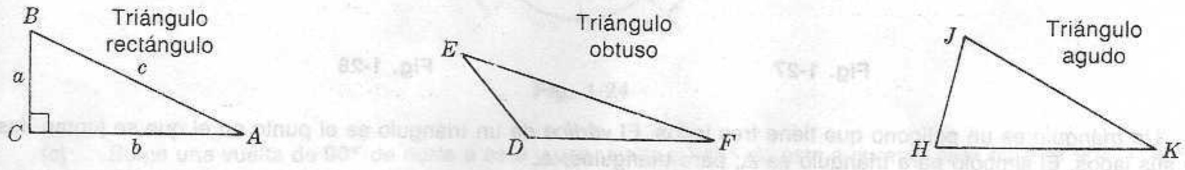


Fig. 1-30

1.6B Líneas especiales en un triángulo

1. *Bisectriz de un ángulo de un triángulo:* la bisectriz de un ángulo de un triángulo es el segmento o rayo que bisecta un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto.
   Así $\overline{BD}$, la bisectriz de $\angle B$ en la figura 1-31, bisecta $\angle B$, haciendo $\angle 1 = \angle 2$.

2. *Mediana de un triángulo:* la mediana de un triángulo es el segmento que va del vértice al punto medio del lado opuesto.
   Así $\overline{MB}$, la mediana a $\overline{AC}$, en la figura 1-32, bisecta a $\overline{AC}$, haciendo $AM = MC$.

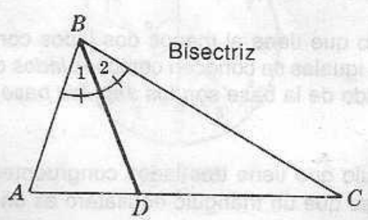


Fig. 1-31

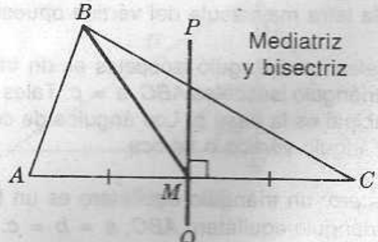


Fig. 1-32

3. *Mediatriz de un lado:* la mediatriz de un lado de un triángulo es la línea que es perpendicular a este lado y lo bisecta.
   Así $\overleftrightarrow{PQ}$, la mediatriz de $\overline{AC}$ en la figura 1-32 es perpendicular a $\overline{AC}$ y lo bisecta.

4. *Altura sobre un lado de un triángulo:* una altura de un triángulo es el segmento que va desde el vértice hasta el lado opuesto, y perpendicular a éste.
   Así $\overline{BD}$, la altura sobre $\overline{AC}$ en la figura 1-33 es perpendicular a $\overline{AC}$ y forma los ángulos rectos 1 y 2. Cada bisectriz, mediana y altura de un triángulo van desde el vértice al lado opuesto.

5. *Alturas de triángulos obtusos:* en un triángulo obtuso, las alturas trazadas sobre cualquiera de los lados del ángulo obtuso, sale del triángulo.
   Así, en el triángulo obtuso ABC (ashurado) en la figura 1-34, las alturas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ están fuera del triángulo. En cada caso, un lado del ángulo obtuso debe extenderse.

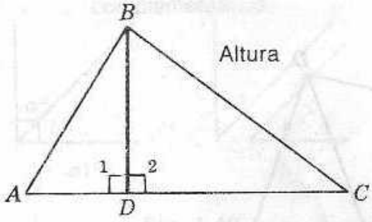


Fig. 1-33

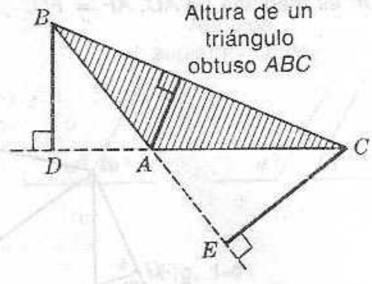


Fig. 1-34

PROBLEMAS RESUELTOS

1.11 IDENTIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS Y SUS PARTES

En la figura 1-35, identifique (*a*) un triángulo obtuso, y (*b*) dos triángulos rectángulos y la hipotenusa y catetos de cada uno. (*c*) En la figura 1-36, identifique dos triángulos isósceles; además identifique los lados congruentes, el lado no congruente y el vértice opuesto a éste último.

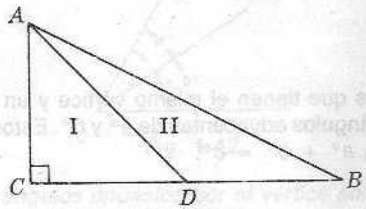


Fig. 1-35

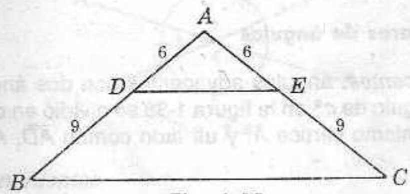


Fig. 1-36

Soluciones

(*a*) Como $\angle ADB$ es un ángulo obtuso, $\triangle ADB$ o $\triangle$II es obtuso.

(*b*) Como $\angle C$ es un ángulo recto, $\triangle$I y $\triangle ABC$ son triángulos rectángulos. En $\triangle$I, $\overline{AD}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ son los catetos. En $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos.

(*c*) Como $AD = AE$, $\triangle ADE$ es un triángulo isósceles. En $\triangle ADE$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son los lados congruentes, $\overline{DE}$ es el lado no congruente y $\angle A$ es el ángulo opuesto a éste.

Como $AB = AC$, $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. En $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los lados congruentes, $\overline{BC}$ es el lado no congruente y $\angle A$ es al ángulo opuesto a éste.

1.12 LÍNEAS ESPECIALES EN UN TRIÁNGULO

Identifique los segmentos y ángulos congruentes en la figura 1-37, (*a*) si $\overline{AE}$ es la altura sobre $\overline{BC}$; (*b*) si $\overline{CG}$ bisecta $\triangle ACB$; (*c*) si $\overline{KL}$ es mediatriz de $\overline{AD}$; (*d*) si $\overline{DF}$ es la mediana a $\overline{AC}$.

Soluciones

(*a*) Como $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.

(*b*) Como $\overline{CG}$ bisecta $\angle ACB$, $\angle 3 \cong \angle 4$.

(*c*) Como $\overline{LK}$ es la mediatriz de AD, $AL = LD$ y $\angle 7 \cong \angle 8$.

(*d*) Como $\overline{DF}$ es mediana de $\overline{AC}$, $AF = FC$.

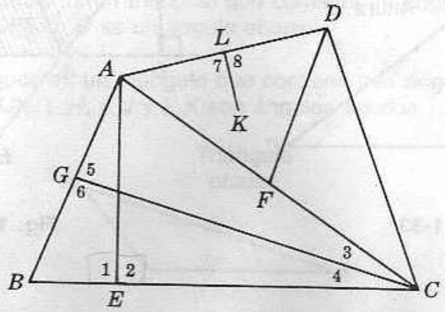


Fig. 1-37

1.7 PAREJAS DE ÁNGULOS

1.7A Tipos de pares de ángulos

1. *Ángulos adyacentes*: ángulos adyacentes son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común.
Así, el ángulo de $c°$ en la figura 1-38 se dividió en dos ángulos adyacentes de $a°$ y $b°$. Estos ángulos adyacentes tienen el mismo vértice A, y un lado común $\overrightarrow{AD}$. Aquí, $a° + b° = c°$.

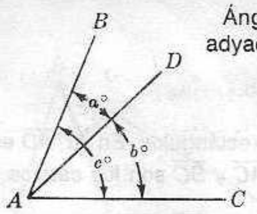


Fig. 1-38

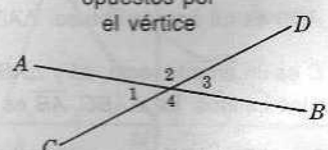


Fig. 1-39

2. *Ángulos opuestos por el vértice*: los ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos no adyacentes formados por dos líneas que se intersectan.
Por consiguiente, $\angle 1$ y $\angle 3$ en la figura 1-39, son ángulos opuestos por el vértice formados por la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Además, $\angle 2$ y $\angle 4$ son otro par de ángulos opuestos por el vértice formados por las mismas líneas.

3. *Ángulos complementarios*: Los ángulos complementarios son dos ángulos que suman un total 90°.
Así, en la figura 1-40 (*a*) los ángulos $a°$ y $b°$ son ángulos complementarios adyacentes. Sin embargo, en (*b*) los ángulos complementarios no son adyacentes. En ambos casos, $a° + b° = 90°$. A cualesquiera de los dos ángulos complementarios se le denomina como el *complemento* del otro.

4. *Ángulos suplementarios*: los ángulos suplementarios son dos ángulos que suman en total 180°.
Por lo tanto, en la figura 1-41 (*a*) los ángulos $a°$ y $b°$ son ángulos suplementarios adyacentes. Sin embargo, en (*b*) los ángulos suplementarios no son adyacentes. En ambos casos, $a° + b° = 180°$. A cualesquiera de los dos se le denomina como el *suplemento* del otro.

Ángulos complementarios

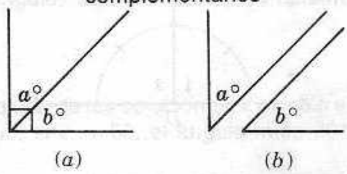


Fig. 1-40

Ángulos suplementarios

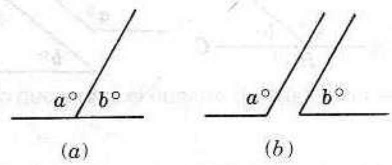


Fig. 1-41

1.7B Principios sobre pares de ángulos

Principio 1: *Si un ángulo de $c°$ se divide en dos ángulos adyacentes de $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = c°$.*
Así, si $a° = 25°$ y $b° = 35°$ en la figura 1-42, entonces $c° = 25° + 35° = 60°$.

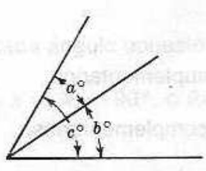


Fig. 1-42

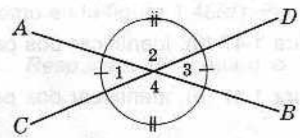


Fig. 1-43

Principio 2: *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*
Por lo que; si AB y CD son las líneas rectas en la figura 1-43, entonces $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$. De aquí, si $m\angle 1 = 40°$, entonces $m\angle 3 = 40°$; en este caso, $m\angle 2 = m\angle 4 = 140°$.

Principio 3: *Si dos ángulos complementarios miden $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = 90°$.*
Así, si los ángulos $a°$ y $b°$ son complementarios y $a° = 40°$, entonces $b° = 50°$ [Fig. 1-44(*a*) o (*b*)].

Principio 4: *Los ángulos adyacentes son complementarios si sus lados exteriores son perpendiculares entre sí.*

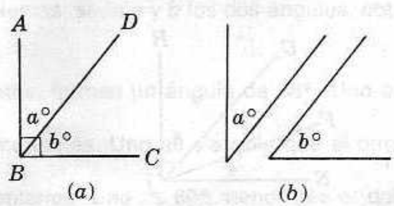


Fig. 1-44

Así pues, en la figura 1-44(*a*), $a°$ y $b°$ son complementarios, ya que sus lados exteriores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares entre sí.

Principio 5: *Si dos ángulos suplementarios miden $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = 180°$.*
Por consiguiente, si los ángulos $a°$ y $b°$ son suplementarios y $a° = 140°$, entonces $b° = 40°$ [Fig. 1-45(*a*) o (*b*)].

Principio 6: *Los ángulos adyacentes son suplementarios si sus lados exteriores están sobre la misma línea recta.*
Así en la figura 1-45(*a*) $a°$ y $b°$ son ángulos suplementarios, ya que sus lados exteriores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, están sobre la misma línea recta $\overleftrightarrow{AC}$.

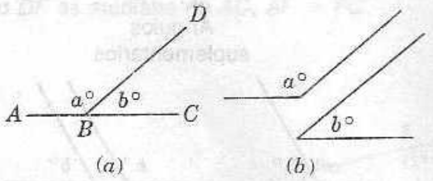


Fig. 1-45

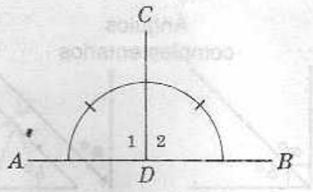


Fig. 1-46

Principio 7: *Si los ángulos suplementarios son congruentes; cada uno de ellos es un ángulo recto. (Ángulos suplementarios iguales, son ángulos rectos.)*

Por lo tanto; si $\angle 1$ y $\angle 2$ en la figura 1-46 son congruentes y suplementarios a la vez, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.13 Identificación de Pares de Ángulos

(*a*) En la figura 1-47 (*a*), identificar dos pares de ángulos suplementarios.

(*b*) En la figura 1-47 (*b*), identificar dos pares de ángulos complementarios.

(*c*) En la figura 1-47 (*c*), identificar dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

Soluciones

(*a*) Como su suma es 180°, los ángulos suplementarios son **(*1*) $\angle 1$ y $\angle BED$**; (*2*) $\angle 3$ y $\angle AEC$.

(*b*) Como su suma es 90°, los ángulos complementarios son **(*1*) $\angle 4$ y $\angle FJH$**; (*2*) $\angle 6$ y $\angle EJG$.

(*c*) Como $\overleftrightarrow{KL}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ son líneas que se intersectan, los ángulos opuestos por el vértice son (*1*) $\angle 8$ y $\angle 10$; (*2*) $\angle 9$ y $\angle MOK$.

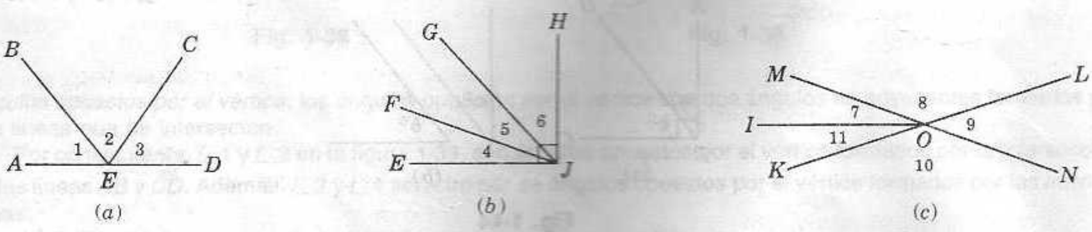


Fig. 1-47

1.14 Cálculo de Pares de Ángulos

Encuentre dos ángulos tales que:

(*a*) Los ángulos son suplementarios y el mayor es dos veces el menor.

(*b*) Los ángulos son complementarios y el mayor es 20° mayor que el menor.

(*c*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo de 120°. El mayor es 20° menor que tres veces el menor.

(*d*) Los ángulos son vertilares y complementarios.

Soluciones

En cada una de las soluciones, x es sólo el número que indica el número de grados contenidos en el ángulo. De modo que, si $x = 60$, el ángulo mide 60°.

(*a*) Sea $x = m$ (el ángulo menor) y $2x = m$ (el ángulo mayor), como en la figura 1-48(*a*).
Principio 5: $x + 2x = 180$, así $3x = 180$; $x = 60$.
$2x = 120$. *Respuesta* 60° y 120°

(*b*) Sea $x = m$ (el ángulo menor) y $x + 20 = m$ (el ángulo mayor), como en la figura 1-48(*b*).
Principio 3: $x + (x + 20) = 90$, o $2x + 20 = 90$; $x = 35$.
$x + 20 = 55$. *Respuesta* 35° y 55°

(*c*) Sea $x =$ m (el ángulo más pequeño) y $3x - 20 =$ m (el ángulo más grande) como se ve en la figura 1-48(*c*).
Principio 1: $x + (3x - 20) = 120$, o $4x - 20 = 120$; $x = 35$.
$3x - 20 = 85$. *Respuesta* 35° y 85°

(*d*) Sea $x = m$ (cada ángulo opuesto por el vértice), como en la figura 1-48(*d*). Por el Principio 2, éstos son congruentes.
Principio 3: $x + x = 90°$, o $2x = 90$; $x = 45$. *Respuesta* 45° cada uno

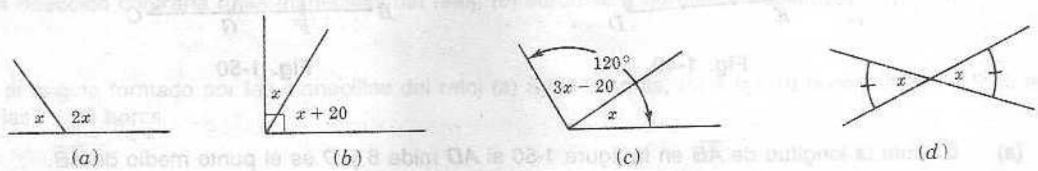


Fig. 1-48

1.15 Cálculo de Pares de Ángulos Utilizando Dos Incógnitas

En cada uno de los siguientes problemas, sean a y b los dos ángulos, obténgase dos ecuaciones para cada caso, y calcúlense los ángulos.

(*a*) Los ángulos son adyacentes, forman un ángulo de 88°. Uno es 36° mayor que el otro.

(*b*) Los ángulos son complementarios. Uno es el doble que el otro.

(*c*) Los ángulos son suplementarios. Uno es 60° menor que el doble del otro.

(*d*) Los ángulos son dos ángulos de un triángulo, cuyo tercer ángulo mide 40°. La diferencia entre los ángulos es de 24°.

Soluciones

(*a*) $a + b = 88$
$a = b + 36$ *Respuesta* 62° y 26°

(*b*) $a + b = 90$
$a = 2b$ *Respuesta* 60° y 30°

(*c*) $a + b = 180$
$a = 2b - 60$ *Respuesta* 100° y 80°

(*d*) $a + b = 140$
$a - b = 24$ *Respuesta* 82° y 58°

Problemas Complementarios

El número entre paréntesis asociado con cada problema complementario, se refiere al grupo de problemas resueltos que contienen problemas del mismo tipo. Como guía, remítase a ellos.

1. Punto, línea y plano son términos indefinidos. ¿Cuál de éstos es ilustrado por: (*a*) la punta de un lápiz afilado; (*b*) el filo de una navaja de rasurar; (*c*) una hoja de papel; (*d*) el lado de una caja; (*e*) el pliegue de un papel doblado; (*f*) el entronque de dos caminos en un plano? (1.1)

2. (*a*) Identifique los segmentos de línea que intersectan a *E* en la figura 1-49. (1.2)

   (*b*) Identifique los segmentos de línea que intersectan a *D*.

   (*c*) ¿Qué otros segmentos de línea pueden trazarse?

   (*d*) Identifique el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

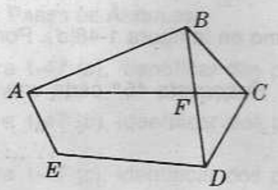


Fig. 1-49

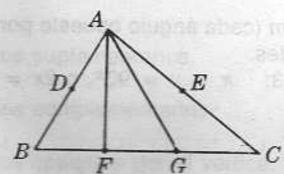


Fig. 1-50

3. (*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$ en la figura 1-50 si *AD* mide 8 y *D* es el punto medio de $\overline{AB}$. (1.3)

   (*b*) Calcule la longitud de $\overline{AE}$ si *AC* mide 21, y *E* es el punto medio de $\overline{AC}$. (1.3)

4. (*a*) Calcule *OB* en la figura 1-51, si el diámetro $AD = 36$. (1.4)

   (*b*) Calcule el número de grados en $\widehat{AE}$ si *E* es el punto medio del semicírculo $\widehat{AED}$. Calcule el número de grados en (*c*) $\widehat{CD}$; (*d*) $\widehat{AC}$; (*e*) $\widehat{AEC}$.

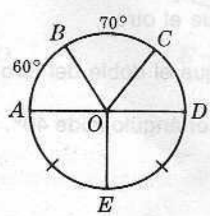


Fig. 1-51

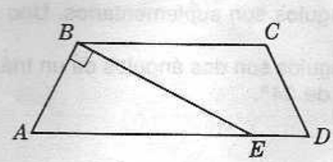


Fig. 1-52

5. Identifique los siguientes ángulos en la figura 1-52: (*a*) un ángulo agudo en *B*; (*b*) un ángulo agudo en *E*; (*c*) un ángulo recto; (*d*) tres ángulos obtusos; (*e*) un ángulo derecho. (1.5)

6. (*a*) Hallar $m\angle ADC$ si $m\angle c = 45°$ y $m\angle d = 85°$ en la figura 1-53. (1.6)

(*b*) Hallar $m\angle AEB$ si $m\angle e = 60°$.

(*c*) Hallar $m\angle EBD$ si $m\angle a = 15°$.

(*d*) Hallar $m\angle ABC$ si $m\angle b = 42°$.

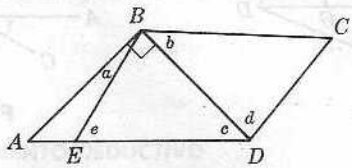


Fig. 1-53

7. Calcule (*a*) $\frac{5}{6}$ de un $\angle$ rectángulo; (*b*) $\frac{2}{3}$ de un $\angle$ derecho; (*c*) $\frac{1}{3}$ de 31°; (*d*) $\frac{1}{5}$ de 45°55'. (1.7)

8. ¿Qué rotación realiza (*a*) la manecilla de las horas en 3 horas; (*b*) la manecilla de los minutos en $\frac{1}{3}$ de hora? ¿Qué rotación se necesita para virar de (*c*) oeste a noreste en dirección de las manecillas del reloj; (*d*) este a sur en dirección contraria a las manecillas del reloj; (*e*) suroeste a noreste en cualquier dirección? (1.8)

9. Halle el ángulo formado por las manecillas del reloj (*a*) a las 3 horas; (*b*) a las 10 horas; (*c*) a las 5:30 horas; (*d*) a las 11:30 horas. (1.9)

10. En la figura 1-54: (1.10)

(*a*) Identifique dos pares de líneas perpendiculares.

(*b*) Encuentre el valor de $m\angle BCD$ si $m\angle 4$ mide 39°.

Si $m\angle 1 = 78°$, calcule (*c*) $m\angle BAD$; (*d*) $m\angle 2$; (*e*) $m\angle CAE$.

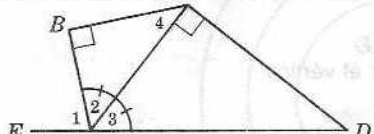


Fig. 1-54

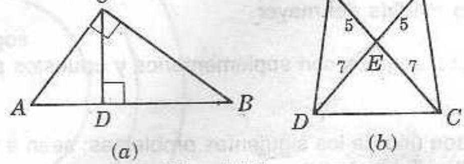


Fig. 1-55

11. (*a*) En la figura 1-55(*a*), identifique tres triángulos rectángulos, y la hipotenusa y catetos de cada uno. En la figura 1-55(*b*), (*b*) identifique dos triángulos obtusos y (*c*) dos triángulos isósceles; identificando también sus lados, base y el ángulo del vértice en cada uno. (1.11)

12. En la figura 1-56, identifique las líneas y ángulos congruentes (*a*) si $\overline{PR}$ es mediatriz de $\overline{AB}$; (*b*) si $\overline{BF}$ es bisectriz de $\angle ABC$; (*c*) si $\overline{CG}$ es una altura sobre $\overline{AD}$; (*d*) si $\overline{EM}$ es la mediana de $\overline{AD}$. (1.12)

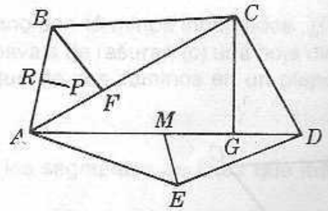


Fig. 1-56

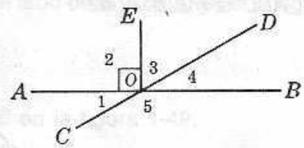


Fig. 1-57

13. En la figura 1-57, indicar la relación entre: (1.13)

(*a*) $\angle 1$ y $\angle 4$

(*b*) $\angle 3$ y $\angle 4$

(*c*) $\angle 1$ y $\angle 2$

(*d*) $\angle 4$ y $\angle 5$

(*e*) $\angle 1$ y $\angle 3$

(*f*) $\angle AOD$ y $\angle 5$

14. Hallar dos ángulos tales que: (1.14)

(*a*) Los ángulos son complementarios y la medida del menor es 40° menor que la medida del mayor.

(*b*) Los ángulos son complementarios y la medida del mayor es cuatro veces la medida del menor.

(*c*) Los ángulos son suplementarios y la medida del menor es la mitad de la medida del mayor.

(*d*) Los ángulos son suplementarios y la medida del mayor es 58° mayor que la medida del menor.

(*e*) Los ángulos son suplementarios y la medida del mayor es 20° menor que tres veces la medida del menor.

(*f*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo que mide 140°. La medida del menor es 28° menor que la medida del mayor.

(*g*) Los ángulos son suplementarios y opuestos por el vértice.

15. Para cada uno de los siguientes problemas; sean *a* y *b* dos ángulos. Obténgase dos ecuaciones en cada caso, y calcúlense los ángulos. (1.15)

(*a*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo que mide 75°. Su diferencia es de 21°.

(*b*) Los ángulos son complementarios. Uno mide 10° menos que tres veces el otro.

(*c*) Los ángulos son suplementarios. Uno mide 20° más que cuatro veces el otro.

2

Métodos de demostración

2.1 DEMOSTRACIÓN POR RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

2.1A El razonamiento deductivo es una demostración

El razonamiento deductivo permite obtener conclusiones verdaderas o aceptablemente verdaderas a partir de proposiciones que también lo son, o que son aceptadas como tales. El método consiste de los siguientes tres pasos:

1. Enunciación de una *proposición general* referente a todo un conjunto o clase de objetos; por ejemplo, la clase de perros: *Todos los perros son cuadrúpedos* (*tienen cuatro patas*).
2. Enunciación de una *proposición particular* sobre uno o algunos de los miembros del conjunto o clase, a los que se hace referencia en la proposición general: *Todos los galgos son perros*.
3. Inferencia de una *deducción* que sea consecuencia lógica de la aplicación de la proposición general sobre la particular: *Todos los galgos son cuadrúpedos*.

Al razonamiento deductivo se le denota como *razonamiento silogístico*; ya que las tres proposiciones en conjunto hacen un silogismo. En un silogismo, la proposición general se llama premisa mayor, la proposición particular es la premisa menor; mientras que la deducción es la conclusión. Así, en el silogismo anterior:

1. La premisa mayor es: *todos los perros son cuadrúpedos*.
2. La premisa menor es: *todos los galgos son perros*.
3. La conclusión es: *todos los galgos son cuadrúpedos*.

Fig. 2-1

El empleo de un círculo como en la figura 2-1 para representar cada conjunto o clase, le ayudará a entender las relaciones comprendidas en el razonamiento deductivo.

1. Dado que la premisa mayor o proposición general establece que todos los perros son cuadrúpedos, el círculo que representa a los perros debe estar contenido en el de los cuadrúpedos.

2. Supuesto que la premisa menor o proposición particular establece que todos los galgos son perros, el círculo que representa a los galgos debe estar contenido en el de los perros.

3. La conclusión es obvia. Dado que el círculo de los galgos debe estar dentro del círculo de los cuadrúpedos, la única conclusión posible es que los galgos son cuadrúpedos.

2.1B La observación, la medida y la experimentación no son una demostración

La *observación no puede utilizarse como prueba*. La vista puede ser defectuosa; como es el caso de una persona que padezca de astigmatismo. Las apariencias pueden ser engañosas. Así, en cada parte de la figura 2-2, *AB* no parece ser igual a *CD*; aunque efectivamente lo es.

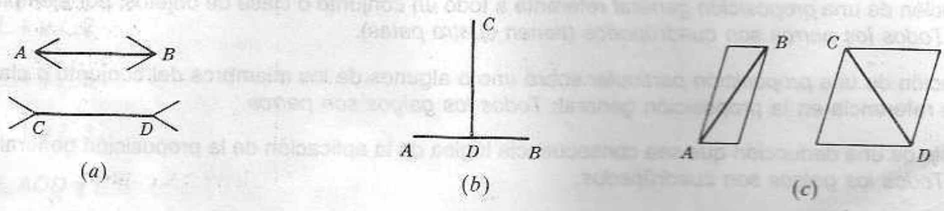


Fig. 2-2

La *medición no puede utilizarse como prueba*. La medición sólo es aplicable al número limitado de casos. La conclusión que suministra no es exacta sino aproximada; ello depende de la precisión del instrumento de medición y de la habilidad del observador. En la medida debe considerarse la posibilidad de un error; igual a la mitad de la unidad más pequeña empleada en el instrumento. Así, si se está midiendo un ángulo hasta el grado más cercano, debe aceptarse una tolerancia de la mitad de un grado.

La *experimentación no puede utilizarse como prueba*. Sus conclusiones son sólo una probabilidad que depende de la circunstancia o situación particulares, examinadas durante el proceso de experimentación. Así, es probable que un par de dados estén cargados si en diez experiencias consecutivas se obtienen 20 sietes; esta probabilidad aumenta si se obtiene el mismo resultado en veinte experiencias sucesivas; sin embargo, estas probabilidades por muy altas que sean no representan certeza.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1 Utilícense Círculos para Determinar Relaciones de Grupo

De (*a*) a (*e*), cada letra tal como *A*, *B* y *R* representa un conjunto o grupo. Complétese cada proposición empleando círculos para representar estos conjuntos o grupos.

(*a*) Si *A* es *B* y *B* es *C*, entonces ___?___.

(*b*) Si *A* es *B* y *B* es *E* y *E* es *R*, entonces ___?___.

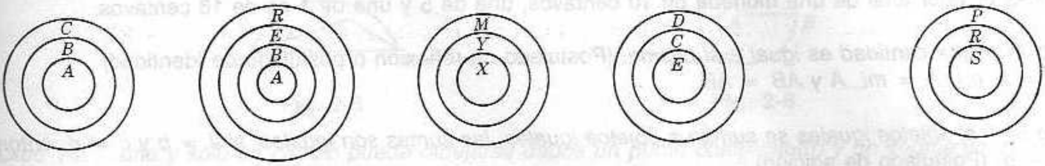
(*c*) Si *X* es *Y* y ___?___, entonces *X* es *M*.

(*d*) Si *C* es *D* y *E* es *C*, entonces __?__.

(*e*) Si los cuadrados (*S*) son rectángulos (*R*) y los rectángulos son paralelogramos (*P*), entonces __?__.

Respuestas

(*a*) *A* es *C* (*b*) *A* es *R* (*c*) *Y* es *M* (*d*) *E* es *D* (*e*) los cuadrados son paralelogramos



2.2 Complementación de un Silogismo

Escriba la proposición adecuada para completar cada silogismo:

Premisa mayor (proposición general)	**Premisa menor** (proposición particular)	**Conclusión** (proposición deducida)
(*a*) Un gato es un animal doméstico.	Minino es un gato.	__?__
(*b*) Todos los hombres deben morir.	__?__	Juan debe morir.
(*c*) Los ángulos verticales son congruentes.	$\angle c$ y $\angle d$ son ángulos verticales.	__?__
(*d*) __?__	Un cuadrado es un rectángulo.	Un cuadrado tiene diagonales congruentes.
(*e*) Un triángulo obtuso tiene sólo un ángulo obtuso.	?	$\triangle ABC$ tiene sólo un ángulo obtuso.

Respuestas

(*a*) Minino es un animal doméstico.

(*b*) Juan es un hombre.

(*c*) $\angle c \cong \angle d$.

(*d*) Un rectángulo tiene diagonales congruentes.

(*e*) $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso.

2.2 POSTULADOS (HIPÓTESIS)

Toda la estructura de demostración en geometría descansa sobre, o comienza con, algunas proposiciones generales no demostradas, llamadas *postulados*. Es necesario suponer o aceptar que estas proposiciones son verdaderas, y así deducir o demostrar otras proposiciones.

2.2A Postulados algebraicos

Postulado 1: *objetos iguales a sí mismos o a otros objetos iguales son iguales entre sí; si* $a = b$ *y* $c = b$ *entonces* $a = c$. (Postulado transitivo)

Por consiguiente, el valor total de una moneda de 10 centavos es igual al valor de dos monedas de cinco centavos, ya que en ambos casos se tiene el valor de diez centavos.

Postulado 2: *una cantidad puede sustituirse por su equivalente en cualquier expresión o ecuación.* (Postulado de sustitución)

Así, si $x = 5$ y $y = x + 3$, podemos sustituir 5 donde aparece x y encontrar que $y = 5 + 3 = 8$.

Postulado 3: *el total es igual a la suma de sus partes.* (Postulado de partición)

Entonces el valor total de una moneda de 10 centavos, una de 5 y una de 1 es de 16 centavos.

Postulado 4: *una cantidad es igual a sí misma.* (Postulado de reflexión o postulado de identidad)

Así $x = x$, $m\angle A = m\angle A$ y $AB = AB$.

Postulado 5: *si objetos iguales se suman a objetos iguales, las sumas son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.* (Postulado de adición)

Si	7 monedas de 10₵ = 70₵		Si	$x + y = 12$
y	2 monedas de 10₵ = 20₵		y	$x - y = 8$
entonces	9 monedas de 10₵ = 90₵		entonces	$2x = 20$

Postulado 6: *si objetos iguales se restan de objetos iguales, sus diferencias son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $a - c = b - d$.* (Postulado de sustracción)

Si	7 monedas de 10₵ = 70₵		Si	$x + y = 12$
y	2 monedas de 10₵ = 20₵		y	$x - y = 8$
entonces	5 monedas de 10₵ = 50₵		entonces	$2y = 4$

Postulado 7: *si objetos iguales se multiplican por objetos iguales, sus productos son iguales; si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$.* (Postulado de la multiplicación)

Así pues, si el precio de un libro es de \$2, el precio de tres libros es \$6.

Axioma especial de la multiplicación: los duplicados de cantidades iguales, son iguales.

Postulado 8: *si objetos iguales son divididos por objetos iguales, los cocientes son iguales, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a/c = b/d$, donde $c, d \neq 0$.* (Postulado de la división)

Por consiguiente, si el precio de 1 lb de mantequilla cuesta 80₵, entonces para la misma tasa, el precio de ¼ de lb es de 20₵.

Postulado 9: *cantidades iguales elevadas a potencias iguales son iguales; si $a = b$, entonces $a^n = b^n$.* (Postulado de la potencia)

Así, si $x = 5$ entonces $x^2 = 5^2$ o $x^2 = 25$.

Postulado 10: *raíces iguales de cantidades iguales son iguales; si $a = b$ entonces $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.*

Por eso, si $y^3 = 27$, entonces $y = \sqrt[3]{27} = 3$.

2.2B Postulados geométricos

Postulado 11: *entre dos puntos cualesquiera, puede trazarse una y sólo una línea recta.*

Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AB}$ es la única línea que puede ser trazada entre los puntos A y B en la figura 2-3.

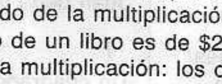


Fig. 2-3

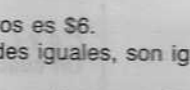


Fig. 2-4

POSTULADO 12: *dos líneas se intersectan en uno y sólo un punto.*
Entonces, P es el único punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en la figura 2-4.

POSTULADO 13: *la longitud de un segmento es la distancia más corta entre dos puntos.*
Así $\overline{AB}$ es más corta que las líneas curva y quebrada entre los puntos A y B en la figura 2-5.

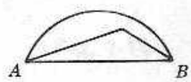


Fig. 2-5

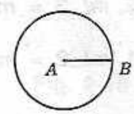


Fig. 2-6

POSTULADO 14: *uno y sólo un círculo puede dibujarse dados un punto como centro y un segmento de línea como radio.*
De modo que sólo el círculo A en la figura 2-6 puede dibujarse con A como centro y $\overline{AB}$ como radio.

POSTULADO 15: *cualquier figura geométrica puede cambiarse de lugar sin modificar su forma o su tamaño.*
Así $\triangle$I en la figura 2-7 puede cambiarse a otra posición sin modificar su tamaño o su forma.

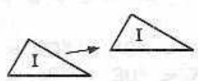


Fig. 2-7

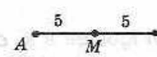


Fig. 2-8

POSTULADO 16: *un segmento tiene uno y sólo un punto medio.*
Por lo tanto M es el único punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 2-8.

POSTULADO 17: *un ángulo tiene una y sólo una bisectriz.*
Por eso, sólo $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz de $\angle A$ en la figura 2-9.

POSTULADO 18: *a través de cualquier punto de una línea puede lanzarse una y sólo una perpendicular a ella.*
Así, sólo existe $\overrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ en el punto P de $\overleftrightarrow{AB}$. (Fig. 2-10)

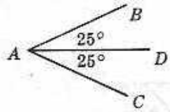


Fig. 2-9

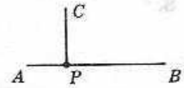


Fig. 2-10

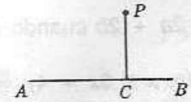


Fig. 2-11

POSTULADO 19: *a través de cualquier punto fuera de una línea puede trazarse una y sólo una perpendicular a esa línea.*
Sólo $\overline{PC}$ puede trazarse $\perp \overleftrightarrow{AB}$ desde el punto P afuera de $\overleftrightarrow{AB}$ en la figura 2-11.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.3 APLICACIÓN DEL POSTULADO 1

En cada caso, ¿qué conclusión se obtiene de la aplicación del postulado 1, a la información contenida en las figuras 2-12 y 2-13?

(a) Dado: $a = 10, b = 10, c = 10$

(*b*) Dado: $a = 25$, $a = c$

(*c*) Dado: $a = b$, $c = b$

(*d*) Dado: $m\angle 1 = 40°$, $m\angle 2 = 40°$, $m\angle 3 = 40°$

(*e*) Dado: $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 3 = m\angle 1$

(*f*) Dado: $m\angle 3 = m\angle 1$, $m\angle 2 = m\angle 3$

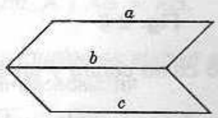


Fig. 2-12

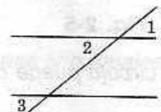


Fig. 2-13

Respuestas

(*a*) Dado que *a*, *b* y *c* son iguales a 10, $a = b = c$.

(*b*) Dado que *c* y 25 son iguales a *a*, $c = 25$.

(*c*) Dado que *a* y *c* son iguales a *b*, $a = c$.

(*d*) Dado que $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ cada uno mide 40°, $\angle 1 \cong \angle 2 \cong 3$.

(*e*) Dado que $\angle 2$ y $\angle 3$ cada uno es $\cong \angle 1$, $\angle 2 \cong \angle 3$.

(*f*) Dado que $\angle 1$ y $\angle 2$ cada uno es $\cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 2$.

2.4 Aplicación del Postulado 2

En cada caso, ¿qué conclusión se obtiene cuando se aplica el postulado 2 a la información proporcionada?

(*a*) Calcule $2a + 2b$ cuando $a = 4$ y $b = 8$.

(*b*) Encuentre *x* si $3x + 4y = 35$ y $y = 5$.

(*c*) Dado $m\angle 1 + m\angle B + m\angle 2 = 180°$, $\angle 1 \cong \angle A$ y $\angle 2 \cong \angle C$ en la figura 2-14.

Respuestas

(*a*) Sustituya 4 por *a* y 8 por *b*:

$$2a + 2b$$
$$2(4) + 2(8)$$

Resp. $8 + 16 = 24$

(*c*) Sustituya $\angle A$ por $\angle 1$ y $\angle C$ por $\angle 2$:

$$m\angle 1 + m\angle B + m\angle 2 = 180°$$

Resp. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

(*b*) Sustituya 5 por *y*:

$$3x + 4y = 35$$
$$3x + 4(5) = 35$$
$$3x + 20 = 35$$

Resp. $3x = 15, \quad x = 5$

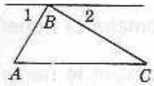


Fig. 2-14

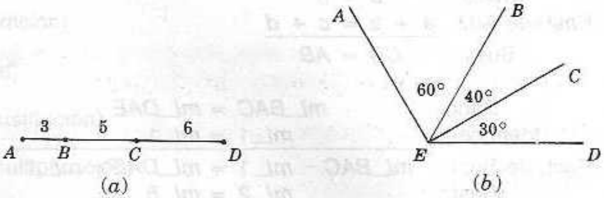


Fig. 2-15

2.5 Aplicación del Postulado 3

Establezca las conclusiones que siguen a la aplicación del postulado 3 a los datos de (*a*) la figura 2-15(*a*), (*b*) la figura 2-15(*b*).

Respuestas

(*a*) $AC = 3 + 5 = 8$
$BD = 6 + 5 = 11$
$AD = 3 + 5 + 6 = 14$

(*b*) $m\angle AEC = 60° + 40° = 100°$
$m\angle BED = 40° + 30° = 70°$
$m\angle AED = 60° + 40° + 30° = 130°$

2.6 Aplicación de los Postulados 4, 5 y 6

En cada caso establecer una conclusión que resulte de la aplicación de los postulados 4, 5 y 6 en los datos que se dan a continuación:

(*a*) Dado: $a = e$ (Fig. 2-16).

(*b*) Dados: $a = c$, $b = d$ (Fig. 2-16).

(*c*) Dado: $m\angle BAC = m\angle DAE$ (Fig. 2-17).

(*d*) Dados: $m\angle BAC = m\angle BCA$, $m\angle 1 = m\angle 3$ (Fig. 2-17).

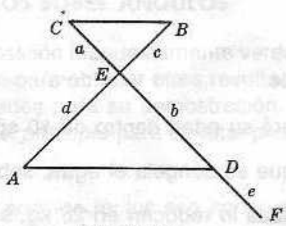


Fig. 2-16

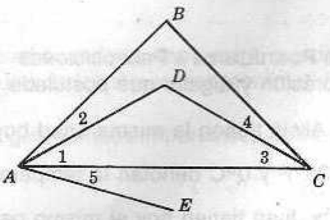


Fig. 2-17

Respuestas

(*a*)

Dado:	$a = e$
Identidad:	$b = b$
Post. de Ad.:	$a + b = e + b$
Sust.:	$CD = EF$

(*b*)
$$\begin{array}{rl}
\text{Dado:} & a = c \\
\text{Dado:} & b = d \\
\text{Post. de Ad.:} & \underline{a + b = c + d} \\
\text{Sust.:} & CD = AB
\end{array}$$

(*c*)
$$\begin{array}{rl}
\text{Dado:} & m\angle BAC = m\angle DAE \\
\text{Identidad:} & \underline{m\angle 1 = m\angle 1} \\
\text{Post. de Sust.:} & m\angle BAC - m\angle 1 = m\angle DAE - m\angle 1 \\
\text{Sust.:} & m\angle 2 = m\angle 5
\end{array}$$

(*d*)
$$\begin{array}{rl}
\text{Dado:} & m\angle BAC = m\angle BCA \\
\text{Dado:} & \underline{m\angle 1 = m\angle 3} \\
\text{Post. de Sust.:} & m\angle BAC - m\angle 1 = m\angle BCA - m\angle 3 \\
\text{Sust.:} & m\angle 2 = m\angle 4
\end{array}$$

2.7 Aplicación de los Postulados 7 y 8

Establecer las conclusiones que se obtienen cuando se aplican los axiomas de la multiplicación y de la división, a la información contenida en la (*a*) figura 2-18 y (*b*) figura 2-19.

Dados: $a = b$
$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son trisectados

Dados: $m\angle A = m\angle C$
$m\angle = \frac{1}{2} m\angle A$
$m\angle 2 = \frac{1}{2} m\angle C$

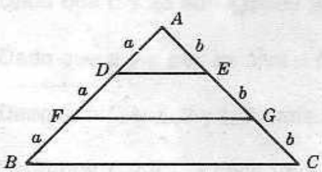


Fig. 2-18

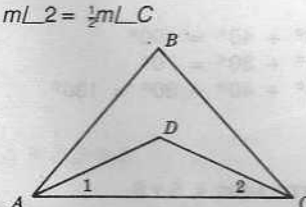


Fig. 2-19

Respuestas

(*a*) Si $a = b$, entonces $2a = 2b$ ya que la duplicación de iguales da como resultado una igualdad, en consecuencia $AF = DB = AG = EC$. También $3a = 3b$ y aplicando el postulado de la multiplicación se tiene que $AB = AC$.

(*b*) Si $m\angle A = m\angle C$, entonces $\frac{1}{2} m\angle A = \frac{1}{2} m\angle C$ ya que mitades de iguales son iguales. Por lo tanto, $m\angle 1 = m\angle 2$.

2.8 Aplicación de los Postulados a Proposiciones

Complétese cada oración y dígase qué postulado es aplicable.

(*a*) Si Harry y Alicia tienen la misma edad hoy, ¿cuál será su edad dentro de 10 años __?__.

(*b*) Dado que 32°F y 0°C denotan la temperatura a la que se congela el agua, sabemos que __?__.

(*c*) Si Enrique y Juan tienen hoy el mismo peso y si ambos lo reducen en 20 kg, se tiene que __?__.

(*d*) Si dos acciones que cuestan lo mismo, triplican su valor, entonces __?__.

(*e*) Si dos listones de igual tamaño se cortan en cinco partes iguales, entonces __?__.

(*f*) Si Agnes y Joan tienen la misma altura que Ann, entonces __?__.

(*g*) Si dos aparatos acondicionadores de ambiente del mismo precio tienen un descuento del 10%, entonces __?__.

Respuestas

(*a*) Tienen la misma edad. (Post. de adición)

(*b*) 32°F = 0°C. (Post. de transitividad)

(*c*) Tienen el mismo peso. (Post. de sustitución)

(*d*) Tienen el mismo valor. (Post. de multiplicación)

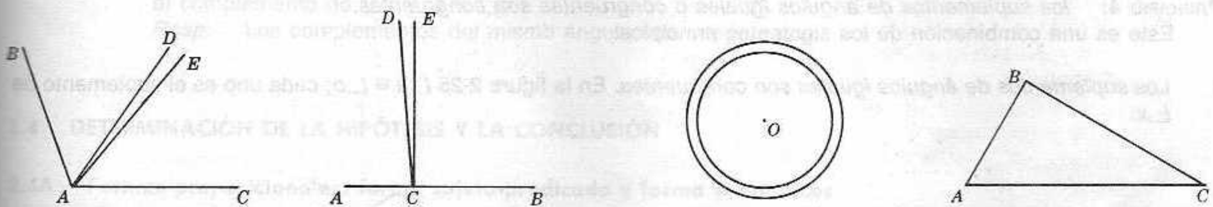
(*e*) Sus partes son del mismo tamaño. (Post. de la división)

(*f*) Joan y Agnes tienen la misma altura. (Post. de transitividad)

(*g*) Tienen el mismo precio. (Post. de sustitución)

2.9 Aplicación de Postulados Geométricos

Diga con qué postulado se corrige la proposición y diagrama asociados en la figura 2-20.



(*a*) $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ bisectan a $\angle A$. (*b*) $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (*c*) Ambos círculos tienen a O como centro y tienen el mismo radio. (*d*) $AB + BC = AC$

Fig. 2-20

Respuestas

(*a*) Postulado 17. (*b*) Postulado 18. (*c*) Postulado 14. (*d*) Postulado 13. (AC es menor o igual que la suma de AB y BC.)

2.3 TEOREMAS BÁSICOS SOBRE ÁNGULOS

Un *teorema* es una proposición (supuestamente verdadera), la cual cuando se demuestra, puede utilizarse para demostrar otras proposiciones o para obtener otros resultados. Cada uno de los siguientes teoremas fundamentales requiere de definiciones y postulados para su demostración.

Nota: se utilizará el *principio* para denotar proposiciones geométricas importantes, tales como: teoremas, postulados y definiciones.

Principio 1: *todos los ángulos rectos son congruentes.*
Así, en la figura 2-21 $\angle A \cong \angle B$

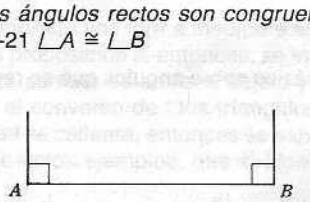


Fig. 2-21

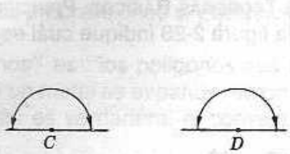


Fig. 2-22

Principio 2: *todos los ángulos derechos son congruentes.*
Así, en la figura 2-22 $\angle A \cong \angle D$.

Principio 3: *los complementos de ángulos iguales o congruentes son congruentes.*
Éste es una combinación de los siguientes principios:

1. Los *complementos de ángulos iguales son congruentes*. Así en la figura 2-23 $\angle a \cong \angle b$, cada uno es el complemento de $\angle x$.

2. Los *complementos de ángulos congruentes son congruentes.* Así en la figura 2-24 $\angle c \cong \angle d$; sus complementos son los ángulos congruentes $\angle$s x y y.

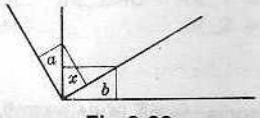


Fig.2-23

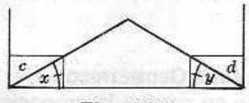


Fig. 2-24

Principio 4: *los suplementos de ángulos iguales o congruentes son congruentes.*
Éste es una combinación de los siguientes principios:

1. Los *suplementos de ángulos iguales son congruentes.* En la figura 2-25 $\angle a \cong \angle b$; cada uno es el suplemento de $\angle x$.

Fig. 2-25

Fig.2-26

2. Los *suplementos de ángulos congruentes son congruentes*. Entonces en la figura 2-26 $\angle c \cong \angle d$; sus suplementos son los ángulos congruentes x y y.

Principio 5: *los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*
Así en la figura 2-27, $\angle a \cong \angle b$; esto es consecuencia del principio 4, dado que $\angle a$ y $\angle b$ son ángulos suplementarios del mismo $\angle c$.

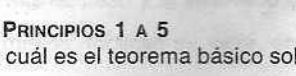


Fig. 2-27

PROBLEMAS RESUELTOS

2.10 Aplicación de los Teoremas Básicos: Principios 1 a 5

Para cada inciso de la figura 2-28 indique cuál es el teorema básico sobre ángulos que se requiere para establecer $\angle a \cong \angle b$.

Respuestas

(*a*) Dado que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son líneas rectas, $\angle a$ y $\angle b$ son ángulos $\angle$s derechos. Por lo tanto $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Todos los ángulos derechos son congruentes.

(*a*) **Dados:** $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son líneas rectas. (*b*) **Dados:** $\overline{BA} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ (*c*) **Dados:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\angle a$ comp. $\angle 1$

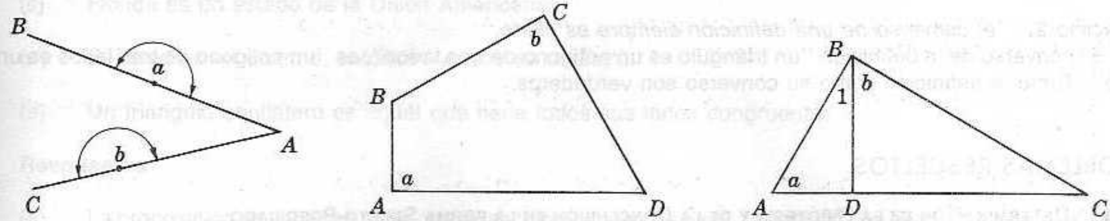


Fig. 2-28

(*b*) Dados $\overline{BA} \perp \overline{AD}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\angle a$ y $\angle b$ son $\angle^s$ rectos. Por lo tanto, $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Todos los ángulos rectos son congruentes.

(*c*) Dado $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\angle B$ es $\angle$ recto, entonces $\angle b$ es el complemento de $\angle 1$. Por lo tanto; dado que $\angle a$ es el complemento de $\angle 1$, $\angle a \cong \angle b$.
Resp. Los complementos del mismo ángulo son congruentes.

2.4 DETERMINACIÓN DE LA HIPÓTESIS Y LA CONCLUSIÓN

2.4A Formas proposicionales: forma sujeto-predicado y forma si-entonces

Las proposiciones "Un metal al calentarse se expande" y "Si un metal se calienta, entonces se expande", son dos formas de la misma idea. En la tabla siguiente, se muestra cómo dividir una forma en sus dos partes fundamentales, la *hipótesis*, que establece lo que *está dado*; y la *conclusión*, que indica *lo que es necesario demostrar*. Nótese que en la forma si-entonces, la palabra *entonces* puede omitirse.

Forma	Hipótesis (lo que está dado)	Conclusión (por demostrar)
Sujeto-predicado: *Un metal al calentarse se expande.*	**La hipótesis es el sujeto:** *Un metal al calentarse*	**La conclusión es el predicado:** *se expande.*
Si-entonces:	**La hipótesis es la proposición si:**	**La conclusión es la proposición entonces:**
Si un metal se calienta, entonces se expande.	*Si un metal se calienta*	*entonces se expande.*

2.4B El converso de una proposición*

El converso de una proposición se forma mediante el intercambio de la hipótesis por la conclusión. Entonces, para formar el converso de una proposición si-entonces, se intercambian las proposiciones si y entonces. En el caso de la forma sujeto-predicado, el intercambio es entre el sujeto y el predicado.

Por consiguiente, el converso de "los triángulos son polígonos" es "los polígonos son triángulos". También, el converso de "si un metal se calienta, entonces se expande" es "si un metal se expande, entonces se está calentando". Nótese en cada uno de estos ejemplos, que si bien la proposición es verdadera, el converso no necesariamente es cierto.

(*) N.T. Algunos autores denotan el converso como el recíproco.

Principio 1: *el converso de una proposición cierta no necesariamente es verdadero.*
Así, la proposición "los triángulos son polígonos" es cierta. Su converso no necesariamente es verdadero.

Principio 2: *el converso de una definición siempre es cierto.*
El converso de la definición "un triángulo es un polígono de tres lados", es "un polígono de tres lados es un triángulo". Tanto la definición como su converso son verdaderos.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.11 Determinación de la Hipótesis y de la Conclusión en la forma Sujeto-Predicado

Determine cuál es la hipótesis y la conclusión en cada una de las proposiciones siguientes.

Proposiciones	Respuestas: **Hipótesis** (sujeto)	**Conclusión** (predicado)
(*a*) Las perpendiculares forman ángulos rectos.	Las perpendiculares	forman ángulos rectos
(*b*) Los complementos del mismo ángulo son congruentes.	Los complementos del mismo ángulo	son congruentes
(*c*) Un triángulo equilátero es equiangular.	Un triángulo equilátero	es equiangular
(*d*) Un triángulo rectángulo tiene sólo un ángulo recto.	Un triángulo rectángulo	tiene sólo un ángulo recto
(*e*) Un triángulo no es un cuadrilátero.	Un triángulo	no es un cuadrilátero
(*f*) Un extranjero no tiene derecho al voto.	Un extranjero	no tiene derecho al voto

2.12 Determinación de la Hipótesis y la Conclusión en la Forma Si-Entonces

Determine la hipótesis y la conclusión de cada una de las proposiciones siguientes.

Proposiciones	Respuestas: **Hipótesis** (condición si)	**Conclusión** (entonces)
(*a*) Si una línea bisecta un ángulo, entonces lo divide en dos partes congruentes.	Si una línea bisecta un ángulo	entonces divide al ángulo en dos partes congruentes.
(*b*) Un triángulo tiene un ángulo obtuso si es un triángulo obtuso.	Si es un triángulo obtuso	(entonces) un triángulo tiene un ángulo obtuso.
(*c*) Si un estudiante está enfermo, no debe ir a la escuela.	Si un estudiante está enfermo	(entonces) no debe ir a la escuela.
(*d*) Un estudiante, si desea aprobar debe estudiar con regularidad.	Si desea aprobar	(entonces) debe un estudiante estudiar con regularidad.

2.13 Formación de Conversos y Determinacion de su Veracidad

Establezca si las siguientes proposiciones son verdaderas. Después construya su converso y determine si es necesariamente cierto.

(*a*) Un cuadrilátero es un polígono.

(*b*) Un ángulo obtuso tiene mayor tamaño que un ángulo recto.

(*c*) Florida es un estado de la Unión Americana.

(*d*) Si usted es mi alumno, entonces yo soy su maestro.

(*e*) Un triángulo equilátero es aquél que tiene todos sus lados congruentes.

Respuestas

(*a*) La proposición es verdadera. Su converso "un polígono es un cuadrilátero", no necesariamente es verdadero; puede ser un triángulo.

(*b*) La proposición es verdadera. Su converso "un ángulo con tamaño mayor que el de un ángulo recto es un ángulo obtuso", no es necesariamente cierto; puede ser un ángulo derecho.

(*c*) La proposición es verdadera. Su converso "un estado de la Unión Americana es Florida", no es necesariamente cierto; puede ser cualquier otro de los 49 estados de la Unión.

(*d*) La proposición es verdadera. Su converso "si soy su maestro entonces usted es mi alumno", también es cierto.

(*e*) La proposición, de hecho una definición, es verdadera. Su converso, "un triángulo que tiene todos sus lados congruentes es un triángulo equilátero" también es cierto.

2.5 DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA

Un teorema debe demostrarse utilizando el procedimento siguiente paso a paso. La forma de la demostración se muestra en el ejemplo que sigue al procedimiento. Nótese que pueden utilizarse símbolos y abreviaturas aceptados.

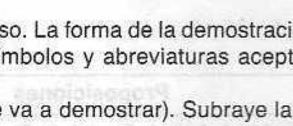
1. Divida el teorema en sus hipótesis (lo conocido) y conclusión (lo que se va a demostrar). Subraye la hipótesis con una sola línea y la conclusión con una línea doble.
2. Haga un diagrama en el que se incluyan símbolos y marcas de guía. Por ejemplo, esquinas rectas para simbolizar ángulos rectos, marcas para indicar partes iguales y símbolos de interrogación para las partes que es necesario demostrar que son iguales.
3. Junto al diagrama escriba que es lo que se conoce y lo que se va a demostrar. Los "Dado" y los "Demuéstrese" deben hacer referencia a partes del diagrama.
4. Elabore un plan. Aunque no es esencial, el tener un plan es muy aconsejable. Debe incluir los principales métodos de demostración a utilizar.
5. A la izquierda, indique todas las proposiciones en pasos numerados en forma progresiva. La última proposición debe ser la que se requiere demostrar. Todas las proposiciones deben referirse a partes del diagrama.
6. A la derecha, junto a cada proposición, dé una razón para cada una de ellas. Las razones aceptables en una demostración son los hechos conocidos: las definiciones, los postulados, otros teoremas dados como ciertos y teoremas demostrados con anterioridad.

Paso 1: **Demostrar:** Todos los ángulos rectos son iguales en tamaño.

Paso 2: **Dado:** $\angle A$ y $\angle B$ son $\angle$ rectos

Paso 3: **Demuéstrese:** $m\angle A = m\angle B$

Paso 4: **Plan:** Dado que cada ángulo es igual a 90°, los ángulos son iguales en tamaño, usando el Post. 1: objetos iguales a sí mismos son iguales entre sí.



Pasos 5
y 6:

Proposición	Razones
1. $\angle A$ y $\angle B$ son $\angle^s$ rectos	1. Dado
2. $m\angle A$ y $m\angle B$ cada uno $= 90°$	2. $m(\angle$ recto$) = 90°$
3. $m\angle A = m\angle B$	3. Objetos = a sí mismos = entre sí

PROBLEMAS RESUELTOS

2.14 DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA

Utilice el procedimiento anterior para demostrar que los ángulos suplementarios de ángulos de igual medida tiene igual medida.

Paso 1: **Demuéstrese:** Los suplementos de ángulos de igual medida tienen igual medida.

Paso 2: **Dado:** $\angle a$ supl. $\angle 1$, $\angle b$ supl. $\angle 2$
$m\angle 1 = m\angle 2$

Paso 3: **Demuéstrese:** $m\angle a = m\angle b$

Paso 4: **Plan:** al usar el Post. de sustracción, las medidas de ángulos iguales pueden restarse de las sumas iguales de las medidas de pares de ángulos suplementarios. Los residuos restantes son las medidas de los ángulos suplementarios.

Pasos 5
y 6:

Proposiciones	Argumentos
1. $\angle a$ supl. $\angle 1$, $\angle b$ supl. $\angle 2$	1. Dado
2. $m\angle a + m\angle 1 = 180°$ $m\angle b + m\angle 2 = 180°$	2. $\angle^s$ supl. son ángulos cuya suma tiene una medida $= 180°$
3. $m\angle a + m\angle 1 = m\angle b + m\angle 2$	3. Objetos = a sí mismos = entre sí
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. Dado
5. $m\angle a = m\angle b$	5. Si =s se restan de =s sus diferencias son =s.

Problemas complementarios

1. Complétese cada proposición. En los incisos (*a*)-(*e*) cada letra como *C*, *D* o *R* representa un conjunto o grupo (2.1

(*a*) Si *A* es *B* y *B* es *H*, entonces ___?___. A = H

(*b*) Si *C* es *D* y *P* es *C*, entonces ___?___. C = D P = C

D = D

(*c*) Si ___?___ y *B* es *R*, entonces *B* es *S*. S R

(*d*) Si *E* es *F*, *F* es *G*, y *G* es *K*, entonces ___?___.

(*e*) Si *G* es *H*, *H* es *R* y ___?___, entonces *A* es *R*.

(*f*) Si los triángulos son polígonos y los polígonos son figuras geométricas, entonces ?.

(*g*) Si un rectángulo es un paralelogramo y un paralelogramo es un cuadrilátero, entonces ?.

2. Establézcanse las conclusiones que siguen a la aplicación del postulado 1, a la información que se da y que hace referencia a la figura 2-29. (2.3)

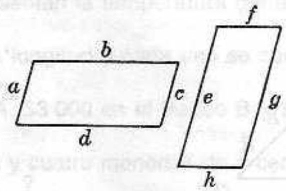


Fig. 2-29

(*a*) $a = 7, c = 7, f = 7$

(*b*) $b = 15, b = g$

(*c*) $f = h, h = a$

(*d*) $a = c, c = f, f = h$

(*e*) $b = d, d = g, g = e$

3. Establézcanse las conclusiones que se obtienen cuando se aplica el postulado 2, a los casos siguientes. (2.4)

(*a*) Evalúese $a^2 + 3a$ cuando $a = 10$.

(*b*) Evalúese $x^2 - 4y$, cuando $x = 4$ y $y = 3$.

(*c*) ¿Es cierto que: $b^2 - 8 = 17$ cuando $b = 5$?

(*d*) Encuéntrese x si $x + y = 20$, y si $y = x + 3$.

(*e*) Encuéntrese y si $x + y = 20$, y si $y = 3x$.

(*f*) Encuéntrese x si $5x - 2y = 24$; y si $y = 3$.

(*g*) Encuéntrese x si $x^2 + 3y = 45$; y si $y = 3$.

4. Establézcanse las conclusiones que se obtienen cuando el postulado 3 se aplica a los datos de la figura 2-30 (*a*) y (*b*). (2.5)

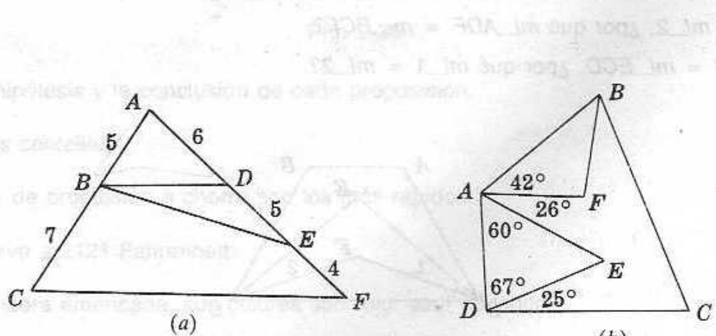


Fig. 2-30

5. Establézcase una conclusión que incluya a dos nuevos iguales cuando se apliquen los postulados 4, 5 o 6 a lo datos que se dan a continuación. (2.6

(*a*) Dado: $b = e$ (Fig. 2-31).

(*b*) Dado: $b = c$, $a = d$ (Fig. 2-31).

(*c*) Dado: $\angle 4 \cong \angle 5$ (Fig. 2-32).

(*d*) Dado: $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$ (Fig.2-32).

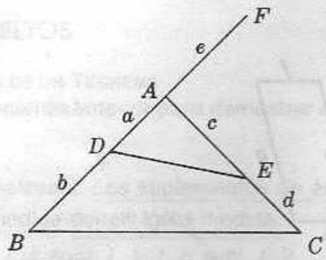


Fig. 2-31

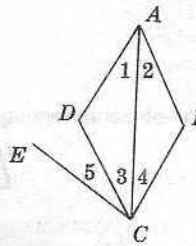


Fig. 2-32

6. En la figura 2-33 $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ están trisectados. (2.7

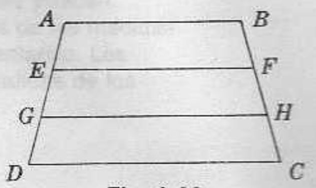


Fig. 2-33

(*a*) Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, ¿por qué $\overline{AE} \cong \overline{BF}$?

(*b*) Si $\overline{EG} \cong \overline{FH}$, ¿por qué $\overline{AG} \cong \overline{BH}$?

(*c*) Si $\overline{GD} \cong \overline{HC}$, ¿por qué $\overline{AD} \cong \overline{BC}$?

(*d*) Si $\overline{ED} \cong \overline{FC}$, ¿por qué $\overline{EG} \cong \overline{FH}$?

7. En la figura 2-34 $\angle BCD$ y $\angle ADC$ están trisectados.

(*a*) Si $m\angle BCD = m\angle ADC$, ¿por qué $m\angle FCD = m\angle FDC$?

(*b*) Si $m\angle 1 = m\angle 2$, ¿por qué $m\angle BCD = m\angle ADC$?

(*c*) Si $m\angle 1 = m\angle 2$, ¿por qué $m\angle ADF = m\angle BCF$?

(*d*) Si $m\angle EDC = m\angle ECD$, ¿por qué $m\angle 1 = m\angle 2$?

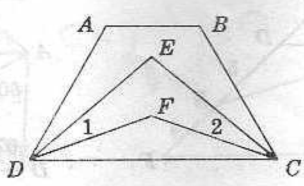


Fig. 2-34

8. Complétense las siguientes proposiciones y dígase qué postulado se aplica. (2.8)

(*a*) Si Bill y Dick ganan la misma cantidad de dinero por hora y su salario se incrementa en la misma cantidad, entonces __?__.

(*b*) Durante este año ciertas acciones han triplicado su valor. Si el año pasado tenían el mismo valor, entonces __?__.

(*c*) Dos grupos en la escuela tenían el mismo número de alumnos hace una semana. Si ha desertado el mismo número de estudiantes en cada grupo, entonces __?__.

(*d*) Dado que 100°C y 212°F representan la temperatura del agua en ebullición, entonces __?__.

(*e*) Si dos tablones tienen la misma longitud y cada uno se corta en cuatro partes iguales, entonces __?__.

(*f*) Si él tiene \$2 000 en el Banco A, \$3 000 en el Banco B y \$5 000 en el Banco C, entonces __?__.

(*g*) Si tres monedas de 25 centavos y cuatro monedas de 5 centavos se comparan con tres monedas de 25 y dos monedas de 10 centavos, __?__.

9. Dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas e indicar el teorema básico sobre ángulos que se requieren. Todas las preguntas se refieren a la figura 2-35. (2.10)

(*a*) ¿Por qué $m\angle 1 = m\angle 2$?

(*b*) ¿Por qué $m\angle DBC = m\angle ECB$?

(*c*) Si $m\angle 3 = m\angle 4$, ¿por qué $m\angle 5 = m\angle 6$?

(*d*) Si $\overrightarrow{AF} \perp \overline{DE}$ y $\overrightarrow{GC} \perp \overline{DE}$, ¿por qué $m\angle 7 = m\angle 8$?

(*e*) Si $\overrightarrow{AF} \perp \overline{DE}$, $\overrightarrow{GC} \perp \overline{DE}$ y $m\angle 11 = m\angle 12$, ¿por qué $m\angle 9 = m\angle 10$?

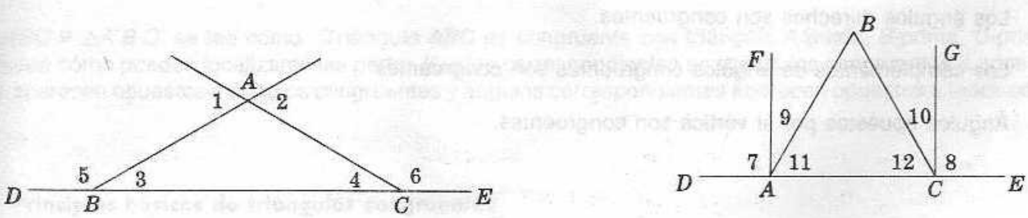


Fig. 2-35

10. Determínense la hipótesis y la conclusión de cada proposición. (2.11 y 2.12)

(*a*) Las estrellas centellean.

(*b*) Los aviones de propulsión a chorro son los más rápidos.

(*c*) El agua hierve a 212° Fahrenheit.

(*d*) Si es la bandera americana, sus colores son rojo, azul y blanco.

(*e*) Usted no aprenderá geometría si no hace la tarea sobre el tema.

(*f*) Un bateador va a la primera base si el árbitro marca la cuarta bola mala.

(*g*) Si A es el hermano de B y C es el hijo de B, entonces A es el tío de C.

(*h*) Una bisectriz divide el ángulo en dos partes iguales.

(*i*) Un segmento está trisectado si está dividido en tres partes congruentes.

(*j*) Un pentágono tiene cinco lados y cinco ángulos.

(*k*) Algunos rectángulos son cuadrados.

(*l*) Los ángulos no se hacen más grandes si sus lados se hacen más largos.

(*m*) Los ángulos que son congruentes y suplementarios, son ángulos rectos.

(*n*) La figura no es un polígono si uno de sus lados no es un segmento de línea recta.

11. Exprésese el converso de cada una de las siguientes proposiciones verdaderas y establézcase si es necesariamente verdadero. (2.13)

(*a*) La mitad de un ángulo recto es un ángulo agudo.

(*b*) Un triángulo obtuso es un triángulo con un ángulo obtuso.

(*c*) Si el árbitro marcó el tercer *strike*, entonces el bateador está fuera de juego.

(*d*) Si soy más alto que tú, entonces eres más corto que yo.

(*e*) Si soy más pesado que tú, entonces nuestros pesos son distintos.

12. Demuéstrese lo siguiente. (2.14)

(*a*) Los ángulos derechos son congruentes.

(*b*) Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

(*c*) Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

3

Triángulos congruentes

3.1 TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Figuras congruentes son figuras que tienen el mismo tamaño y forma; una es el duplicado exacto de la otra. Las figuras pueden hacerse coincidir de tal forma que sus partes correspondientes ajustan entre sí. Dos círculos que tengan el mismo radio son círculos congruentes.

Triángulos congruentes son triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes deben ser congruentes. Así los triángulos congruentes ABC y $A'B'C'$ en la figura 3-1 tienen lados ($AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $AC \cong A'C'$) y ángulos correspondientes congruentes ($\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$).

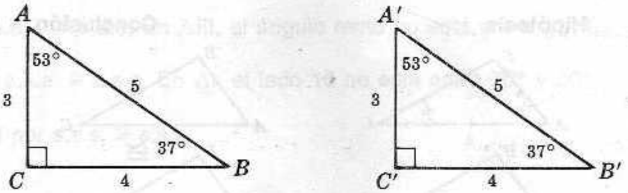


Fig. 3-1

($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ se lee como "Triángulo ABC es congruente con triángulo A-prima, B-prima, C-prima.")

Nótese cómo pueden localizarse las partes iguales correspondientes en triángulos congruentes. Lados correspondientes aparecen opuestos a ángulos congruentes y ángulos correspondientes aparecen opuestos a lados congruentes.

3.1A Principios básicos de triángulos congruentes

PRINCIPIO 1: *Si dos triángulos son congruentes, entonces sus partes correspondientes son congruentes.* (Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.)

Por lo tanto, si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ en la figura 3-2, entonces $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $a \cong a'$, $b \cong b'$ y $c \cong c'$.

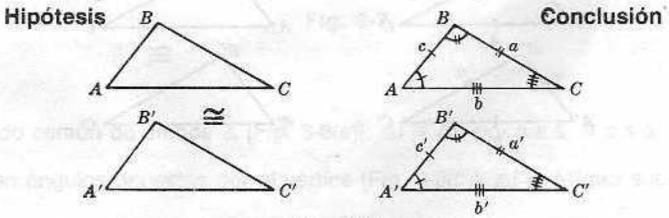


Fig. 3-2

Métodos para demostrar la congruencia de triángulos

LAL

PRINCIPIO 2: (s.a.s. ≅ s.a.s) *Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Por eso, si $b \cong b'$, $c \cong c'$ y $\angle A \cong \angle A'$ en la figura 3-3 entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Hipótesis **Conclusión**

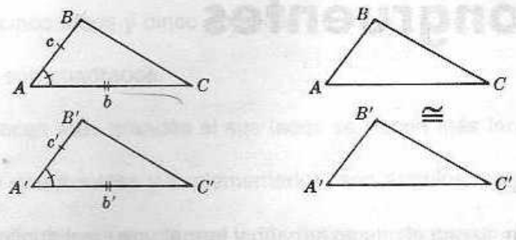


Fig. 3-3

ALA

PRINCIPIO 3: (a.s.a. ≅ a.s.a.) *Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Dado lo cual, si $\angle A \cong \angle A'$, $\angle C \cong \angle C'$ y $b \cong b'$ en la figura 3-4, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Hipótesis **Conclusión**

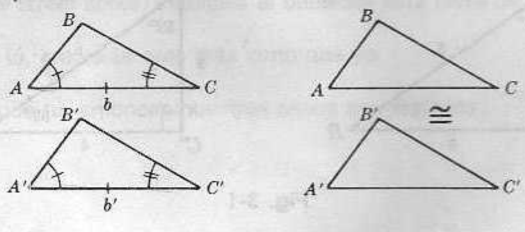


Fig. 3-4

LLL

PRINCIPIO 4: (s.s.s. ≅ s.s.s.) *Si los tres lados de un triángulo, son congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Por consiguiente, si $a \cong a'$, $b \cong b'$ y $c \cong c'$ en la figura 3-5, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Hipótesis **Conclusión**

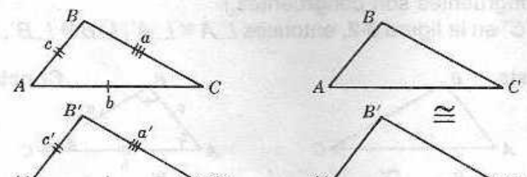


Fig. 3-5

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 Selección de Triángulos Congruentes

De cada uno de los grupos de tres triángulos en la figura 3-6, seleccione los triángulos congruentes e identifique el principio de congruencia involucrado.

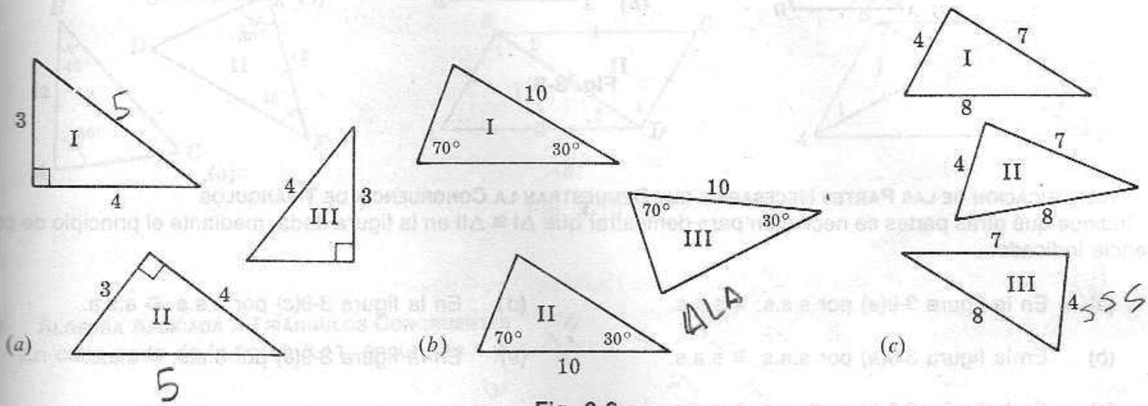


Fig. 3-6

Soluciones

(*a*) △I ≅ △II, por s.a.s. ≅ s.a.s. En △III, el ángulo recto no está entre 3 y 4.

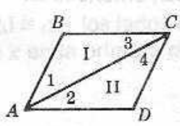
(*b*) △II ≅ △III, por a.s.a. ≅ a.s.a. En △I, el lado 10 no está entre 70° y 30°.

(*c*) △I ≅ △II ≅ △III por s.s.s. ≅ s.s.s.

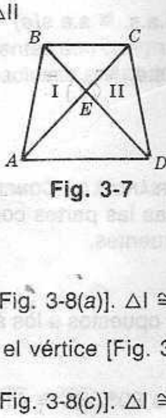
3.2 Determinación de la Razón de Congruencia para Triángulos

En cada parte de la figura 3-7, puede probarse la congruencia de △I con △II. Elabore un diagrama donde se indiquen las partes comunes a los triángulos e indique el principio de congruencia aplicado.

(*a*) **Dados:** ∠1 ≅ ∠4, ∠2 ≅ ∠3
Demuéstrese: △I ≅ △II



(*b*) **Dados:** $\overline{BE} \cong \overline{EC}$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$
Demuéstrese: △I ≅ △II



(*c*) **Dados:** △*ABC* Isósceles, △*ADC* Isósceles, *AC* como base
Demuéstrese: △I ≅ △II

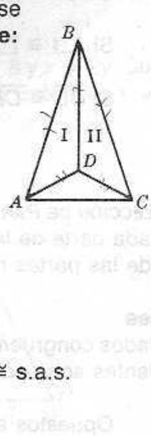


Fig. 3-7

Soluciones

(*a*) *AC* es un lado común de ambos ⊿ [Fig. 3-8(*a*)]. △I ≅ △II por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*b*) ∠1 y ∠2 son ángulos opuestos por el vértice [Fig. 3-8(*b*)]. △I ≅ △II por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) *BD* es un lado común de ambos ⊿ [Fig. 3-8(*c*)]. △I ≅ △II por s.s.s. ≅ s.s.s.

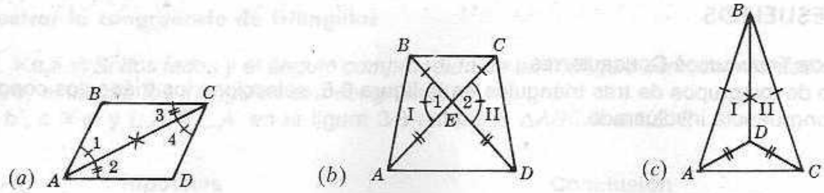


Fig. 3-8

3.3 Identificación de las Partes Necesarias que Demuestran la Congruencia de Triángulos

Indique qué otras partes se necesitan para demostrar que $\triangle I \cong \triangle II$ en la figura dada, mediante el principio de congruencia indicado.

(*a*) En la figura 3-9(*a*) por s.s.s. $\cong$ s.s.s.

(*b*) En la figura 3-9(*a*) por s.a.s. $\cong$ s.a.s.

(*c*) En la figura 3-9(*b*) por a.s.a. $\cong$ a.s.a.

(*d*) En la figura 3-9(*c*) por a.s.a. $\cong$ a.s.a.

(*e*) En la figura 3-9(*c*) por s.a.s. $\cong$ s.a.s.

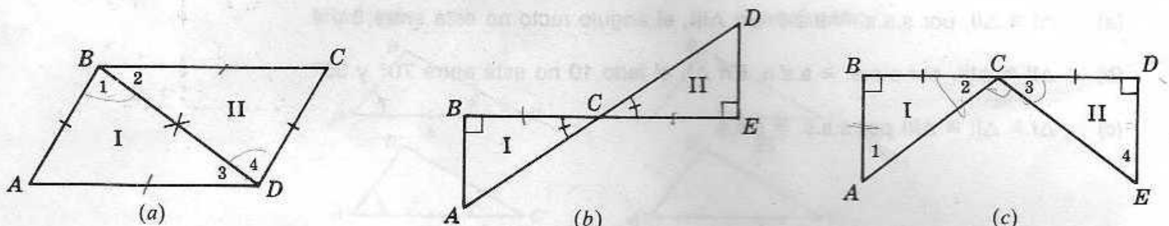


Fig. 3-9

Soluciones

(*a*) Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.s.s. $\cong$ s.s.s.

(*b*) Si $\angle 1 \cong \angle 4$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. $\cong$ s.a.s.

(*c*) Si $\overline{BC} \cong \overline{CE}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. $\cong$ a.s.a.

(*d*) Si $\angle 2 \cong \angle 3$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. $\cong$ a.s.a.

(*e*) Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, entonces $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. $\cong$ s.a.s.

3.4 Selección de Partes Correspondientes en Triángulos Congruentes

En cada parte de la figura 3-10, están marcadas las partes comunes que se necesitan para demostrar $\triangle I \cong \triangle II$. Lístense de las partes restantes las que son congruentes.

Soluciones

Los lados congruentes correspondientes están opuestos a los ángulos congruentes. Los ángulos congruentes correspondientes son opuestos a lados congruentes.

(*a*) Opuestos a 45°, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$. Opuestos a 80°, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$. Opuestos al lado 12; $\angle C \cong \angle D$.

(*b*) Opuestos a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\angle 3 \cong \angle 2$. Opuestos a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 4$. Opuestos al lado común $\overline{BD}$, $\angle A \cong \angle C$.

(*c*) Opuestos a $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$, $\angle 2 \cong \angle 3$. Opuestos a $\overline{BE}$ v EC, $\angle 1 \cong \angle 4$. Opuestos a $\angle 5$ y $\angle 6$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

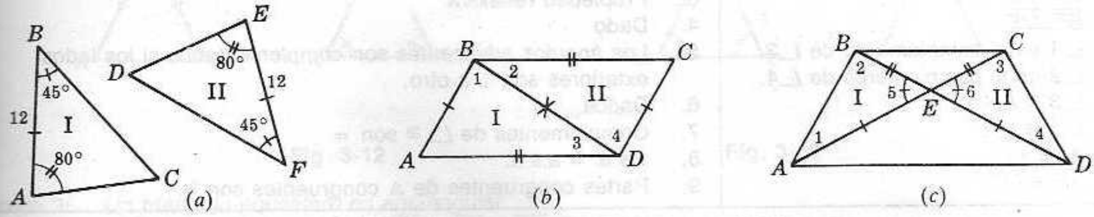


Fig. 3-10

3.5 Álgebra Aplicada a Triángulos Congruentes

En cada parte de la figura 3-11, encuentre x y y.

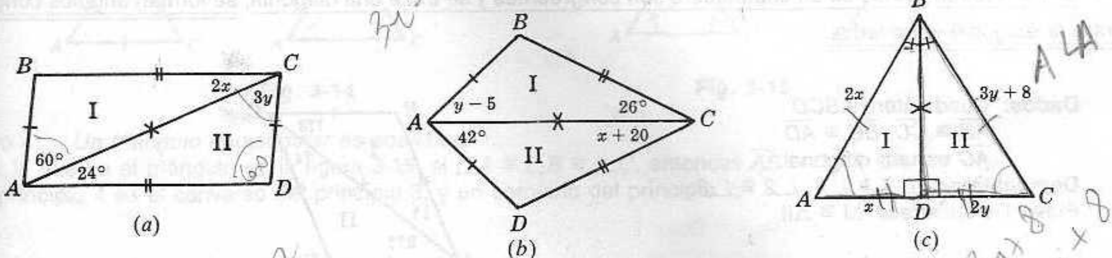


Fig. 3-11

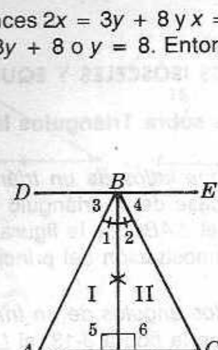
Soluciones

(*a*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los ángulos correspondientes son congruentes. De modo que, $2x = 24$ o $x = 12$ y $3y = 60$ o $y = 20$.

(*b*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los ángulos correspondientes son congruentes. De modo que, $x + 20 = 26$ o $x = 6$ y $y - 5 = 42$ o $y = 47$.

(*c*) Como $\triangle I \cong \triangle II$, los lados correspondientes son congruentes. Entonces $2x = 3y + 8$ y $x = 2y$. Sustituyendo $2y$ para x en la primera de estas ecuaciones, se obtiene $2(2y) = 3y + 8$ o $y = 8$. Entonces $x = 2y = 16$.

3.6 Demostración de Problemas de Congruencia



Dados: $\overline{BF} \perp \overline{DE}$
$\overline{BF} \perp \overline{AC}$
$\angle 3 \cong \angle 4$

Demuéstrese: $\overline{AF} \cong \overline{FC}$

Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{BF} \perp \overline{AC}$	1. Dados
2. $\angle 5 \cong \angle 6$	2. $\perp$s forman $\angle$s rectos; $\angle$s son $\cong$
3. $\overline{BF} \cong \overline{BF}$	3. Propiedad reflexiva
4. $\overline{BF} \perp \overline{DE}$	4. Dado
5. $\angle 1$ es el complemento de $\angle 3$. $\angle 2$ es el complemento de $\angle 4$.	5. Los ángulos adyacentes son complementarios si los lados exteriores son $\perp$ a otro.
6. $\angle 3 \cong \angle 4$	6. Dados
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Complementos de $\angle$s $\cong$ son $=$
8. $\triangle I \cong \triangle II$	8. a.s.a. $\cong$ a.s.a.
9. $\overline{AF} \cong \overline{FC}$	9. Partes congruentes de $\triangle$s congruentes son $\cong$.

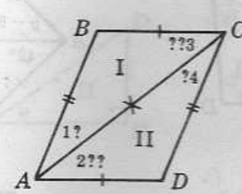
3.7 Demostración de un Problema de Congruencia Expresado en Palabras

Demuestre que si los lados opuestos en un cuadrilátero son iguales, y se traza una diagonal; se forman ángulos iguales entre la diagonal y los lados.

Solución

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y se traza una diagonal, se forman ángulos congruentes entre la diagonal y los lados.

Dados: Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
$\overline{AC}$ es una diagonal.
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$,
Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. Dado
2. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	2. Propiedad reflexiva
3. $\triangle I \cong \triangle II$	3. s.s.s. $\cong$ s.s.s.
4. $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$	4. Partes correspondientes de $\triangle$s $\cong$ son $\cong$

3.2 TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y EQUILÁTEROS

3.2A Principios sobre Triángulos Isósceles y Equiláteros

Principio 1: *si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a éstos son congruentes.* (Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles son congruentes).

Así pues, en el $\triangle ABC$ de la figura 3-12, si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\angle A \cong \angle C$.

Se da una demostración del principio 1 en el Capítulo 16.

Principio 2: *si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a éstos son congruentes.*

En el $\triangle ABC$ en la figura 3-13, si $\angle A \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

El principio 2 es el converso del principio 1. Se da la demostración del principio 2 en el capítulo 16.

Hipótesis **Conclusión**

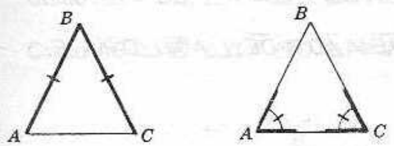


Fig. 3-12

Hipótesis **Conclusión**

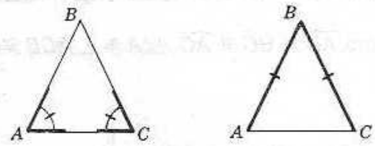


Fig. 3-13

PRINCIPIO 3: *Un triángulo equilátero es equiangular.*

Así, en el $\triangle ABC$ en la figura 3-14, si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$, entonces $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.

El principio 3 es un corolario del principio 1. Un *corolario* de un teorema es otro teorema cuya demostración es inmediata del primero.

Hipótesis **Conclusión**

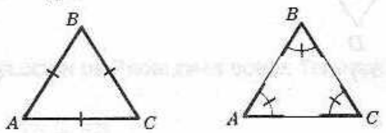


Fig. 3-14

Hipótesis **Conclusión**

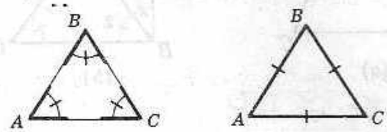


Fig. 3-15

PRINCIPIO 4: *Un triángulo equiangular es equilátero.*

Por lo que en el triángulo en la figura 3-15, si $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$.

El principio 4 es el converso del principio 3, y un corolario del principio 2.

PROBLEMAS RESUELTOS

3.8 Aplicación de los Principios 1 y 3

En cada inciso de la figura 3-16, identifique los ángulos congruentes que son opuestos a los lados congruentes de un triángulo.

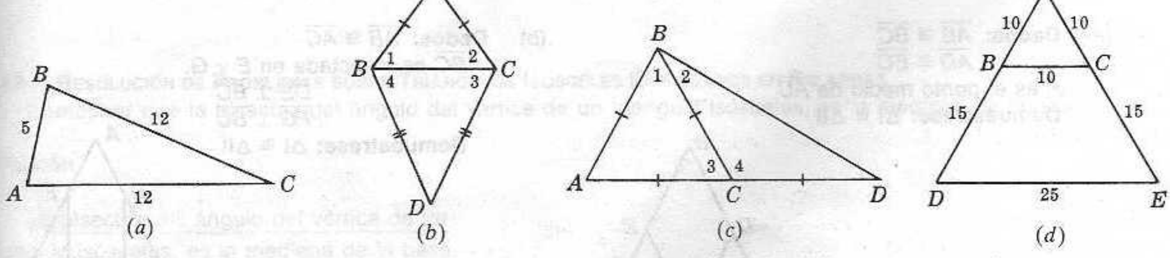


Fig. 3-16

Soluciones

(a) Como $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle B$.

(*b*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$. Como $\overline{BD} \cong \overline{CD}$, $\angle 3 \cong \angle 4$.

(*c*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle 1 \cong \angle 3$. Como $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, $\angle 2 \cong \angle D$.

(*d*) Como $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$, $\angle A \cong \angle ACB \cong \angle ABC$. Como $\overline{AE} \cong \overline{AD} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D \cong \angle E$.

3.9 Aplicación de los Principios 2 y 4

En cada una de las partes de la figura 3-17, identifique los lados congruentes que están opuestos a los ángulos congruentes de un triángulo.

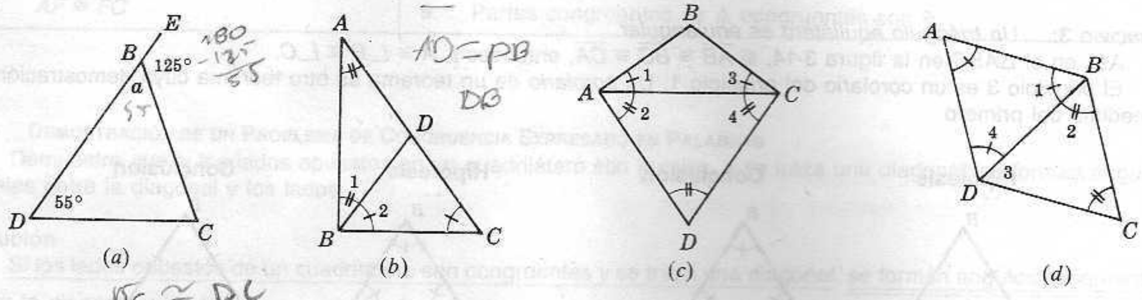


Fig. 3-17

Soluciones

(*a*) Como $m\angle a = 55°$, $\angle a \cong \angle D$. De modo que, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

(*b*) Como $\angle A \cong \angle 1$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. Como $\angle 2 \cong \angle C$, $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

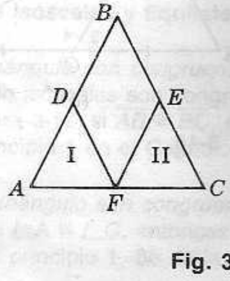
(*c*) Como $\angle 1 \cong \angle 3$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Como $\angle 2 \cong \angle 4 \cong \angle D$, $\overline{CD} \cong \overline{AD} \cong \overline{AC}$.

(*d*) Como $\angle A \cong \angle 1 \cong \angle 4$, $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Como $\angle 2 \cong \angle 3$, $\overline{BD} \cong \overline{CD}$.

3.10 Aplicación de los Principios sobre Triángulos Isósceles

En las figuras 3-18(*a*) y (*b*), puede demostrarse que el $\triangle$I es congruente con el $\triangle$II. Haga un diagrama mostrando las partes congruentes de ambos triángulos y exprese el principio de congruencia aplicado.

(*a*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{AD} \cong \overline{EC}$
F es el punto medio de $\overline{AC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



(*b*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{BC}$ es trisectada en E y G.
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
$\overline{FG} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$

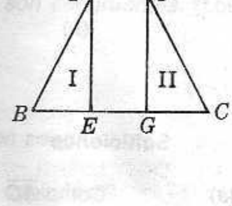


Fig. 3-18

Soluciones

(*a*) Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\angle A \cong \angle C$. $\triangle I \cong \triangle II$ por s.a.s. ≅ s.a.s. [Fig. 3-19(*a*)].

(*b*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle B \cong \angle C$. $\triangle I \cong \triangle II$ por a.s.a. ≅ a.s.a. [Fig. 3-19(*b*)].

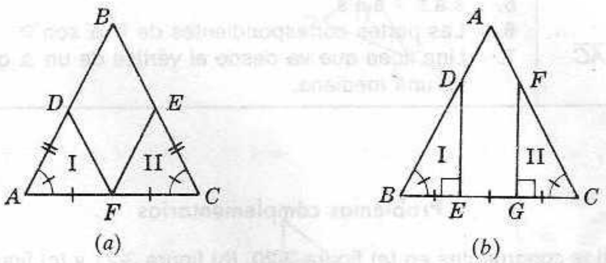


Fig. 3-19

3.11 Resolución de Problemas sobre Triángulos Isósceles

Dados: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{AC}$ es trisectado en D y E
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 2$
Plan: Demuéstrese $\triangle I \cong \triangle II$ para obtener $\overline{BD} \cong \overline{BE}$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. AC es trisectado en D y E	1. Dado
2. $\overline{AD} \cong \overline{EC}$	2. Trisectar es dividir en tres partes congruentes
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. Dado
4. $\angle A \cong \angle C$	4. En un △, ∠s opuestos a lados ≅ son ≅.
5. $\triangle I \cong \triangle II$	5. s.a.s. ≅ s.a.s.
6. $\overline{BD} \cong \overline{BE}$	6. Partes correspondientes de ≅ △s son ≅.
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Igual que 4.

3.12 Resolución de Problemas sobre Triángulos Isósceles Expresados en Palabras

Demostrar que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la mediana de la base.

Solución

La bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la mediana de la base.

Dados: El $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) isósceles.
$\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$
Demuéstrese: $\overline{BD}$ es la mediana a $\overline{AC}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle I \cong \triangle II$ para obtener $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Bisectar es dividir en dos partes congruentes
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle I \cong \triangle II$	5. s.a.s $\cong$ s.a.s.
6. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	6. Las partes correspondientes de $\cong$ $\triangle$s son $\cong$.
7. $\overline{BD}$ es la mediana a $\overline{AC}$	7. Una línea que va desde el vértice de un $\triangle$ que bisecta al lado opuesto, es una mediana.

Problemas complementarios

1. Seleccione los triángulos congruentes en (*a*) figura 3-20, (*b*) figura 3-21 y (*c*) figura 3-22, y exprese el principio de congruencia. (3.1)

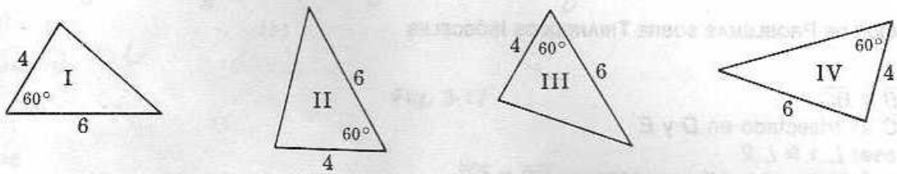


Fig. 3-20

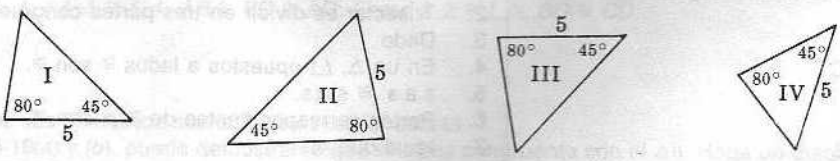


Fig. 3-21

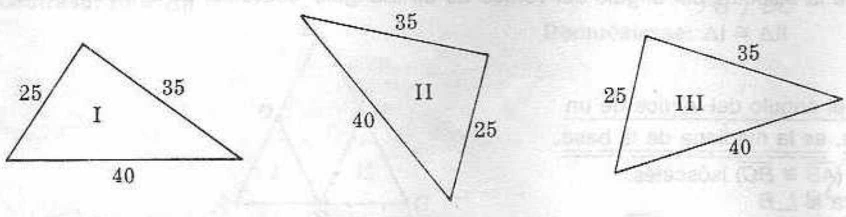
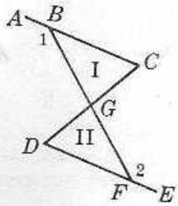


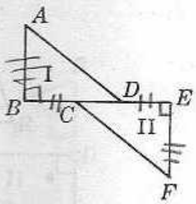
Fig. 3-22

2. En cada una de las siguientes figuras, puede demostrarse que el $\triangle I$ es congruente con el $\triangle II$. Exprese el principio de congruencia aplicado. (3.2)

(*a*) **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$
G es el punto medio de $\overline{BF}$.
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$

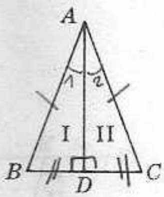


(*b*) **Dados:** $\overline{AB} \perp \overline{BE}$
$\overline{EF} \perp \overline{BE}$
$\overline{BC} \cong \overline{DE}$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



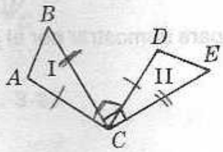
$\overline{DE} = \overline{CB}$
$\overline{BC} \cong \overline{DE}$
$C\overline{D} = \overline{DC}$
$\Delta I \cong \Delta II$
LAL ≅ LAL

(*c*) **Dados:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
AD es mediana sobre $\overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$

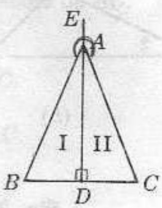


$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
$BD \cong \overline{DC}$
$\measuredangle\ D = \overline{D}$
$BC = CB$
$\Delta I = \Delta II$

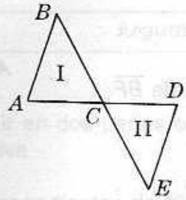
(*d*) **Dados:** $\overline{BC} \perp \overline{CE}$
$\overline{AC} \perp \overline{CD}$
$\overline{AC} \cong \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{CE}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



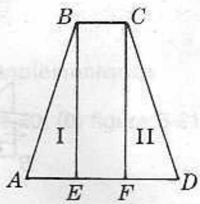
(*e*) **Dados:** $\angle EAB \cong \angle EAC$
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$



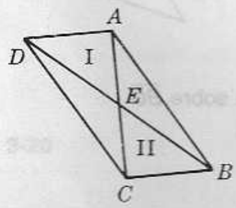
(*f*) **Dados:** $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ bisectores uno del otro.
Demuéstrese: $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$



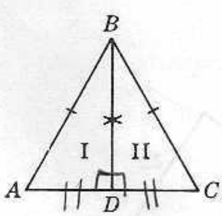
(*g*) **Dados:** $\overline{BE} \perp \overline{AD}$
$\overline{CF} \perp \overline{AD}$
$\overline{BE} \cong \overline{CF}$
$\overline{AD}$ es trisectado.
Demuéstrese: $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$



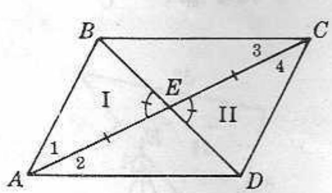
(*h*) **Dados:** $\overline{AD} \perp \overline{AC}$
$\overline{BC} \perp \overline{AC}$
$\overline{BD}$ bisecta a $\overline{AC}$.
Demuéstrese: $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$



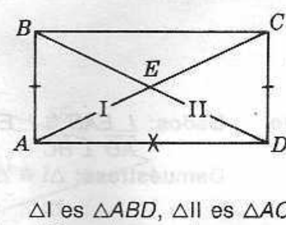
3. Establecer qué más se necesita para demostrar por el principio de congruencia indicado que $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$, en la figura dada. (3.3)



(*a*)



(*b*)



$\triangle\text{I}$ es $\triangle ABD$, $\triangle\text{II}$ es $\triangle ACD$.
Los triángulos se sobreponen entre sí.

(*c*)

Fig. 3-23

(*a*) En la figura 3-23(*a*) por s.s.s ≅ s.s.s.

(*b*) En la figura 3-23(*a*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*c*) En la figura 3-23(*b*) por a.s.a. ≅ a.s.a.

(*d*) En la figura 3-23(*b*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

(*e*) En la figura 3-23(*c*) por s.s.s. ≅ s.s.s.

(*f*) En la figura 3-23(*c*) por s.a.s. ≅ s.a.s.

4. En cada parte de la figura 3-24, están marcadas las partes que se necesitan para demostrar $\triangle I \cong \triangle II$. Identifique las partes restantes que son congruentes. (3.4)

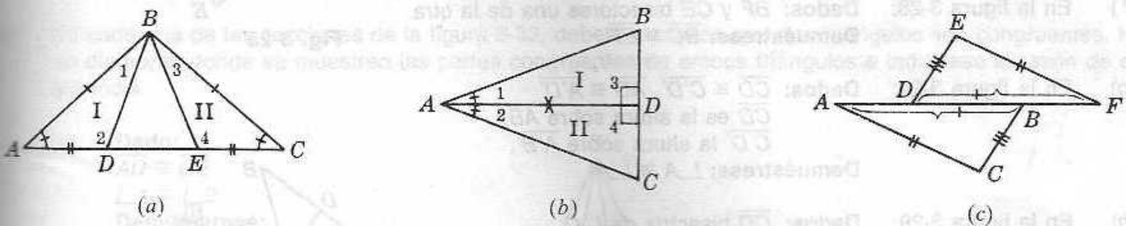


Fig. 3-24

5. En cada figura de la figura 3-25, encuentre *x* y *y*. (3.5)

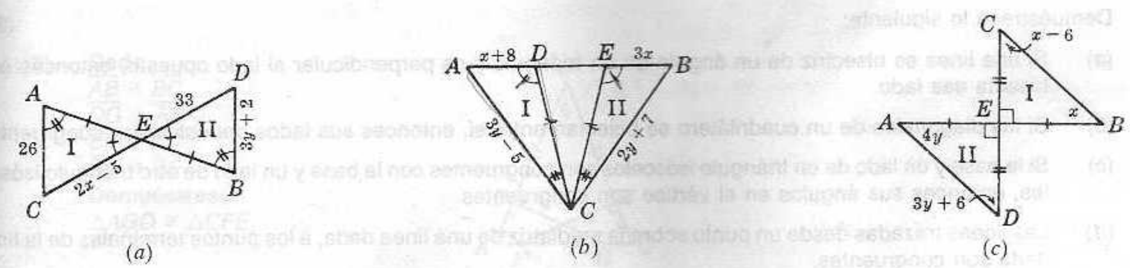


Fig. 3-25

6. Demuéstrese lo que se pide en cada caso. (3.6)

(*a*) En la figura 3-26: **Dados:** $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
D es el punto medio de $\overline{AC}$.
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

(*b*) En la figura 3-26: $\overline{BD}$ es la altura sobre $\overline{AC}$.
$\overline{BD}$ bisectriz del $\angle B$.
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle C$.

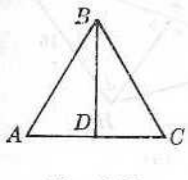


Fig. 3-26

(*c*) En la figura 3-27: **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$, $\overline{BF} \cong \overline{DE}$
$\overline{BF}$ bisectriz del $\angle B$.
$\overline{DE}$ bisectriz del $\angle D$.
$\angle B$ y $\angle D$ son $\angle^s$ rectos
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

(*d*) En la figura 3-27: **Dados:** $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
E punto medio de $\overline{BC}$.
F punto medio de $\overline{AD}$.
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BF} \cong \overline{DE}$
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle C$

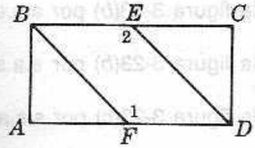


Fig. 3-27

(*e*) En la figura 3-28: **Dados:** $\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{CE}$ bisector de $\overline{BF}$
Demuéstrese: $\angle C \cong \angle E$

(*f*) En la figura 3-28: **Dados:** $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ bisectores una de la otra
Demuéstrese: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

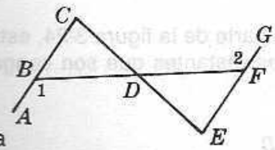


Fig. 3-28

(*g*) En la figura 3-29: **Dados:** $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$
$\overline{CD}$ es la altura sobre $\overline{AB}$.
$\overline{C'D'}$ la altura sobre $\overline{A'B'}$.
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle A'$

(*h*) En la figura 3-29: **Dados:** $\overline{CD}$ bisectriz de $\angle C$.
$\overline{C'D'}$ bisectriz de $\angle C'$.
$\angle C \cong \angle C'$,
$\angle B \cong \angle B \cong \angle B'$,
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Demuéstrese: $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$

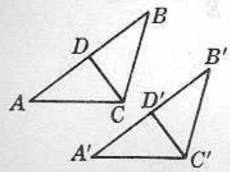


Fig. 3-29

7. Demuéstrese lo siguiente: (3.7)

(*a*) Si una línea es bisectriz de un ángulo de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto, entonces ésta bisecta ese lado.

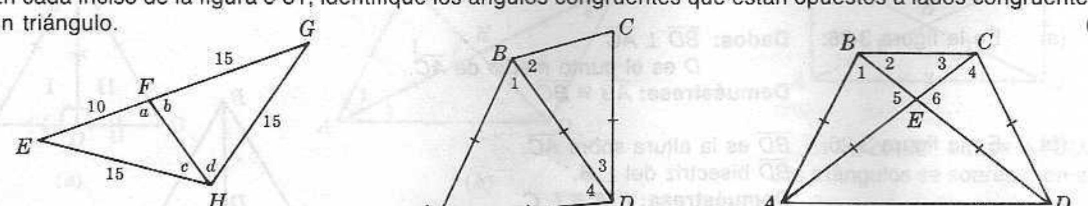
(*b*) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces sus lados opuestos son congruentes.

(*c*) Si la base y un lado de un triángulo isósceles son congruentes con la base y un lado de otro triángulo isósceles, entonces sus ángulos en el vértice son congruentes.

(*d*) Las líneas trazadas desde un punto sobre la mediatriz de una línea dada, a los puntos terminales de la línea dada son congruentes.

(*e*) Si los catetos de un triángulo rectángulo son congruentes respecto a los catetos de otro, sus hipotenusas son congruentes.

8. En cada inciso de la figura 3-31, identifique los ángulos congruentes que están opuestos a lados congruentes de un triángulo. (3.8)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 3-30

9. En cada una de las partes de la figura 3-31, identifique los lados congruentes que están opuestos a los ángulos congruentes de un triángulo. (3.9)

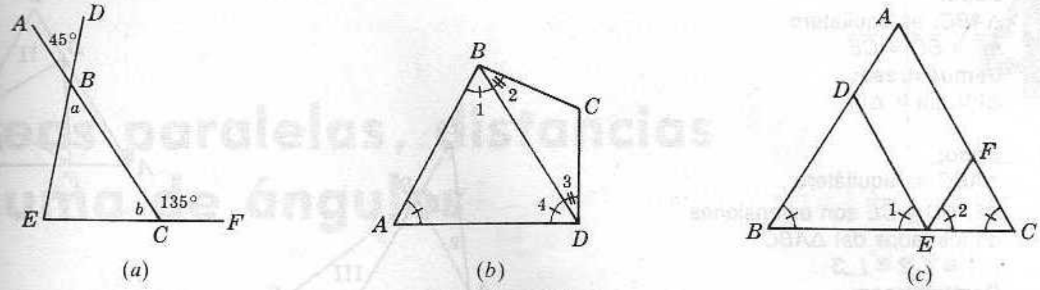
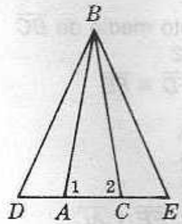


Fig. 3-31

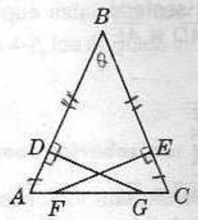
10. En cada una de las secciones de la figura 3-32, deberá probarse que dos triángulos son congruentes. Hágase un diagrama donde se muestren las partes congruentes de ambos triángulos e indíquese la razón de su congruencia. (3.10)

PUC

(*a*) **Dado:**
$\overline{AD} \cong \overline{CE}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuéstrese:
$\triangle ABD \cong \triangle CBE$



(*b*) **Dado:**
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{DG} \perp \overline{AB}$
$\overline{EF} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \cong \overline{BE}$
Demuéstrese:
$\triangle AGD \cong \triangle CFE$



(*c*) **Dado:**
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{AD} \cong \overline{EC}$
Demuéstrese:
$\triangle ABE \cong \triangle BCD$

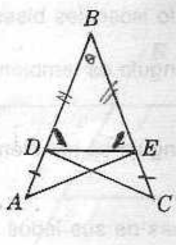


Fig. 3-32

11. En cada sección de la figura 3-33, se puede demostrar que $\triangle$I, $\triangle$II y $\triangle$III son congruentes. Hágase un diagrama donde se muestren las partes congruentes e indíquese la razón de su congruencia. (3.11)

(*a*) **Dado:**
$\triangle ABC$, es equilátero
$\overline{AF} \cong \overline{BD} \cong \overline{CE}$
Demuéstrese:
$\triangle$I $\cong$ $\triangle$II $\cong$ $\triangle$III

(*b*) **Dado:**
$\triangle ABC$ es equilátero
$\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son extensiones de los lados del $\triangle ABC$
$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$
Demuéstrese:
$\triangle$I $\cong$ $\triangle$II $\cong$ $\triangle$III

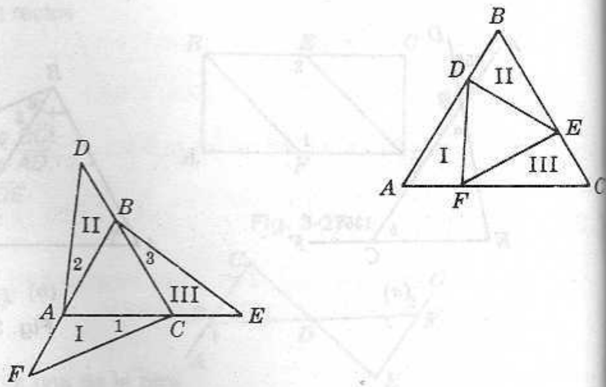


Fig. 3-33

12. Demuéstrense cada uno de los siguientes incisos: (3.12)

(*a*) En la figura 3-34: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
F es punto medio de $\overline{BC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuéstrese: $\overline{FD} \cong \overline{FE}$

(*b*) En la figura 3-34: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{AD} \cong \overline{AE}$
$\overline{FD} \perp \overline{AB}$, $\overline{FE} \perp \overline{AC}$
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{FC}$

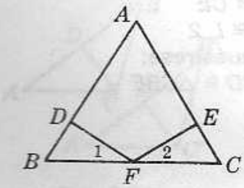


Fig. 3-34

(*c*) En la figura 3-35: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\angle A$ es trisectado
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$

(*d*) En la figura 3-35: **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overline{DB} \cong \overline{BC}$
$\overline{CE} \cong \overline{BC}$
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{AE}$

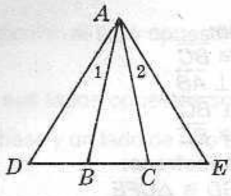


Fig. 3-35

13. Demuéstrense cada uno de los siguientes casos: (3.13)

(*a*) La mediana de la base de un triángulo isósceles bisecta al ángulo del vértice.

(*b*) Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo es también la altura del lado opuesto, entonces los otros dos lados del triángulo son congruentes.

(*c*) Si una mediana en un lado de un triángulo es también la altura sobre ese lado, entonces el triángulo es isósceles.

(*d*) En un triángulo isósceles, las medianas de sus lados son congruentes.

(*e*) En un triángulo isósceles, las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes.

4

Líneas paralelas, distancias y suma de ángulos

4.1 LÍNEAS PARALELAS

Líneas paralelas son líneas rectas que están en el mismo plano y que no se intersectan a sí mismas, sin importar qué tan lejos se extiendan. El símbolo para la condición de paralelismo es $\parallel$; así, el símbolo $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ significa: "la línea $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a la línea $\overleftrightarrow{CD}$". En los diagramas, el uso de flechas es para indicar que las líneas son paralelas (Fig. 4-1).

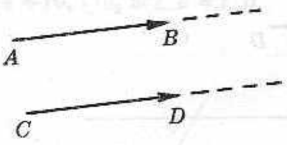


Fig. 4-1

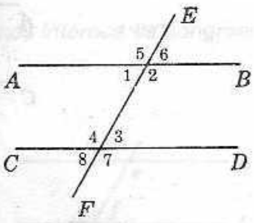


Fig. 4-2

Una *transversal* a dos o más líneas es aquélla que las corta. Así, en la figura 4-2, $\overleftrightarrow{EF}$ es una transversal de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Los *ángulos internos* formados por dos líneas cortadas por una transversal, son los ángulos entre las dos líneas, mientras que los *ángulos externos* son aquéllos que están por fuera de las líneas. Por lo tanto, de los ocho ángulos formados por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ cortadas por $\overleftrightarrow{EF}$ en la figura 4-2, los ángulos internos son $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$; los ángulos externos son $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ y $\angle 8$.

4.1A Pares de ángulos formados por dos líneas cortadas por una transversal

Los *ángulos correspondientes* de dos líneas cortadas por una transversal, son los ángulos situados en el mismo lado de la transversal y en el mismo lado de las líneas. En la figura 4-3, $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos correspondientes de las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{EF}$. Nótese en este caso, que ambos ángulos están a la derecha de la transversal y abajo de las líneas.

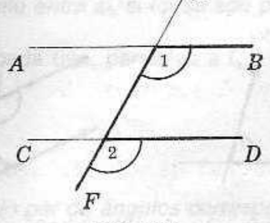


Fig. 4-3

Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, los lados de dos ángulos correspondientes forman una F mayúscula en distintas posiciones, tal y como se muestra en la figura 4-4.

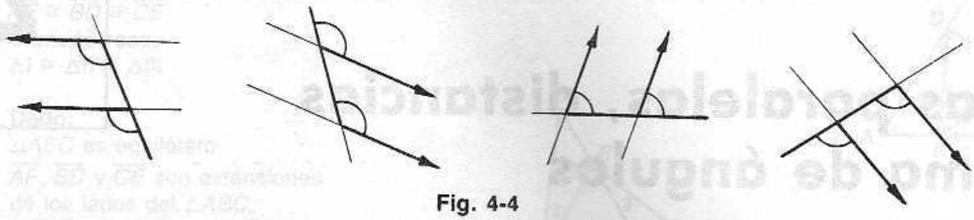


Fig. 4-4

Los *ángulos alternos internos* de dos líneas cortadas por una transversal, son los dos ángulos no adjuntos entre las dos líneas y en lados opuestos a la transversal. Así, $\angle 1$ y $\angle 2$ en la figura 4-5 son ángulos alternos internos de las

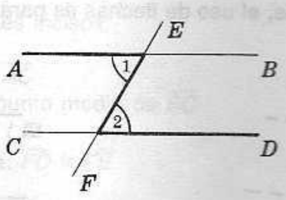


Fig. 4-5

líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{EF}$. Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, los lados de dos ángulos alternos internos forman una Z o una N mayúsculas en distintas posiciones, tal y como se muestra en la figura 4-6.

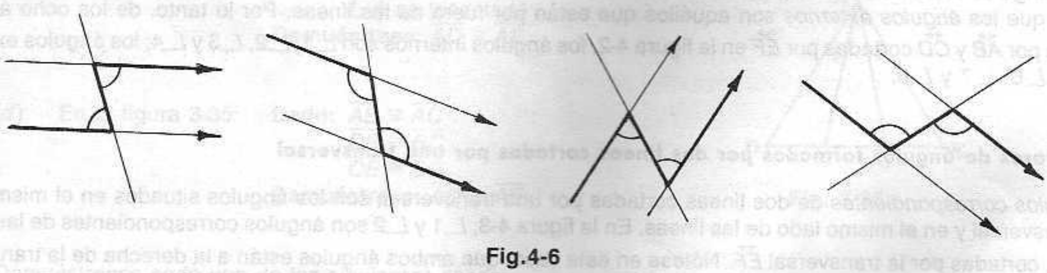


Fig.4-6

Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal *los ángulos internos del mismo lado de la transversal* se localizan muy fácil porque forman una U mayúscula con sus lados (Fig. 4-7).

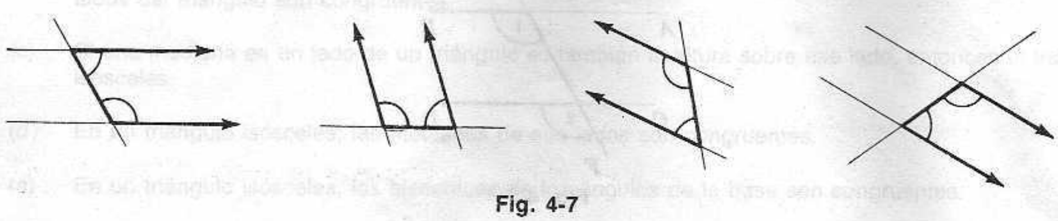


Fig. 4-7

4.1 Principios sobre líneas paralelas

PRINCIPIO 1: *a través de un punto dado que no esté en una recta dada, puede dibujarse una y sólo una paralela a la línea dada.* (Postulado de las líneas paralelas)

Por consiguiente, en la figura 4-8, ya sea l_1 o l_2, pero no ambas, puede ser paralela a l_3.

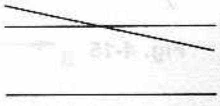


Fig. 4-8

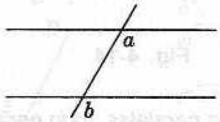


Fig. 4-9

Demostración de que dos líneas son paralelas

PRINCIPIO 2: *dos líneas son paralelas si un par de ángulos correspondientes es congruente.*

Por eso, en la figura 4-9, $l_1 \| l_2$ si $\angle a \cong \angle b$.

PRINCIPIO 3: *dos líneas son paralelas si un par de ángulos alternos internos es congruente.*

Así, en la figura 4-10, $l_1 \| l_2$ si $\angle c \cong \angle d$.

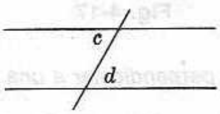


Fig. 4-10

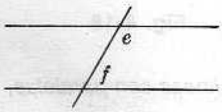


Fig. 4-11

PRINCIPIO 4: *dos líneas son paralelas si dos ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

En la figura 4-11, $l_1 \| l_2$ si $\angle e$ y $\angle f$ son suplementarios.

PRINCIPIO 5: *un conjunto de líneas es paralelo a una misma línea si todas son perpendiculares a ella. (Las perpendiculares a una misma línea son paralelas.)*

Por eso, en la figura 4-12, $l_1 \| l_2$ y l_1 y l_2 son perpendiculares a l_3.

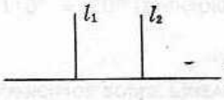


Fig. 4-12

Fig. 4-13

PRINCIPIO 6: *un conjunto de líneas es paralelo entre sí, si todas son paralelas a una misma línea. (Líneas paralelas a la misma línea, son paralelas entre sí.)*

Así, en la figura 4-13, $l_1 \| l_2$ si l_1 y l_2 son cada una, paralelas a l_3.

Propiedades de líneas paralelas

PRINCIPIO 7: *si dos líneas son paralelas, todo par de ángulos correspondientes es congruente. (Ángulos correspondientes de líneas paralelas son congruentes.)*

En la figura 4-14, si $l_1 \| l_2$, entonces $\angle a \cong \angle b$.

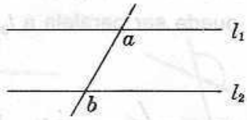


Fig. 4-14

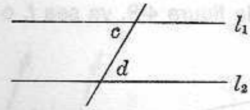


Fig. 4-15

Principio 8: *si dos líneas son paralelas, todo par de ángulos alternos internos, es congruente. (Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.)*

En consecuencia, en la figura 4-15, si $l_1 \| l_2$ entonces $\angle c \cong \angle d$.

Principio 9: *si dos líneas son paralelas, entonces los ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

Por eso, en la figura 4-16, si $l_1 \| l_2$, $\angle e$ y $\angle f$ son suplementarios.

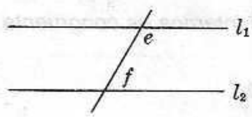


Fig. 4-16

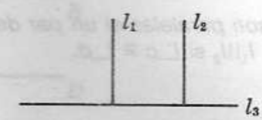


Fig. 4-17

Principio 10: *si dos o más líneas son paralelas, entonces una línea perpendicular a una de ellas es perpendicular también a las otras.*

En la figura 4-17 si $l_1 \| l_2$ y $l_3 \perp l_1$, entonces $l_3 \perp l_2$.

Principio 11: *si dos o más líneas son paralelas entre sí, entonces una línea paralela a alguna de ellas también lo es de las otras.*

Así, en la figura 4-18, si $l_1 \| l_2$ y $l_3 \| l_1$, entonces $l_3 \| l_2$.

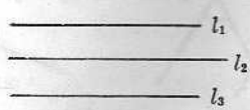


Fig. 4-18

Principio 12: *si los lados de dos ángulos son respectivamente paralelos entre sí, entonces ya sea que los ángulos son congruentes o son suplementarios.*

En la figura 4-19, si $l_1 \| l_3$ y $l_2 \| l_4$, entonces $\angle a \cong \angle b$ y también $\angle a$ y $\angle c$ son suplementarios.

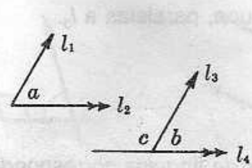


Fig. 4-19

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1 APLICACIONES NUMÉRICAS DE LÍNEAS PARALELAS

En cada parte de la figura 4-20, encuentre la medida *x* y la medida *y* de los ángulos indicados.

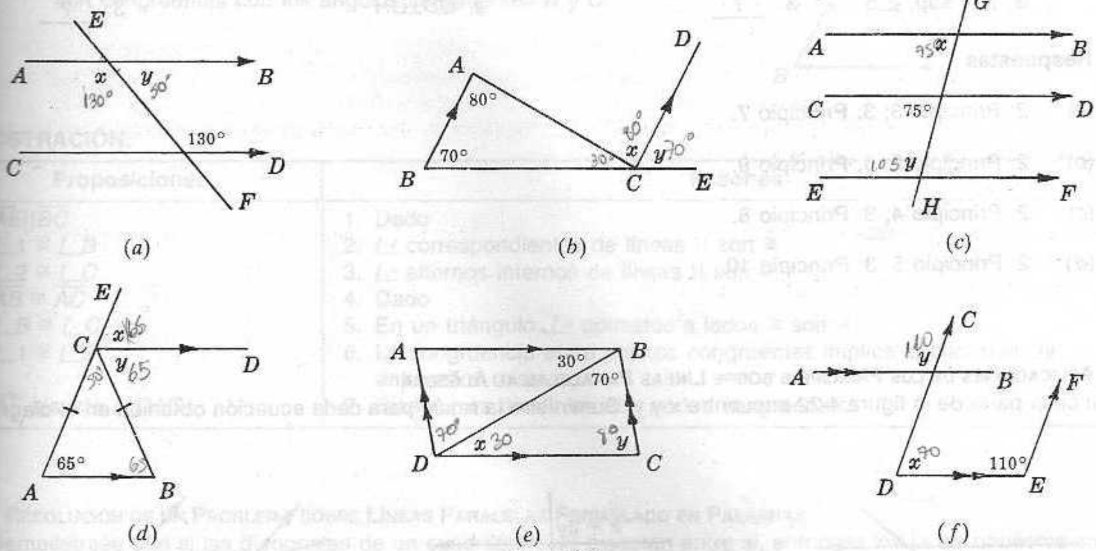


Fig. 4-20

Respuestas

(*a*) $x = 130°$ (principio 8). $y = 180° - 130° = 50°$ (principio 9).

(*b*) $x = 80°$ (principio 8). $y = 70°$ (principio 7).

(*c*) $x = 75°$ (principio 7). $y = 180° - 75° = 105°$ (principio 9).

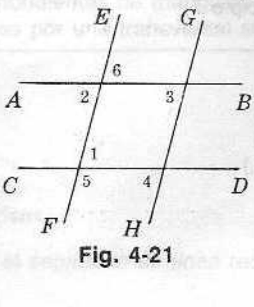
(*d*) $x = 65°$ (principio 7). Dado que $m\angle B = m\angle A$, $m\angle B = 65°$. En consecuencia $y = 65°$ (principio 8).

(*e*) $x = 30°$ (principio 8). $y = 180° - (30° + 70°) = 80°$ (principio 9).

(*f*) $x = 180° - 110° = 70°$ (principio 9). $y = 110°$ (principio 12).

4.2 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS SOBRE LÍNEAS PARALELAS Y SUS CONVERSOS

Las siguientes demostraciones breves se refieren a la figura 4-21. En cada una se da la primera proposición. Diga con qué principio sobre líneas paralelas se justifica cada una de las proposiciones restantes.



2-6 op. vert.
1-3 compl
2.1 alt int.

Fig. 4-21

(*a*)	1. $\angle 1 \cong \angle 2$	1. Dado	(*c*)	1. $\angle 5$ sup. $\angle 4$	1. Dado
	2. $AB \parallel CD$	2. ?		2. $EF \parallel GH$	2. ?
	3. $\angle 3 \cong \angle 4$	3. ?		3. $\angle 3 \cong \angle 6$	3. ?
(*b*)	1. $\angle 2 \cong \angle 3$	1. Dado	(*d*)	1. $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, $\overline{GH} \perp \overline{AB}$, $\overline{EF} \perp \overline{CD}$	1. Dado
	2. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$	2. ?		2. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$	2. ?
	3. $\angle 4$ sup. $\angle 5$	3. ?		3. $\overline{CD} \perp \overline{GH}$	3. ?

Respuestas

(*a*) 2: Principio 3; 3: Principio 7.

(*b*) 2: Principio 2; 3: Principio 9.

(*c*) 2: Principio 4; 3: Principio 8.

(*d*) 2: Principio 5; 3: Principio 10.

4.3 APLICACIONES DE LOS PRINCIPIOS SOBRE LÍNEAS PARALELAS AL ÁLGEBRA

En cada parte de la figura 4-22 encuentre *x* y *y*. Suministre la razón para cada ecuación obtenida en el diagrama.

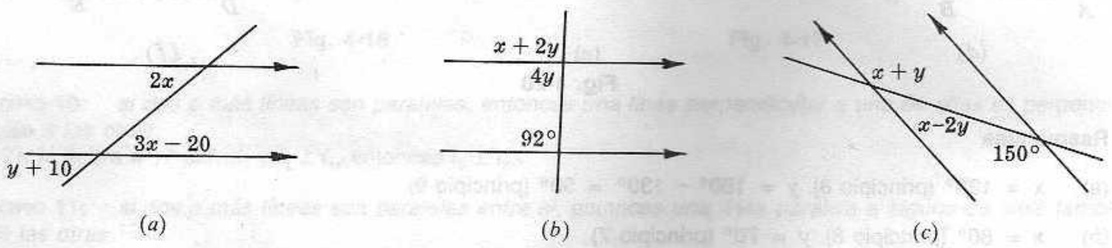


Fig. 4-22

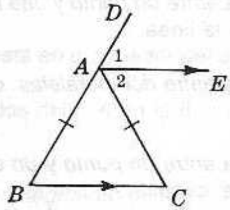
Respuestas

(*a*)
$$3x - 20 = 2x \quad \text{(principio 8)}$$
$$x = 20°$$
$$y + 10 = 2x \quad \text{(principio 7)}$$
$$y + 10 = 40$$
$$y = 30°$$

(*b*)
$$4y = 180 - 92 = 88 \quad \text{(principio 9)}$$
$$y = 22°$$
$$x + 2y = 92 \quad \text{(principio 7)}$$
$$x + 44 = 92$$
$$x = 48°$$

(*c*)
$$(1) \quad x + y = 150 \quad \text{(principio 8)}$$
$$(2) \quad x - 2y = 30 \quad \text{(principio 9)}$$
$$3y = 120 \quad \text{(Post. Subs.)}$$
$$y = 40°$$
$$x + 40 = 150$$
$$x = 110°$$

4.4 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE LÍNEAS PARALELAS



Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overrightarrow{AE} \parallel \overline{BC}$

Demuéstrese: $\overrightarrow{AE}$ bisecta $\angle DAC$

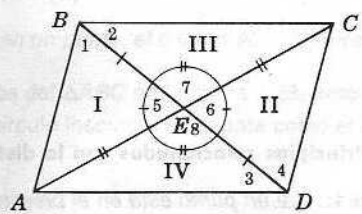
Plan: Demuéstrese que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes con los ángulos congruentes *B* y *C*.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overrightarrow{AE} \parallel \overline{BC}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle B$	2. $\angle^s$ correspondientes de líneas $\parallel$ son $\cong$.
3. $\angle 2 \cong \angle C$	3. $\angle^s$ alternos internos de líneas $\parallel$ son $\cong$.
4. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	4. Dado
5. $\angle B \cong \angle C$	5. En un triángulo, $\angle^s$ opuestos a lados $\cong$ son $\cong$.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$	6. La congruencia entre objetos congruentes implica la congruencia entre ellos mismos.
7. $\overrightarrow{AE}$ bisecta $\angle DAC$.	7. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.

4.5 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE LÍNEAS PARALELAS FORMULADO EN PALABRAS

Demuéstrese que si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces los lados opuestos son paralelos.



Dado: *ABCD* un cuadrilátero
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan entre sí.

Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Plan: Demuéstrese que $\angle 1 \cong \angle 4$ probando que $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$.
Demuéstrese que $\angle 2 \cong \angle 3$ probando que $\triangle\text{III} \cong \triangle\text{IV}$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan	1. Dado
2. $\overline{BE} \cong \overline{ED}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$	3. $\angle^s$ verticales son $\cong$.
4. $\triangle\text{I} \cong \triangle\text{II}$, $\triangle\text{III} \cong \triangle\text{IV}$	4. $\angle^s$ supl. $\cong$ $\angle^s$ supl.
5. $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$	5. Partes correspondientes de triángulos congruentes son $\cong$.
6. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	6. Líneas cortadas por una transversal son $\parallel$ si los $\angle^s$ alternos internos son $\cong$.

4.2 DISTANCIAS

4.2A Distancias entre dos figuras geométricas

La distancia entre dos figuras geométricas es el *segmento de línea recta más corto entre las figuras.*

1. La distancia *entre dos puntos P* y *Q* en la figura 4-23(*a*), es el segmento de línea $\overline{PQ}$ entre ellos.

2. La distancia *entre un punto y una línea*, como *P* y $\overleftrightarrow{AB}$ en (*b*), es el segmento de línea *PQ*; esto es, la perpendicular del punto a la línea.

3. La distancia *entre dos paralelas*, como $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en (*c*), es el segmento *PQ*; esto es, una perpendicular entre las paralelas.

4. La distancia *entre un punto y un círculo*, como *P* y el círculo *O* en (*d*), es $\overline{PQ}$; esto es, el segmento de $\overline{OP}$ entre el punto y el círculo.

5. La distancia *entre dos círculos concéntricos*, como los dos círculos cuyo centro es *O*, en (*e*), es $\overline{PQ}$, el segmento del radio mayor entre los dos círculos.

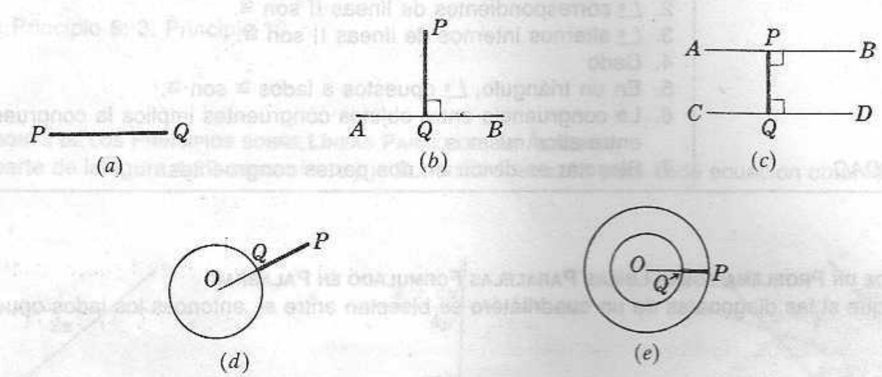


Fig. 4-23

4.2B Principios relacionados con la distancia

Principio 1: *si un punto está en el bisector perpendicular de un segmento de línea, entonces es equidistante de los extremos del segmento.*

Esto es, si *P* está en $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$ en la figura 4-24, es entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Principio 2: *si un punto es equidistante de los extremos de un segmento de línea, entonces está en el bisector perpendicular al segmento de línea.* (El principio 2 es el converso del principio 1.)

En la figura 4-24, si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ entonces *P* está en $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$.

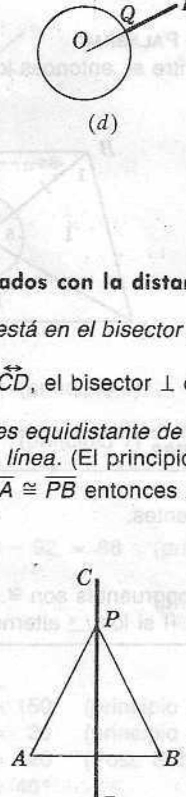


Fig. 4-24

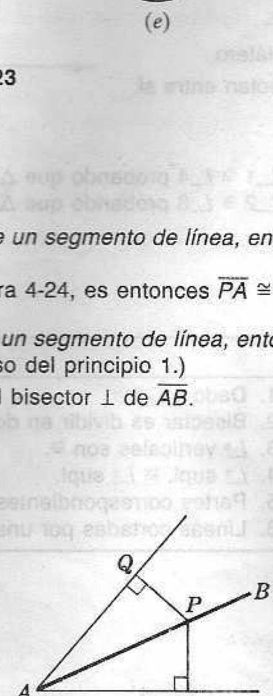


Fig. 4-25

PRINCIPIO 3: *si un punto está en el bisector de un ángulo, entonces es equidistante a los lados del ángulo.*

Por lo tanto, si P está en $\overleftrightarrow{AB}$, el bisector del $\angle A$ en la figura 4-25, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$, donde PQ y PR son las distancias de P a los lados del ángulo.

PRINCIPIO 4: *si un punto es equidistante de los lados de un ángulo, entonces está en el bisector del ángulo.* (El principio 4 es el converso del principio 3.)

Por lo cual, si $PQ = PR$, donde PQ y PR son las distancias de P a los lados del $\angle A$ en la figura 4-25, entonces P está en $\overleftrightarrow{AB}$, el bisector de $\angle A$.

PRINCIPIO 5: *dos puntos, cada uno de ellos equidistante de los extremos de un segmento de línea, determinan al bisector perpendicular del segmento de línea.* (La línea que une los vértices de dos triángulos isósceles, con base común, es el bisector perpendicular de la base.)

De este modo, si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\overline{QA} \cong \overline{QB}$ en la figura 4-26, entonces P y Q determinan $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$.

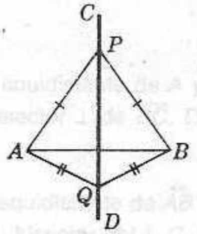


Fig. 4-26

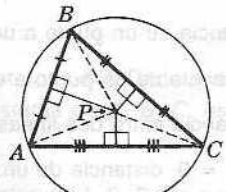


Fig. 4-27

PRINCIPIO 6: *los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo se cruzan en un punto, el cual es equidistante a los vértices del triángulo.*

Así si P es la intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$ en la figura 4-27, entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$. P es el centro del círculo circunscrito y se le denomina *circuncentro* del $\triangle ABC$.

PRINCIPIO 7: *las bisectrices de los ángulos de un triángulo se encuentran en un punto, el cual es equidistante respecto de los lados del triángulo.*

De esta manera, si Q es la intersección de los bisectores de los ángulos del $\triangle ABC$ en la figura 4-28, entonces $\overline{QR} \cong \overline{QS} \cong \overline{QT}$, las distancias de Q a los lados del $\triangle ABC$. Q es el centro del círculo inscrito y se denota como el *incentro* del $\triangle ABC$.

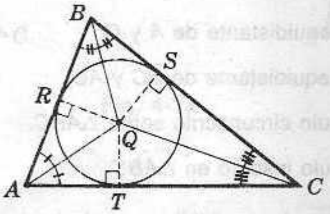
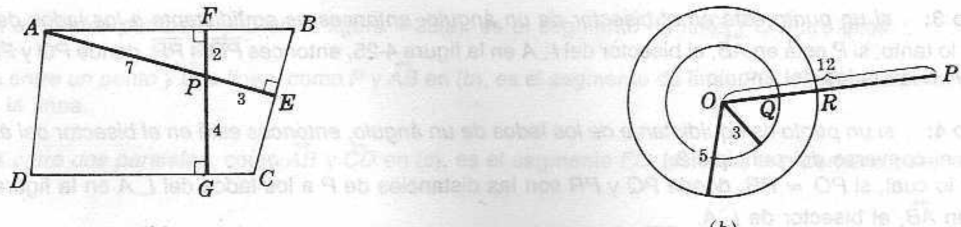


Fig. 4-28

PROBLEMAS RESUELTOS

4.6 Determinación de distancias

A continuación, encuéntrese la distancia e indíquese el tipo de distancia del que se trata. En la figura 4-29(*a*) de P a A; (*b*) de P a $\overleftrightarrow{CD}$; (*c*) de A a $\overleftrightarrow{BC}$; (*d*) de $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$. En la figura 4-29(*b*), encuéntrese la distancia (*e*) de P al círculo interior O; (*f*) de P al círculo exterior O; (*g*) entre los círculos concéntricos.



(a) (b)

Fig. 4-29

Respuestas

(a) $PA = 7$, distancia entre dos puntos.

(b) $PG = 4$, distancia de un punto a una línea.

(c) $AE = 10$, distancia de un punto a una línea.

(d) $FG = 6$, distancia entre dos líneas paralelas.

(e) $PQ = 12 - 3 = 9$, distancia de un punto a un círculo.

(f) $PR = 12 - 5 = 7$, distancia de un punto a un círculo.

(g) $QR = 5 - 3 = 2$, distancia entre dos círculos concéntricos.

4.7 Localización de un Punto que Satisfaga Condiciones Preestablecidas

En la figura 4-30:

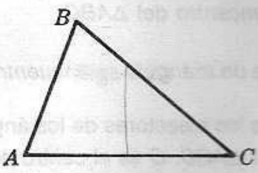


Fig. 4-30

(a) Localice P, un punto en $\overleftrightarrow{BC}$ equidistante de A y C.

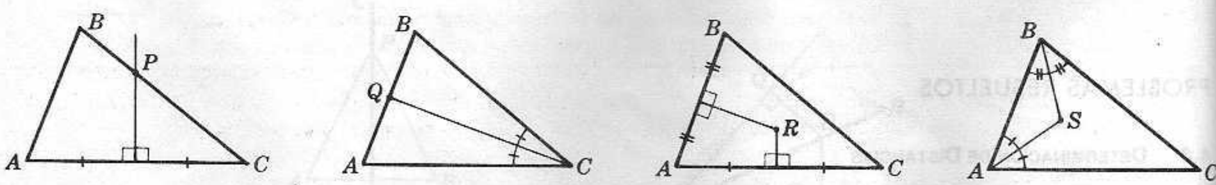
(b) Localice Q, un punto en $\overleftrightarrow{AB}$ equidistante de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

(c) Localice R, el centro del círculo circunscrito sobre $\triangle ABC$.

(d) Localice S, el centro del círculo inscrito en $\triangle ABC$.

Respuestas

Véase la figura 4-31.



(a) Utilice el principio 1 (b) Utilice el principio 3 (c) Utilice el principio 6 (d) Utilice el principio 7

Fig. 4-31

4.8 Aplicación de los Principios 2 y 4

Para cada $\triangle ABC$ en la figura 4-32, describa a P, Q y R como puntos equidistantes y localícelos sobre un bisector.

(a) (b)

Fig. 4-32

Respuestas

(a) Dado que P es equidistante de A y B, está en el bisector $\perp$ de AB. Dado que Q es equidistante de B y C, está en el bisector $\perp$ de $\overline{BC}$. Dado que R es equidistante de A, B, C, está en los bisectores $\perp$ de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

(b) Dado que P es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, está en el bisector del $\angle B$. Dado que Q es equidistante de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, está en el bisector del $\angle C$. Dado que R es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, está en los bisectores de los $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

4.9 Aplicación de los Principios 1, 3, 6 y 7

Para todo $\triangle ABC$ de la figura 4-33, describa a P, Q, R como puntos equidistantes. También describa a R como el centro de un círculo.

(a) (b)

Fig. 4-33

Respuestas

(a) Dado que P está en el bisector del $\angle A$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Dado que Q está en el bisector de $\angle B$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Dado que R está en los bisectores de $\angle A$ y $\angle B$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. R es el incentro del $\triangle ABC$, esto es, el centro de su círculo inscrito.

(b) Dado que P está en el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$, es equidistante de A y B. Dado que Q está en el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$, es equidistante de A y C. Dado que R está en los bisectores $\perp$ de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es equidistante de A, B y C. R es el circuncentro de $\triangle ABC$, esto es, es el centro de su círculo circunscrito.

4.10 Aplicación de los Principios 1, 3, 6 y 7

En cada parte de la figura 4-34, encuentre dos puntos equidistantes a los extremos de un segmento de línea y también el bisector perpendicular determinado por los dos puntos.

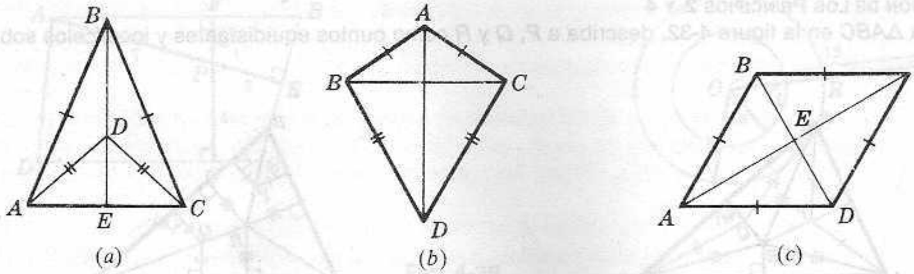


Fig. 4-34

Respuestas

(*a*) B y D son equidistantes de A y C. Por lo tanto $\overline{BE}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$.

(*b*) A y D son equidistantes de B y C. Por lo tanto $\overline{AD}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{BC}$.

(*c*) B y D son equidistantes de A y C; por lo tanto $\overline{BD}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$. A y C son equidistantes de B y D; por lo tanto $\overline{AC}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{BD}$.

4.3 SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Los ángulos de cualquier triángulo pueden separarse como en la figura 4-35(*a*) y en seguida colocarlos juntos como se muestra en (*b*). Los tres ángulos forman un ángulo derecho.

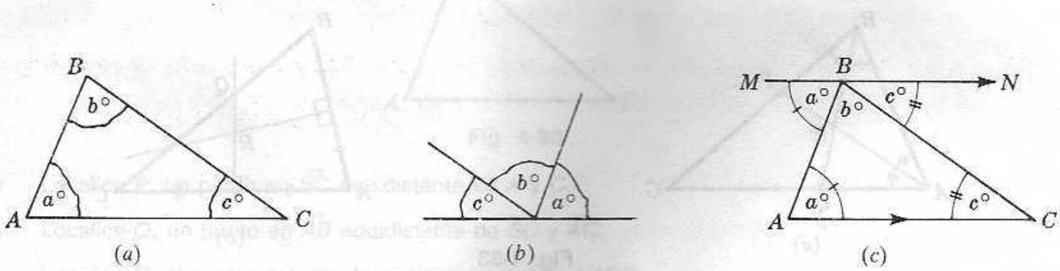


Fig. 4-35

Es posible demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180°, mediante el trazado de una línea que pase por uno de los vértices del triángulo y que sea paralela al lado opuesto del vértice en cuestión. En la figura 4-35(*c*), $\overleftrightarrow{MN}$ se traza por B y es paralela a AC. Nótese que la medida del ángulo derecho en B es igual a la suma de las medidas de los ángulos del $\triangle ABC$; esto es, $a° + b° + c° = 180°$. Cada par de ángulos congruentes es un par de ángulos alternos internos de líneas paralelas.

4.3A Ángulos internos y externos de un polígono

Se forma un ángulo externo en un polígono, siempre que uno de sus lados se extienda por el vértice. Si cada uno de los lados de un polígono se extiende como se muestra en la figura 4-36, puede observarse la formación de un ángulo externo en cada vértice. Cada uno de los ángulos externos es suplementario de su ángulo interno adjunto.

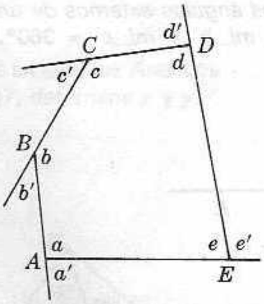


Fig. 4-36

Así, en el caso del pentágono $ABCDE$ habrá cinco ángulos externos, uno en cada vértice. Nótese que cada ángulo externo es el suplemento de un ángulo interno adjunto. Por ejemplo: $m\angle a + m\angle a' = 180°$.

4.3B Principios sobre la suma de las medidas de ángulos

Principio 1: *la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo derecho, esto es, a* 180°. Así, en el $\triangle ABC$ de la figura 4-37, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.

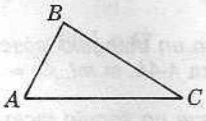


Fig. 4-37

Principio 2: *si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente a dos ángulos de otro triángulo, entonces los ángulos restantes son congruentes.*
Así, en los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ en la figura 4-38, si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\angle C \cong \angle C'$.

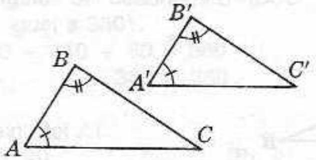


Fig. 4-38

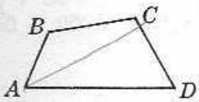


Fig. 4-39

Principio 3: *la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es igual a* 360°.
En el cuadrilátero $ABCD$ (Fig. 4-39), $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$.

Principio 4: *la medida de cada ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos internos no adjuntos.*
En el $\triangle ABC$ de la figura 4-40, $m\angle ECB = m\angle A + m\angle B$.

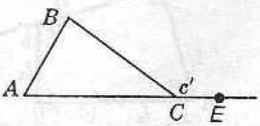


Fig. 4-40

PRINCIPIO 5: *la suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es igual a* 360°.
En el $\triangle ABC$ de la figura 4-41, $m\angle a' + m\angle b' + m\angle c' = 360°$.

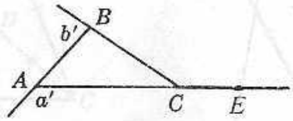


Fig. 4-41

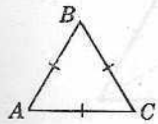


Fig. 4-42

PRINCIPIO 6: *la medida de todo ángulo de un triángulo equilátero es de* 60°.
Así el $\triangle ABC$ en la figura 4-42 es equilátero, entonces $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 60°$ y $m\angle C = 60°$.

PRINCIPIO 7: *los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.*
Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 4-43, si $m\angle C = 90°$, entonces $m\angle A + m\angle B = 90°$.

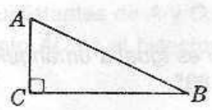


Fig. 4-43

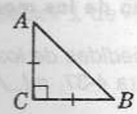


Fig. 4-44

PRINCIPIO 8: *la medida de todo ángulo agudo en un triángulo isósceles es igual a* 45°.
En el $\triangle$ rectángulo isósceles ABC de la figura 4-44, si $m\angle C = 90°$, entonces $m\angle A = 45°$ y $m\angle B = 45°$.

PRINCIPIO 9: *un triángulo no puede tener más que un ángulo recto.*
Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 4-43, si $m\angle C = 90°$ entonces $\angle A$ y $\angle B$ no pueden ser $\angle$s rectos.

PRINCIPIO 10: *un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.*
En el $\triangle ABC$ obtuso de la figura 4-45, si $\angle C$ es obtuso entonces $\angle A$ y $\angle B$ no pueden ser ángulos obtusos.

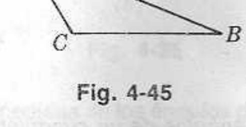


Fig. 4-45

PRINCIPIO 11: *dos ángulos son congruentes o suplementarios si sus lados son respectivamente perpendiculares entre sí.*
En la figura 4-46, si $l_1 \perp l_3$ y $l_2 \perp l_4$ entonces $\angle a \cong \angle b$ y $\angle a$ y $\angle c$ son suplementarios.

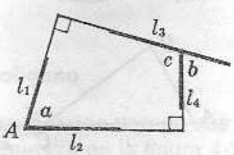


Fig. 4-46

PROBLEMAS RESUELTOS

4.11 EJEMPLOS NUMÉRICOS DE LOS PRINCIPIOS DE LA SUMA DE ÁNGULOS

En cada uno de los incisos de la figura 4-47, determine x y y.

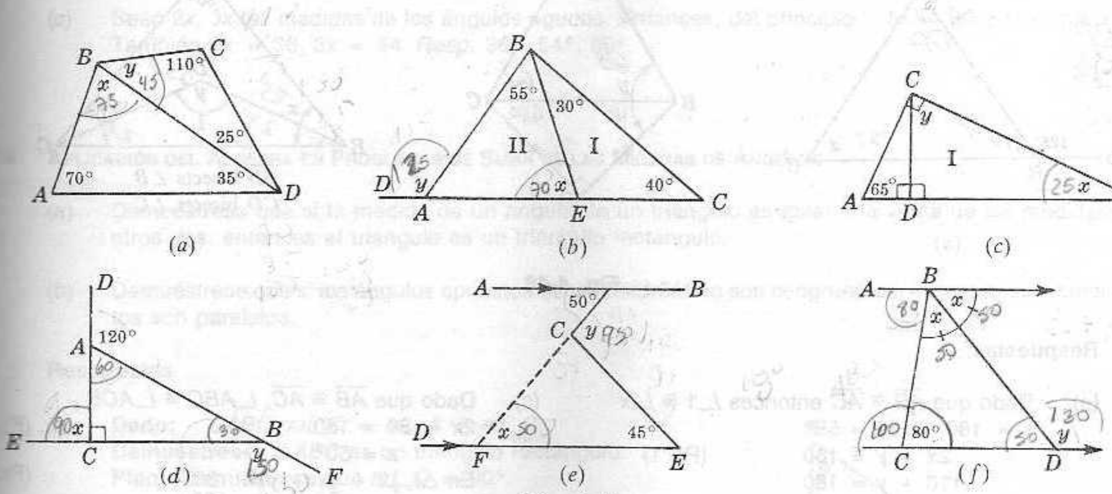


Fig. 4-47

Respuestas

(*a*) $x + 35 + 70 = 180$ (Pr. 1)

$x = 75°$

$y + 110 + 25 = 180$ (Pr. 1)

$y = 45°$

Verificación: la suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero *ABCD* debe ser igual a 360°.

$70 + 120 + 110 + 60 \stackrel{?}{=} 360$

$360 = 360$

(*b*) x es $\angle$ ext. del $\triangle$I.

$x = 30 + 40$ (Pr. 4)

$x = 70°$

y es $\angle$ ext. del $\triangle ABC$

$y = m\angle B + 40$ (Pr. 4)

$y = 85 + 40 = 125°$

(*c*) En el $\triangle ABC$, $x + 65 = 90$ (Pr. 7)

$x = 25°$

En el $\triangle$I, $x + y = 90$ (Pr. 7)

$25 + y = 90$

$y = 65°$

(*d*) Dado que $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{EB}$, $x = 90$

$x + y + 120 = 360$ (Pr. 5)

$90 + y + 120 = 360$

$y = 150°$

(*e*) Dado que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $x = 50$

$y = x + 45$ (Pr. 4)

$y = 50 + 45 = 95°$

(*f*) Dado que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $2x + 80 = 180$

$2x = 100$

$x = 50°$

$y = x + 80°$ (Pr. 4)

$y = 50 + 80 = 130°$

4.12 Aplicación de los Principios de Suma de las Medidas de Ángulos a Triángulos Isósceles y Equiláteros
Determínese x y y en cada inciso de la figura 4-48.

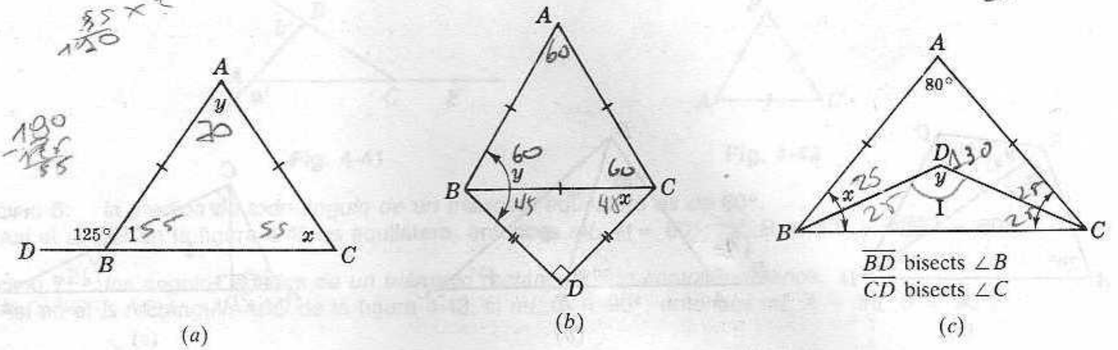


Fig. 4-48

Respuestas

(*a*) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\angle 1 \cong \angle x$
$x = 180 - 125 = 55°$
$2x + y = 180$ (Pr. 1)
$110 + y = 180$
$y = 70°$

(*b*) Del Pr. 8, $x = 45°$
Dado que $m\angle ABC = 60°$ (Pr. 6)
y $m\angle CBD = 45°$ (Pr. 8)
$y = 60 + 45 = 105°$

(*c*) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle ABC \cong \angle ACB$
$2x + 80 = 180$ (Pr. 1
$x = 50°$
En ΔI, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + y = 180$ (Pr. 1
$x + y = 180$
$50 + y = 180$
$y = 130°$

4.13 Aplicación de Razones a la Suma de Medidas de Ángulos
Determínese la medida de cada ángulo.

(*a*) De un triángulo si las medidas de sus ángulos están en la proporción 3:4:5 [Fig. 4-49(*a*)]

(*b*) De un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos están en la proporción 3:4:5:6 [(*b*)]

(*c*) De un triángulo recto si la proporción de las medidas de sus ángulos agudos es de 2:3 [(*c*)]

$5x+4x+3x$ $5x+4x+5x$ $\frac{360}{180} = 20$ $3x+2x=90$
$12x$ $14x=180$ $5x=90$
$x = \frac{180}{12} = \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$ $x = \frac{180}{14}$ $x = \frac{90}{5}$
$x = \frac{90}{7}$

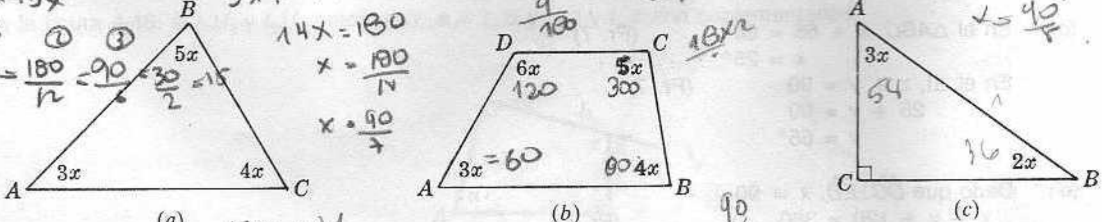


Fig. 4-49

$180 : 14 = 1$ $90 : 5 = 18$

Respuestas

(*a*) Sean $3x$, $4x$ y $5x$ las medidas de los ángulos. Entonces, del principio 1: $12x = 180$, por lo que $x = 15$. También $3x = 45$, $4x = 60$ y $5x = 75$. *Resp.* 45°, 60°, 75°.

(*b*) Sean $3x$, $4x$, $5x$ y $6x$ las medidas de los ángulos. Entonces, del principio 3: $18x = 360$, por lo que $x = 20$. También $3x = 60$, $4x = 80$, etc. *Resp.* 60°, 80°, 100°, 120°.

(*c*) Sean $2x$, $3x$ las medidas de los ángulos agudos. Entonces, del principio 7: $5x = 90$, por lo que $x = 18$. También $2x = 36$, $3x = 54$. *Resp.* 36°, 54°, 90°.

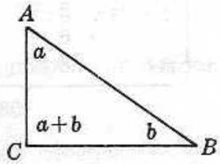
4.14 APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA EN PROBLEMAS DE SUMA DE LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS

(*a*) Demuéstrese que si la medida de un ángulo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los otros dos, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(*b*) Demuéstrese que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces sus lados opuestos son paralelos.

Respuestas

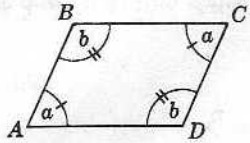
(*a*) **Dado:** $\triangle ABC$, $m\angle C = m\angle A + m\angle B$
Demuéstrese: $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
Plan: Demuéstrese que $m\angle C = 90°$.



DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA:

Sean a = número de grados en $\angle A$
b = número de grados en $\angle B$
Entonces $a + b$ = número de grados en $\angle C$
$a + b + (a + b) = 180$ (Pr. 1)
$2a + 2b = 180$
$a + b = 90$
Como $m\angle C = 90°$, $\triangle ABC$ es $\triangle$ rectángulo.

(*b*) **Dado:** el cuadrilátero $ABCD$
$\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Plan: Demuéstrese que los $\angle$s int. del mismo lado de la transversal son suplementarios.

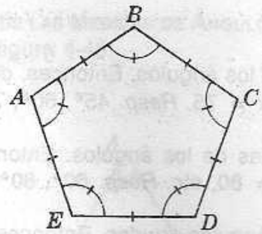


DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA:

Sean a = número de grados en $\angle A$ y $\angle C$,
b = número de grados en $\angle B$ y $\angle D$
$2a + 2b = 360$ (Pr. 3)
$a + b = 180$
Dado $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Dado $\angle A$ y $\angle D$ son suplementarios, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

4.4 SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

Un *polígono*, es un figura plana cerrada, acotada por segmentos de línea recta como lados. Un *n-gono* es un polígono de *n* lados. Así, un polígono de 20 lados es un 20-gono.



Pentágono regular

Fig. 4-50

Un *polígono regular*, es un polígono equilateral y equiangular. Así, un pentágono regular es un polígono que tiene cinco ángulos congruentes y cinco lados congruentes (Fig. 4-50). Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados.

Nombres de polígonos de acuerdo con su número de lados

Número de lados	*Polígono*	*Número de lados*	*Polígono*
3	Triángulo	8	Octágono
4	Cuadrilátero	9	Nonágono
5	Pentágono	10	Decágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	n	n-gono

4.4A Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono

Al trazar diagonales desde un vértice hasta cada uno de los otros, como en la figura 4-51, es posible dividir un polígono de siete lados en cinco triángulos. Nótese que a cada triángulo le pertenece uno de los lados del polígono, excepto por el primero y el último triángulos, los cuales tienen a dos de ellos.

$(n-2)$

$n-2$

$5-2=3$

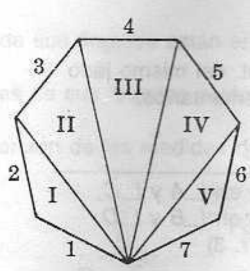


Fig. 4-51

En general, con este proceso se divide un polígono de n lados en $n-2$ triángulos; esto es, el número de triángulos es siempre el número de los lados del polígono menos 2.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos. Por lo tanto:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados $= (n-2)180°$

4.4B Suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono

Los ángulos externos de un polígono pueden trazarse juntos de manera que tengan el mismo vértice. Para lograr esto, trace desde algún punto líneas paralelas a los lados del polígono, tal y como se muestra en la figura 4-52. Una vez hecho esto, puede observarse que sin importar el número de lados, la suma de las medidas de los ángulos externos es siempre 360°. Entonces:

La suma de los ángulos externos de un polígono de n lados = 360°

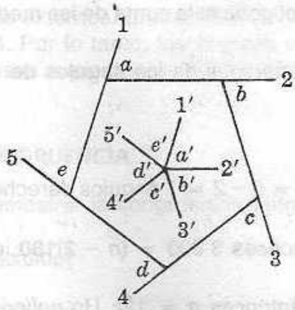


Fig. 4-52

4.4C Principios para ángulos de polígonos

Para cualquier polígono

PRINCIPIO 1: *si S es la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados, entonces*

$$S = n - 2 \text{ ángulos derechos} = (n-2)180°$$

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de 10 lados (decágono) es igual a 1 440°, ya que $S = 8(180) = 1\,440$.

PRINCIPIO 2: *la suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360°.*

Por tanto, la suma de los ángulos externos de un polígono de 23 lados es de 360°.

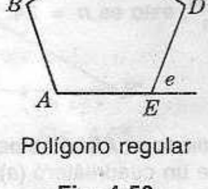
Para un polígono regular

PRINCIPIO 3: *si un polígono regular de n lados (Fig. 4-53) tiene un ángulo interno que mide i y un ángulo externo que mide e (en grados), entonces*

$$i = \frac{180(n-2)}{n} \qquad e = \frac{360}{n} \qquad \text{y} \qquad i + e = 180$$

Claramente, para un polígono regular de 20 lados:

$$i = \frac{180(20-2)}{20} = 162 \qquad e = \frac{360}{20} = 18 \qquad i + e = 162 + 18 = 180$$



Polígono regular

Fig. 4-53

PROBLEMAS RESUELTOS

4.15 Aplicación de Fórmulas sobre Medidas de Ángulos en un Polígono

(*a*) Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de 9 lados (exprese la respuesta en términos de ángulos derechos y en grados).

(*b*) Halle el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es de 3 600°.

(*c*) ¿Es posible que la suma de las medidas de los ángulos de un polígono sea igual a 1 890°?

Respuestas

(*a*) S (en ángulos derechos) $= n - 2 = 9 - 2 = 7$ ángulos derechos; $m\angle S = (n-2)180 = 7(180) = 1\,260°$.

(*b*) S (en grados) $= (n - 2)180$. Entonces $3\,600 = (n - 2)180$, de donde $n = 22$.

(*c*) Dado que $1\,890 = (n - 2)180$, entonces $n = 12\frac{1}{2}$. Un polígono no puede tener $12\frac{1}{2}$ lados.

4.16 Aplicación de Fórmulas sobre Medidas de Ángulos a un Polígono Regular

(*a*) Calcule la medida de los ángulos externos de un polígono regular de 9 lados. $\frac{360}{9} = 40$

(*b*) Calcule la medida de los ángulos internos de un polígono regular de 9 lados. $\frac{180(n-2)}{n}$

$\frac{180(9-2)}{9} = \frac{180(7)}{9} = 140$

(*c*) Calcule el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide 5°.

$5 = \frac{360}{n}$ $360 : 5 = 72$

(*d*) Calcule el número de lados de un polígono regular, si cada uno de sus ángulos internos mide 165°.

$\frac{180(n-2)}{n} = 165$ $i + e = 180$ $i = 165$ $e + i = 180$

Respuestas

(*a*) Dado que $n = 9$, $m\angle e = \frac{360}{n} = \frac{360}{9} = 40$. *Resp.* 40°.

(*b*) Dado que $n = 9$, $m\angle i = \frac{(n-2)180}{n} = \frac{(9-2)180}{9} = 140$. *Resp.* 140°.
Otro método: dado que $i + e = 180$, $i = 180 - e = 180 - 40 = 140$.

(*c*) Al sustituir $e = 5$ en $e = \frac{360}{n}$, se tiene $5 = \frac{360}{n}$. Entonces $5n = 360$, esto es $n = 72$. *Resp.* 72 lados.

(*d*) Al sustituir $i = 165$ en $i + e = 180$, se tiene que $165 + e = 180$ o $e = 15$. Entonces, utilizando $e = \frac{360}{n}$ con $e = 15$, se tiene que $15 = \frac{360}{n}$, esto es $n = 24$. *Resp.* 24 lados.

4.17 Aplicación del Álgebra a la Suma de Medidas de Ángulos de un Polígono

Calcule la medida de cada ángulo interno de un cuadrilátero (*a*) si sus ángulos internos se representan por $x + 10$, $2x + 20$, $3x - 50$ y $2x - 20$; (*b*) si sus ángulos externos están en proporción 2:3:4:6.

Respuestas

(a) Dado que las medidas de los $\angle$s internos es de 360°, sumamos:

$$(x + 10) + (2x + 20) + (3x - 50) + (2x - 20) = 360$$
$$8x - 40 = 360$$
$$x = 50$$

Entonces $x + 10 = 60$; $2x + 20 = 120$; $3x - 50 = 100$; $2x - 20 = 80$. *Resp.* 60°, 120°, 100°, 80°.

(b) Sean $2x$, $3x$, $4x$ y $6x$ los ángulos externos. Entonces $2x + 3x + 4x + 6x = 360$. La resolución obtenida es $15x = 360$, esto es $x = 24$. Por lo tanto, los ángulos externos miden 48°, 72°, 96° y 144°.
Los ángulos internos son sus suplementos. *Resp.* 132°, 108°, 84°, 36°.

4.5 DOS NUEVOS TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA

Ya se han presentado tres métodos para demostrar la congruencia entre triángulos. Éstos son:

1. s.a.s. ≅ s.a.s. (Dos lados y el ángulo incluido)
2. a.s.a. ≅ a.s.a. (Dos ángulos y el lado incluido)
3. s.s.s. ≅ s.s.s. (Tres lados)

Dos métodos adicionales para demostrar que dos triángulos son congruentes son:

4. s.a.a. ≅ s.a.a. (Dos ángulos y el lado opuesto)
5. hip.c. ≅ hip.c. (Hipotenusa y un cateto)

4.5A Dos nuevos principios de congruencia

PRINCIPIO 1: (s.a.a. ≅ s.a.a.) *si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos de un triángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*
Si en la figura 4-54, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

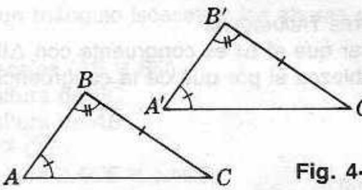


Fig. 4-54

PRINCIPIO 2: (hip.c. ≅ hip.c.) *en un triángulo rectángulo, si la hipotenusa y un cateto son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.*
En la figura 4-55, si hip. $\overline{AB} \cong$ hip. $\overline{A'B'}$ y c. $\overline{BC} \cong$ c. $\overline{B'C'}$ entonces $\triangle$ rectángulo $ABC \cong \triangle$ rectángulo $A'B'C'$.

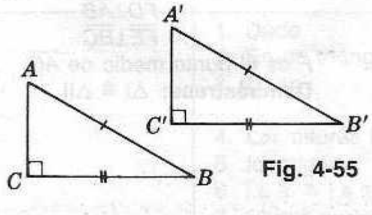


Fig. 4-55

En el capítulo 16 se da la demostración de este principio.

PROBLEMAS RESUELTOS

4.18 SELECCIÓN DE TRIÁNGULOS CONGRUENTES UTILIZANDO s.a.a. ≅ s.a.a. O hip.c. ≅ hip.c.

En (*a*) figura 4-56 y (*b*) figura 4-57, seleccione los triángulos que sean congruentes y establezca la razón de su congruencia.

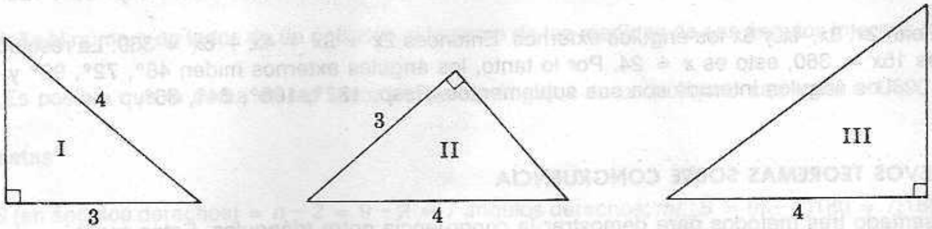


Fig. 4-56

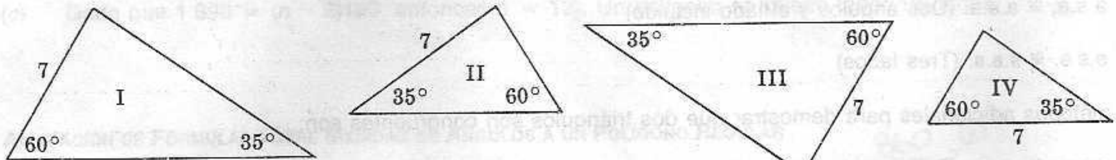


Fig. 4-57

Respuestas

(*a*) △I ≅ △II hip.c ≅ hip.c. En △III, 4 no es hipotenusa.

(*b*) △I ≅ △III por s.a.a. ≅ s.a.a. En △II, 7 es opuesto a 60° en lugar de 35°. En △IV, 7 está incluido entre 60° y 35°

4.19 DETERMINACIÓN DE LA CAUSA DE LA CONGRUENCIA ENTRE TRIÁNGULOS

En cada inciso de la figura 4-58, es posible demostrar que el △I es congruente con △II. Haga un diagrama que muestre las partes congruentes de cada triángulo y establezca el por qué de la congruencia.

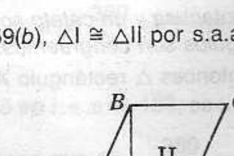
Respuestas

(*a*) En la figura 4-59(*a*), △I ≅ △II por hip.c. ≅ hip.c.

(*b*) En la figura 4-59(*b*), △I ≅ △II por s.a.a. ≅ s.a.a.

(*a*) **Dado:** $\overline{BD} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AD}$
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

Demuéstrese: △I ≅ △II



(*b*) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{FD} \perp \overline{AB}$
$\overline{FE} \perp \overline{BC}$
F es el punto medio de $\overline{AC}$.

Demuéstrese: △I ≅ △II

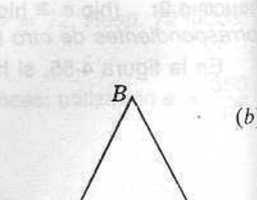


Fig. 4-58

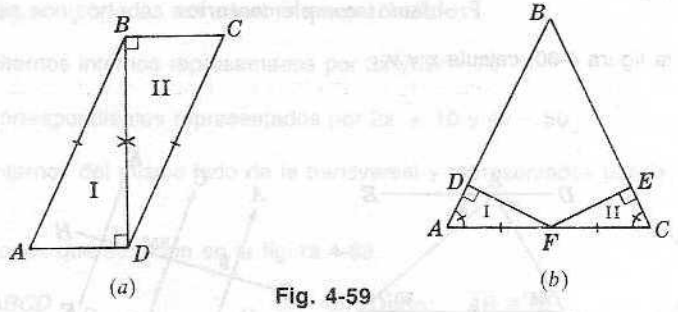
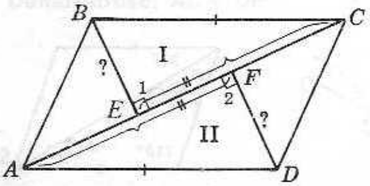


Fig. 4-59

4.20 DEMOSTRACIÓN DE UN PROBLEMA DE CONGRUENCIA



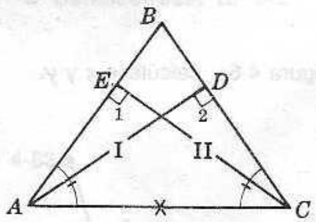
Dado: Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
$\overline{AE} \cong \overline{FC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{FD}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle I \cong \triangle II$

DEMOSTRACIÓN

Proposiciones	Razones
1. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. Dado
2. $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Las perpendiculares forman $\angle$s rectos y los $\angle$s rectos son congruentes.
4. $\overline{AE} \cong \overline{FC}$	4. Dado
5. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	5. Identidad
6. $\overline{AF} \cong \overline{EC}$	6. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales. Definición de segmentos congruentes
7. $\triangle I \cong \triangle II$	7. hip.c. ≅ hip.c.
8. $\overline{BE} \cong \overline{FD}$	8. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son congruentes.

4.21 DEMOSTRACIÓN DE UN PROBLEMA DE CONGRUENCIA FORMULADO EN PALABRAS

Demuestre que en un triángulo isósceles, las alturas de lados congruentes son congruentes.



Dado: $\triangle ABC$ isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$)
$\overline{AD}$ es la altura de $\overline{BC}$
$\overline{CE}$ es la altura de $\overline{AB}$
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{CE}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle ACE \cong \triangle ACD$
o $\triangle I \cong \triangle II$

DEMOSTRACIÓN

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle C$	2. En un triángulo, $\angle$s opuestos a lados iguales son iguales.
3. $\overline{AD}$ es la altura de $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ es la altura de $\overline{AB}$.	3. Dado
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. Las alturas forman $\angle$s rectos con la base, ∴ son congruentes.
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	5. Identidad
6. $\triangle I \cong \triangle II$	6. l.a.a. ≅ l.a.a.
7. $\overline{AD} \cong \overline{CE}$	7. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes, son congruentes.

Problemas complementarios

1. En cada inciso de la figura 4-60, calcule x y y. (4.1)

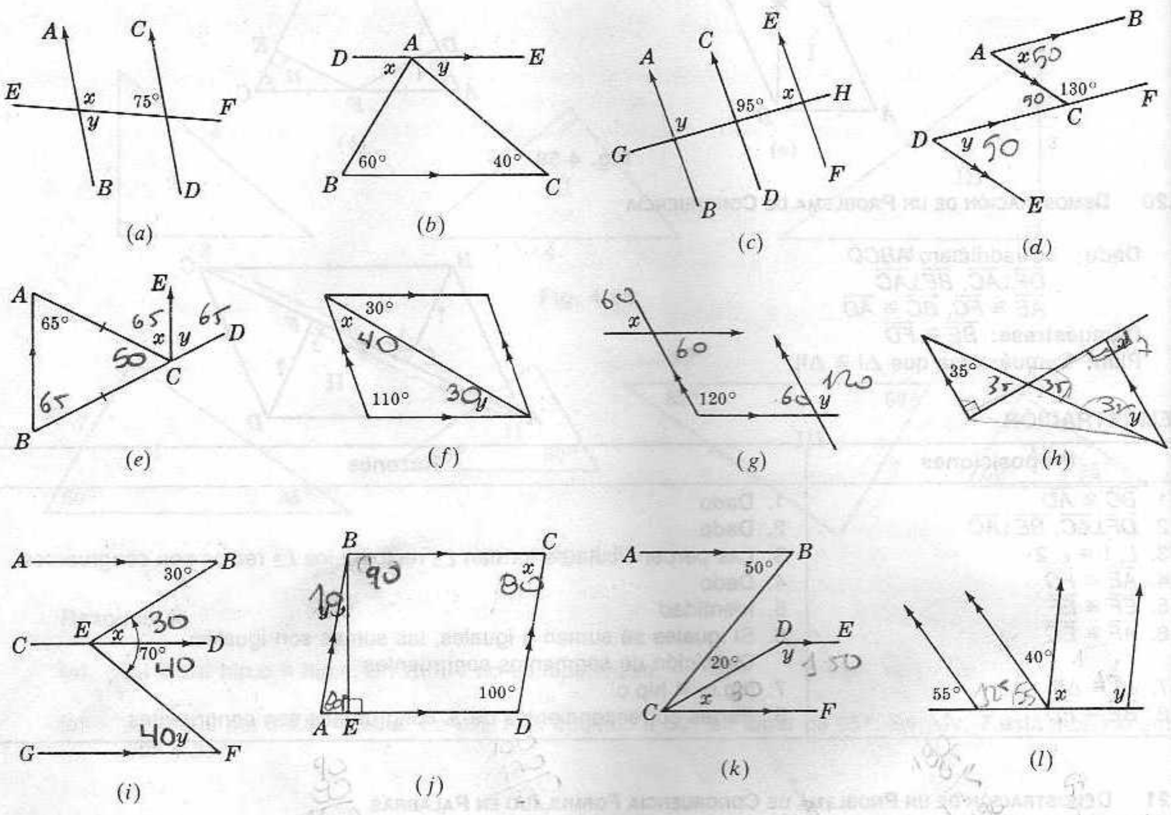


Fig. 4-60

2. En cada inciso de la figura 4-61, calcúlese x y y. (4.3)

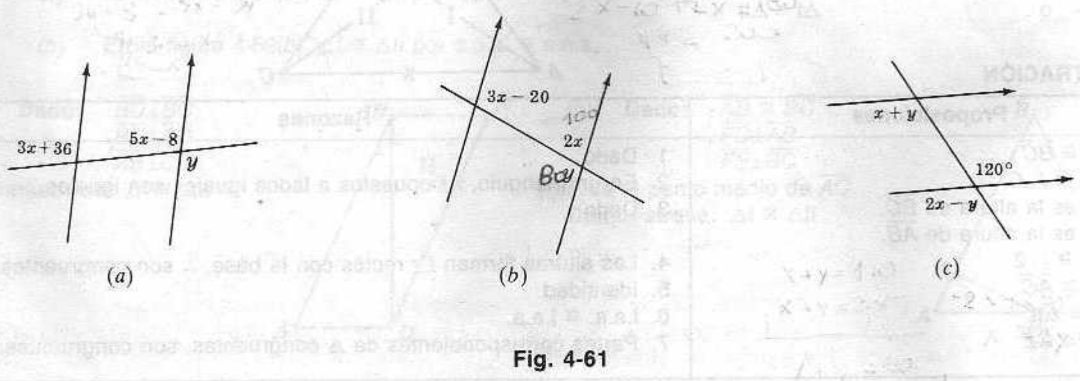


Fig. 4-61

3. Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, halle: (4.3)

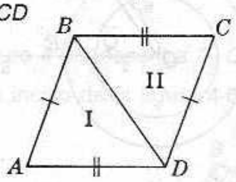
(a) Dos ángulos alternos internos representados por $3x$ y $5x - 70$

(b) Dos ángulos correspondientes representados por $2x + 10$ y $4x - 50$

(c) Dos ángulos internos del mismo lado de la transversal y representados por $2x$ y $3x$.

4. Haga las demostraciones que se piden en la figura 4-62. (4.4)

(a) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$



(b) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$
$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$
Demuéstrese: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

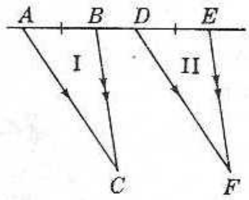
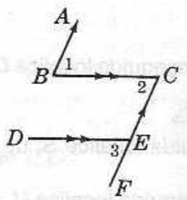


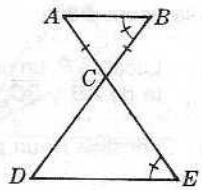
Fig. 4-62

5. Realice las demostraciones requeridas en la figura 4-63. (4.4)

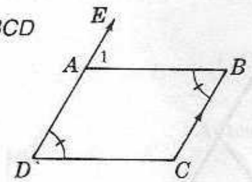
(a) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$
$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 3$



(b) **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
$\angle B \cong \angle E$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



(c) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
$\angle B \cong \angle D$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



(d) **Dado:** $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
$\overline{AE}$ bisecta $\angle A$
$\overline{BF}$ bisecta $\angle B$
Demuéstrese: $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$

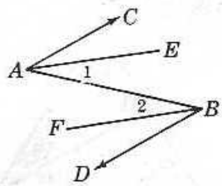


Fig. 4-63

6. Demuéstrese cada una de las siguientes proposiciones: (4.5)

(a) Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces son congruentes también.

(b) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisectan en E, entonces $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

(c) En el cuadrilátero $ABCD$ sea $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Si las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en E y $\overline{AE} \cong \overline{DE}$, entonces $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.

(d) $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas cortadas por una transversal en E y F. Si $\overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{FH}$ bisectan un par de ángulos correspondientes, entonces $\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{FH}$.

(e) Si una línea trazada por el vértice B del $\triangle ABC$ es paralela a $\overline{AC}$ y bisecta al ángulo formado al extender el segmento $\overline{AB}$, por B; entonces $\triangle ABC$ es isósceles.

7. En la figura 4-64 encuéntrese la distancia que hay de (a) A a B; (b) E a $\overline{AC}$; (c) A a $\overline{BC}$; (d) $\overline{ED}$ a $\overline{BC}$. (4.6)

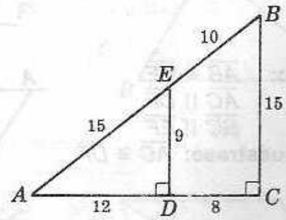


Fig. 4-64

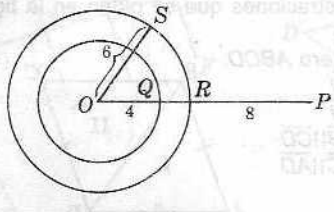


Fig. 4-65

8. En la figura 4-65 determínense las distancias (a) de P al círculo exterior; (b) de P al círculo interior; (c) entre los círculos concéntricos; (d) de P a O. (4.6)

9. En la figura 4-66:

(a) Localice P, un punto sobre $\overline{AD}$, equidistante de B y C. Enseguida localice Q, un punto sobre $\overline{AD}$, equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

(b) Localice R, un punto equidistante de A, B y C. Enseguida localice S, un punto equidistante de B, C y D.

(c) Localice T, un punto equidistante de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$. Enseguida localice U, un punto equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

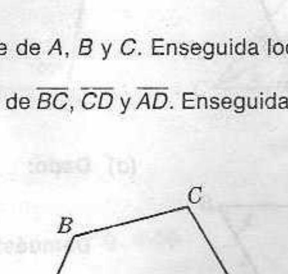


Fig. 4-66

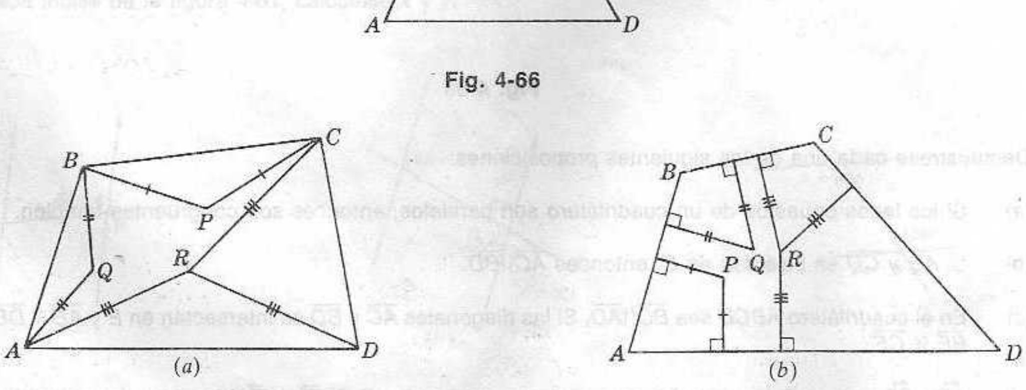


Fig. 4-67

En cada inciso de la figura 4-67, describa P, Q y R como puntos equidistantes y localícelos en un bisector.

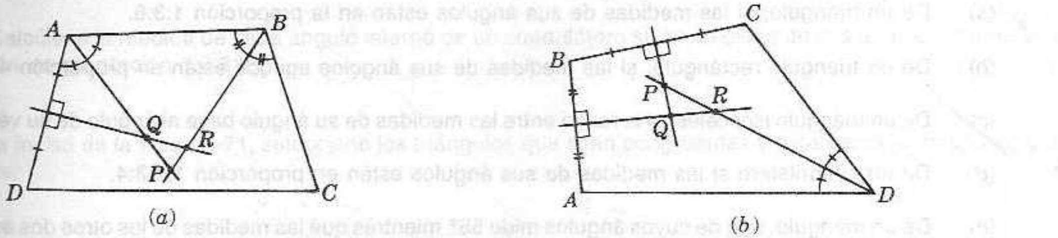
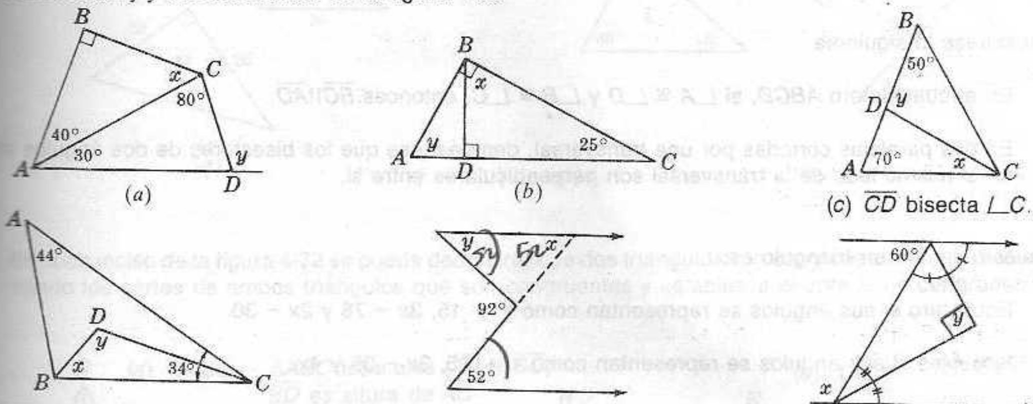


Fig.4-68

En cada inciso de la figura 4-68, describa P, Q y R como puntos equidistantes. (4.9)

Calcúlese x y y en cada inciso de la figura 4-69. (4.11)

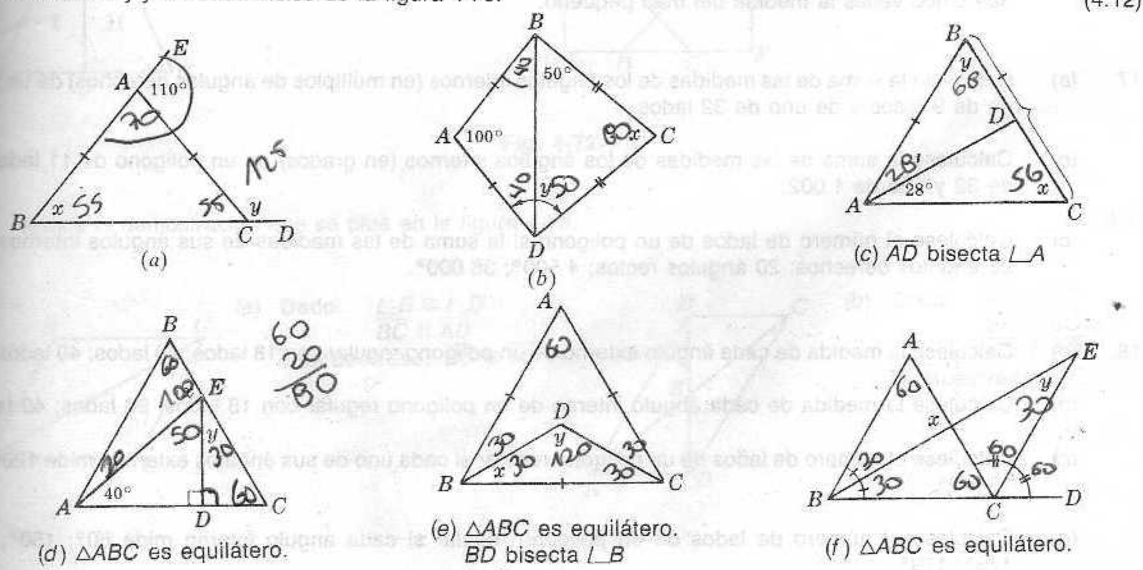


(c) $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$.

(d) $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$, $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$

Fig. 4-69

Calcúlese x y y en cada inciso de la figura 4-70. (4.12)



(c) $\overline{AD}$ bisecta $\angle A$

(d) $\triangle ABC$ es equilátero.

(e) $\triangle ABC$ es equilátero. $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$ $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$

(f) $\triangle ABC$ es equilátero.

Fig. 4-70

14. Calcúlese la medida de cada ángulo. (4.1

(*a*) De un triángulo, si las medidas de sus ángulos están en la proporción 1:3:6.

(*b*) De un triángulo rectángulo, si las medidas de sus ángulos agudos están en proporción 4:5.

(*c*) De un triángulo isósceles, si la razón entre las medidas de su ángulo base al ángulo de su vértice es de 1:

(*d*) De un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos están en proporción 1:2:3:4.

(*e*) De un triángulo, uno de cuyos ángulos mide 55° mientras que las medidas de los otros dos están en propo ción 2:3.

(*f*) De un triángulo, si la razón entre las medidas de sus ángulos externos es de 2:3:4.

15. Demuéstrese lo siguiente: (4.1

(*a*) En el cuadrilátero *ABCD*, si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

(*b*) En dos paralelas cortadas por una transversal, demuéstrese que los bisectores de dos ángulos interno en el mismo lado de la transversal son perpendiculares entre sí.

16. Demuéstrese que un triángulo es:

(*a*) Equilátero si sus ángulos se representan como $x + 15$, $3x - 75$ y $2x - 30$.

(*b*) Isósceles si sus ángulos se representan como $x + 15$, $3x - 35$ y $4x$.

(*c*) Rectángulo si las medidas de sus ángulos están en la proporción 2:3:5.

(*d*) Un triángulo obtuso si uno de sus ángulos mide 64° y el más grande de los otros dos mide 10° meno que cinco veces la medida del más pequeño.

17. (*a*) Calcúlese la suma de las medidas de los ángulos internos (en múltiplos de ángulos derechos) de un políg no de 9 lados y de uno de 32 lados. (4.1

(*b*) Calcúlese la suma de las medidas de los ángulos internos (en grados) de un polígono de 11 lados; un de 32 y uno de 1 002.

(*c*) Calcúlese el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es d 28 ángulos derechos; 20 ángulos rectos; 4 500°; 36 000°.

18. (*a*) Calcúlese la medida de cada ángulo externo de un polígono regular con 18 lados; 20 lados; 40 lados. (4.1

(*b*) Calcúlese la medida de cada ángulo interno de un polígono regular con 18 lados; 20 lados; 40 lados.

(*c*) Calcúlese el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide 120°; 40° 18°; 2°.

(*d*) Calcúlese el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide 60°; 150°; 170° 175°; 179°.

19. (a) Calcúlese cada ángulo interno de un cuadrilátero si éstos se representan como $x - 5$, $x + 20$, $2x - 45$ y $2x - 30$. (4.17)

(b) Calcúlese la medida de cada ángulo interno de un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos externos están en proporción 1:2:3:3.

20. En cada inciso de la figura 4-71, seleccione los triángulos que sean congruentes y establezca el criterio de congruencia. (4.18)

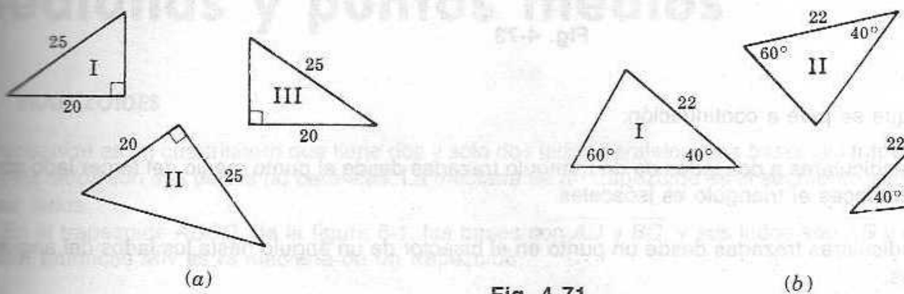
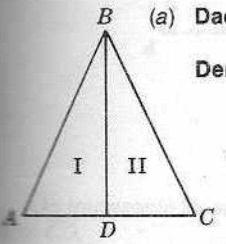
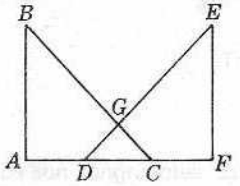


Fig. 4-71

21. En cada inciso de la figura 4-72 se puede demostrar que dos triángulos son congruentes. Haga un diagrama mostrando las partes de ambos triángulos que son congruentes y establezca el criterio de congruencia. (4.19)



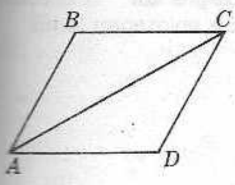
(a) **Dado:** $\triangle ABC$ isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$)
$\overline{BD}$ es altura de $\overline{AC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$.



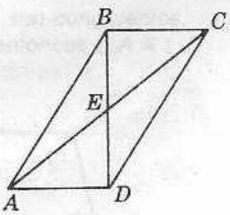
(b) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{EF}$
$\overline{AB} \perp \overline{AF}$, $\overline{EF} \perp \overline{AF}$
$\overline{DG} \cong \overline{GC}$
Demuéstrese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Fig. 4-72

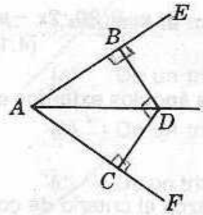
22. Realice la demostración que se pide en la figura 4-73. (4.20)



(a) **Dado:** $\angle B \cong \angle D$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

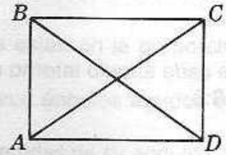


(b) **Dado:** $\overline{AE} \cong \overline{EC}$
$\overline{BD} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{ED}$



(*c*) **Dado:** $\overline{BD} \cong \overline{DC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AE}$
$\overline{DC} \perp \overline{AF}$

Demuéstrese: $\overline{AG}$ bisecta $\angle A$



(*d*) **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
$\overline{AB} \perp \overline{AD}$
$\overline{CD} \perp \overline{AD}$

Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Fig. 4-73

23. Demuéstrese lo que se pide a continuación: (4.21)

(*a*) Si las perpendiculares a dos lados de un triángulo trazadas desde el punto medio del tercer lado son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

(*b*) Las perpendiculares trazadas desde un punto en el bisector de un ángulo hasta los lados del ángulo, son congruentes.

(*c*) Si las alturas a dos de los lados de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

(*d*) Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y el ángulo agudo de uno de ellos son congruentes con las partes correspondientes del otro.

5

Paralelogramos, trapezoides, medianas y puntos medios

5.1 TRAPEZOIDES

Un *trapezoide* es un cuadrilátero que tiene dos y sólo dos lados paralelos. Las *bases* del trapezoide son sus lados paralelos; los *lados* son sus partes no paralelas. La *mediana* de un trapezoide es el segmento que une a los puntos medios de sus lados.

En el trapezoide $ABCD$, de la figura 5-1, las bases son $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, y sus lados son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si M y N son puntos medios, entonces $\overline{MN}$ es la mediana de un trapezoide.

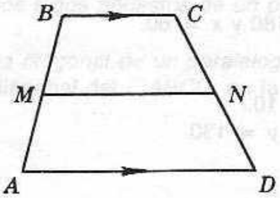
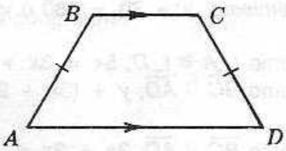


Fig. 5-1



Trapezoide isósceles

Fig. 5-2

Un *trapezoide isósceles* es un trapezoide cuyos lados son congruentes. En el trapezoide $ABCD$, en la figura 5-2, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Los *ángulos base* de un trapezoide son los ángulos de los extremos de la base mayor: $\angle A$ y $\angle D$ son los ángulos de la base del trapezoide isósceles $ABCD$.

5.1A Principios sobre Trapezoides

PRINCIPIO 1: *los ángulos base de un trapezoide isósceles, son congruentes.*

En el trapezoide $ABCD$, en la figura 5-3, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\angle A \cong \angle D$

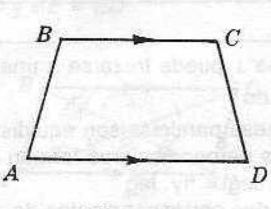


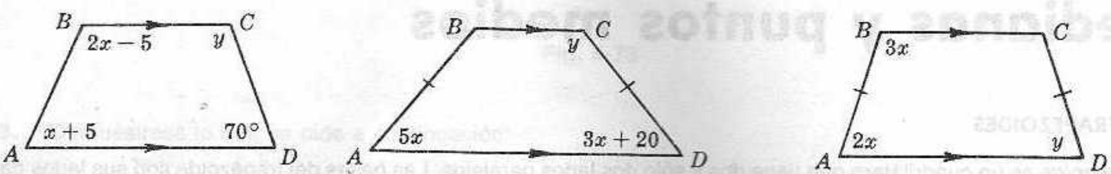
Fig. 5-3

Principio 2: *si los ángulos base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es isósceles.* En la figura 5-3, si $\angle A \cong \angle D$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1 Álgebra aplicada a Trapezoides

En cada uno de los trapezoides, en la figura 5-4, calcule x y y.



(*a*) *ABCD* es un trapezoide (*b*) *ABCD* es un trapezoide isósceles (*c*) *ABCD* es un trapezoide isósceles

Fig. 5-4

Soluciones

(*a*) Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $(2x - 5) + (x + 5) = 180$; entonces $3x = 180$ y $x = 60$. Asimismo, $y + 70 = 180$ o $y = 110$.

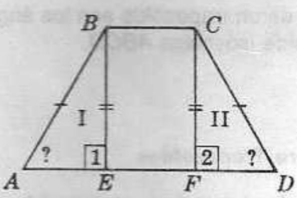
(*b*) Como $\angle A \cong \angle D$, $5x = 3x + 20$, por lo que $2x = 20$ o $x = 10$. Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $y + (3x + 20) = 180$, así $y + 50 = 180$ o $y = 130$.

(*c*) Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $3x + 2x = 180$ o $x = 36$. Como $\angle D \cong \angle A$, $y = 2x$ o $y = 72$.

5.2 Demostración de un Principio sobre Trapezoides Expresado en Palabras

Demostrar que los ángulos base de un trapezoide son congruentes.

Dado: el trapezoide isósceles *ABCD* ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle D$
Plan: Trace $\perp$s a la base desde *B* y *C*. demuéstrese $\triangle \text{I} \cong \text{II}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{AD}$	1. Una $\perp$ puede trazarse a una línea desde un punto exterior.
2. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	2. Dado
3. $\overline{BE} \cong \overline{CF}$	3. Líneas paralelas son equidistantes en todo lugar.
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. Las perpendiculares forman $\angle$s. Todos los $\angle$s son congruentes.
5. $\triangle \text{I} \cong \triangle \text{II}$	5. hy. leg $\cong$ hy. leg
6. $\angle A \cong \angle D$	6. Partes correspondientes de $\triangle$s son congruentes.

5.2 PARALELOGRAMOS

Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. El símbolo de paralelogramo es ▱. Así en el ▱$ABCD$ en la figura 5-5, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

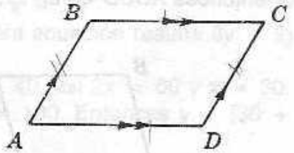


Fig. 5-5

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces éste es un paralelogramo. (Éste es el converso de la definición anterior.) Así si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un ▱.

5.2A Principios que incluyen propiedades de los paralelogramos

PRINCIPIO 1: *los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.* (Ésta es la definición.)

PRINCIPIO 2: *la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.*
$\overline{BD}$ es la diagonal del ▱$ABCD$, en la figura 5-6, por lo que $\triangle I \cong \triangle II$.

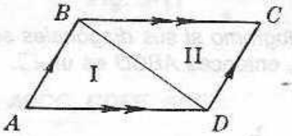


Fig. 5-6

PRINCIPIO 3: *los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.*
En el ▱$ABCD$ de la figura 5-5, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

PRINCIPIO 4: *los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.*
En el ▱$ABCD$, $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$.

PRINCIPIO 5: *los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.*
En el ▱$ABCD$, $\angle A$ es el suplemento de $\angle B$ y también de $\angle D$.

PRINCIPIO 6: *las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.*
En el ▱$ABCD$, en la figura 5-7, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{ED}$.

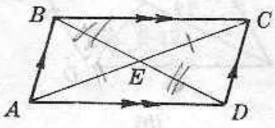


Fig. 5-7

5.2B Demostración de que un cuadrilátero es un paralelogramo

Principio 7: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos.*
Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 8: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son congruentes.*
Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

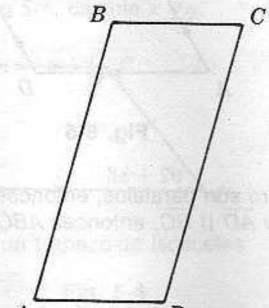


Fig. 5-8

Principio 9: *un cuadrilátero es un paralelogramo si dos de sus lados son congruentes y paralelos.*
Si $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 10: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son congruentes.*
Si $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$ en la figura 5-8, entonces $ABCD$ es un $\square$.

Principio 11: *un cuadrilátero es un paralelogramo si sus diagonales se bisectan entre sí.*
Si $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{ED}$ en la figura 5-9, entonces $ABCD$ es un $\square$.

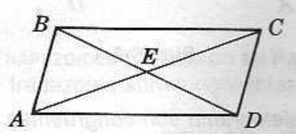
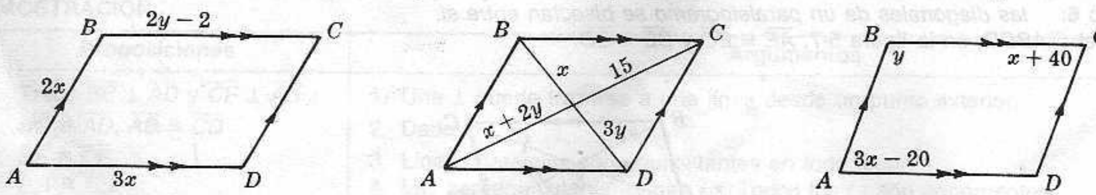


Fig. 5-9

PROBLEMAS RESUELTOS

5.3 Aplicación de Propiedades de los Paralelogramos

Suponiendo que $ABCD$ es un paralelogramo, calcule x y y en cada uno de los incisos de la figura 5-10.



(*a*) Perímetro = 40. (*b*) (*c*)

Fig. 5-10

Soluciones

(*a*) Por el principio 3, $BC = AD = 3x$ y $CD = AB = 2x$; entonces $2(2x + 3x) = 40$, de modo que $10x = 40$ o $x = 4$.
Por el principio 3, $2y - 2 = 3x$; entonces $2y - 2 = 3(4)$, de modo que $2y = 14$ o $y = 7$.

(*b*) Por el principio 6, $x + 2y = 15$ y $x = 3y$.
Sustituyendo $3y$ por x en la primera ecuación resulta $3y + 2y = 15$ o $y = 3$. Entonces $x = 3y = 9$.

(*c*) Por el principio 4, $3x - 20 = x + 40$, así $2x = 60$ y $x = 30$.
Por el principio 5, $y + (x + 40) = 180$. Entonces $y + (30 + 40) = 180$ o $y = 110$.

5.4 Aplicación del Principio 7 en la Determinación de Paralelogramos

Identifique los paralelogramos en cada uno de los incisos de la figura 5-11.

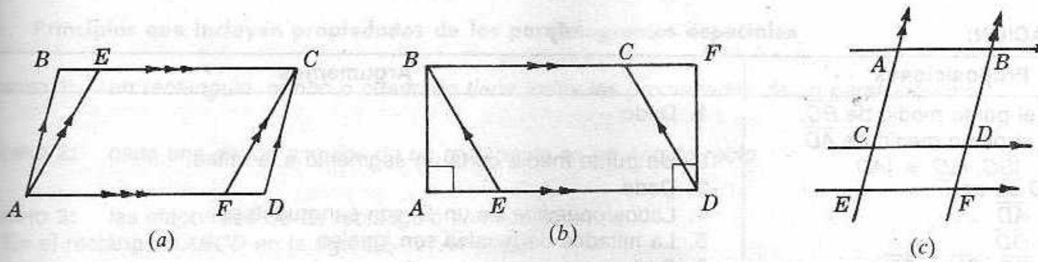


Fig. 5-11

Soluciones

(*a*) *ABCD*, *AECF*; (*b*) *ABFD*, *BCDE*; (*c*) *ABDC*, *CDFE*, *ABFE*.

5.5 Aplicación de los Principios 9, 10 y 11

Explique por qué *ABCD* es un paralelogramo en cada uno de los incisos de la figura 5-12.

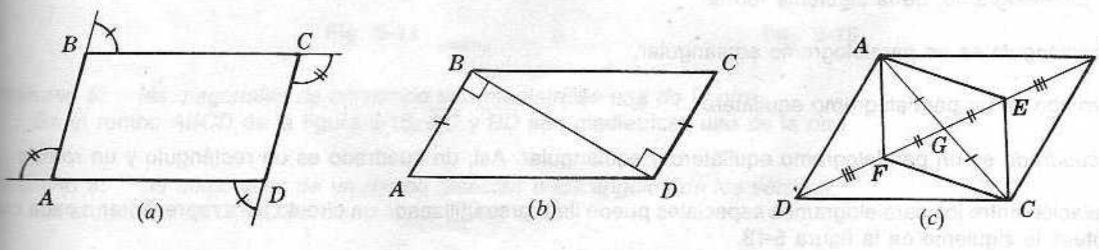


Fig. 5-12

Soluciones

(*a*) Como los suplementos de ángulos congruentes son congruentes, los ángulos opuestos de *ABCD* son congruentes. Por el principio 10, *ABCD* es un paralelogramo.

(*b*) Como las perpendiculares a una misma línea son paralelas, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Entonces, por el principio 9, *ABCD* es un paralelogramo.

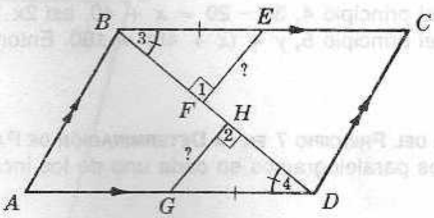
(*c*) Por el axioma de adición, $\overline{DG} \cong \overline{GB}$. Entonces, por el principio 11, *ABCD* es un paralelogramo.

5.6 Resolución de Problemas sobre Paralelogramos

Dado: $\square ABCD$
E es el punto medio de $\overline{BC}$.
G es el punto medio de $\overline{AD}$.
$\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{GH} \perp \overline{BD}$

Demuéstrese: $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

Plan: demuéstrese $\triangle BFE \cong \triangle GHD$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. *E* es el punto medio de $\overline{BC}$. *G* es el punto medio de $\overline{AD}$.	1. Dado
2. $BE = \frac{1}{2}BC$, $GC = \frac{1}{2}AD$	2. Un punto medio corta un segmento a la mitad.
3. *ABCD* es un $\square$.	3. Dado
4. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	4. Lados opuestos de un $\square$ son congruentes.
5. $\overline{BE} \cong \overline{GD}$	5. La mitades de iguales son iguales.
6. $\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{GH} \perp \overline{BD}$	6. Dado
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las perpendiculares forman $\angle$s rectos. $\angle$s rectos son congruentes.
8. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	8. Lados opuestos de un $\square$ son $\parallel$.
9. $\angle 3 \cong \angle 4$	9. $\angle$s alternos internos de líneas $\parallel$ son $\cong$.
10. $\triangle BFE \cong \triangle GHD$	10. s.a.a. $\cong$ s.a.a.
11. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$	11. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son $\cong$.

5.3 PARALELOGRAMOS ESPECIALES: RECTÁNGULO, ROMBO, CUADRADO

5.3A Definiciones y relaciones entre paralelogramos especiales

Los rectángulos, rombos y cuadrados pertenecen al conjunto de los paralelogramos. Cada uno de éstos puede definirse como un paralelogramo, de la siguiente forma:

1. Un *rectángulo* es un paralelogramo equiangular.
2. Un *rombo* es un paralelogramo equilátero.
3. Un *cuadrado* es un paralelogramo equilátero y equiangular. Así, un cuadrado es un rectángulo y un rombo.

La relación entre los paralelogramos especiales puede ilustrarse utilizando un círculo para representar a cada conjunto. Nótese lo siguiente en la figura 5-13.

1. Como todo rectángulo y todo rombo debe ser un paralelogramo, los círculos para el conjunto de rectángulos y para el conjunto de rombos deben estar dentro del círculo para el conjunto de paralelogramos.
2. Como todo cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo, la intersección indicada por la sección sombreada debe representar un conjunto de cuadrados.

Fig. 5-13

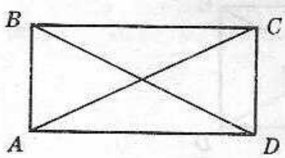
5.3B Principios que incluyen propiedades de los paralelogramos especiales

PRINCIPIO 1: *un rectángulo, rombo o cuadrado tiene todas las propiedades de un paralelogramo.*

PRINCIPIO 2: *cada uno de los ángulos de un rectángulo es un ángulo recto.*

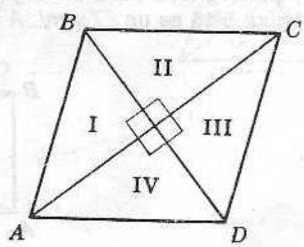
PRINCIPIO 3: *las diagonales de un rectángulo son congruentes.*
En el rectángulo *ABCD* en la figura 5-14, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

PRINCIPIO 4: *todos los lados de un rombo son congruentes.*



Rectángulo

Fig. 5-14



Rombo

Fig. 5-15

PRINCIPIO 5: *las diagonales de un rombo son mediatrices una de la otra.*
En el rombo *ABCD* de la figura 5-15, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son mediatrices una de la otra.

PRINCIPIO 6: *las diagonales de un rombo bisectan a los ángulos de los vértices.*
En el rombo *ABCD*, $\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle A$ Y $\angle C$.

PRINCIPIO 7: *las diagonales de un rombo forman triángulos congruentes.*
Así, en el rombo *ABCD*, $\triangle I \cong \triangle II \cong \triangle III \cong \triangle IV$.

PRINCIPIO 8: *un cuadrado tiene a la vez las propiedades de los rombos y las de los rectángulos.*
Por definición, un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo.

5.3C Propiedades de las Diagonales de Paralelogramos, Rectángulos, Rombos y Cuadrados

Cada flecha en la tabla siguiente, indica una propiedad de la diagonal de la figura.

Propiedades de las diagonales	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Las diagonales se bisectan entre sí.	√	√	√	√
Las diagonales son congruentes.		√		√
Las diagonales son perpendiculares.			√	√
Las diagonales bisectan los ángulos del vértice.			√	√
Las diagonales forman 2 pares de triángulos congruentes.	√	√	√	√
Las diagonales forman 4 triángulos congruentes.			√	√

5.3D Demostración de que un paralelogramo es un rectángulo, rombo o cuadrado

Demostración de que un paralelogramo es un rectángulo

La definicion básica o mínima de un rectángulo es ésta: un *rectángulo es un paralelogramo que tiene un ángulo recto.* Como los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios; si uno de los ángulos es un ángulo recto, los ángulos restantes deben ser ángulos rectos.

El converso de esta definición básica proporciona un método útil para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo y es la siguiente:

PRINCIPIO 9: *si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.*
Si *ABCD* en la figura 5-16 es un $\square$ y $m\angle A = 90°$, entonces *ABCD* es un rectángulo.

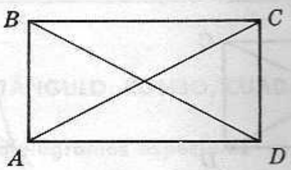


Fig. 5-16

PRINCIPIO 10: *si un paralelogramo tiene diagonales congruentes, entonces es un rectángulo.*
Si *ABCD* es un $\square$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, entonces *ABCD* es un rectángulo.

Demostración de que un paralelogramo es un rombo

La definición básica o mínima de rombo es ésta: *un rombo es un paralelogramo que tiene dos lados adyacentes congruentes.*

El converso de esta definición básica proporciona un método útil para demostrar que un paralelogramo es un rombo y es el siguiente:

PRINCIPIO 11: *si un paralelogramo tiene lados adyacentes congruentes, entonces es un rombo.*
En la figura 5-17 si *ABCD* es un $\square$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces *ABCD* es un rombo.

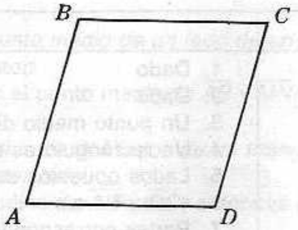


Fig.5-17

Demostración de que un paralelogramo es un cuadrado

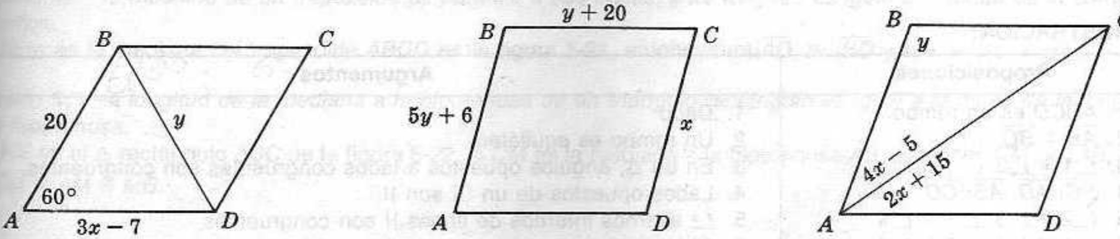
PRINCIPIO 12: *si un paralelogramo tiene un ángulo recto y dos lados adyacentes congruentes, entonces es un cuadrado.*

Esto resulta del hecho de que un cuadrado es a la vez un rectángulo y un rombo.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.7 ÁLGEBRA APLICADA A LOS ROMBOS

Supóngase que *ABCD* es un rombo, calcule *x* y *y* para cada una de las secciones de la figura 5-18.



(a) (b) (c)

Fig. 5-18

Soluciones

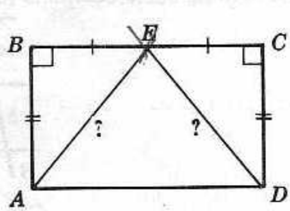
(*a*) Como $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $3x - 7 = 20$ o $x = 9$. Como $\triangle ABD$ es equiangular éste es equilátero, de aquí $y = 20$.

(*b*) Como $\overline{BC} \cong \overline{AB}$, $5y + 6 = y + 20$ o $y = 3\frac{1}{2}$. Como $\overline{CD} \cong \overline{BC}$, $x = y + 20$ o $x = 23\frac{1}{2}$.

(*c*) Como $\overline{AC}$ bisecta al $\angle A$, $4x - 5 = 2x + 15$ o $x = 10$. Entonces, $2x + 15 = 35$ y $m\angle A = 2(35°) = 70°$. Como $\angle B$ y $\angle A$ son suplementarios, $y + 70 = 180$ o $y = 110$.

5.8 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE PARALELOGRAMOS ESPECIALES

Dado: el rectángulo *ABCD*
E el punto medio de $\overline{BC}$.
Demuéstrese: $\overline{AE} \cong \overline{ED}$
Plan: demuéstrese que $\triangle AEB \cong \triangle CED$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $ABCD$ es un rectángulo.	1. Dado
2. E es el punto medio de $\overline{BC}$.	2. Dado
3. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$	3. Un punto medio divide una línea en dos partes congruentes.
4. $\angle B \cong \angle C$	4. Un rectángulo es equiangular.
5. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	5. Lados opuestos de un ▱ son congruentes.
6. $\triangle AEB \cong \triangle CED$	6. s.a.s. $\cong$ s.a.s.
7. $\overline{AE} \cong \overline{ED}$	7. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son congruentes.

5.9 Resolución de Problemas sobre Paralelogramos Especiales Expresados en Palabras

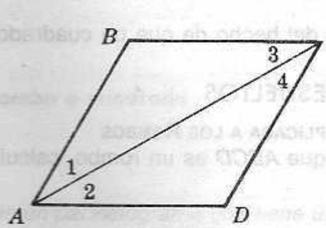
Demuéstrese que la diagonal de un rombo bisecta cada uno de los ángulos por los que pasa.

Solución

Dado: Rombo $ABCD$
$\overline{AC}$ es una diagonal

Demuéstrese: AC bisecta al $\angle A$ y al $\angle C$.

Plan: demuéstrese (1) $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes con $\angle 3$.
(2) $\angle 3$ y $\angle 4$ son congruentes con $\angle 1$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $ABCD$ es un rombo.	1. Dado
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	2. Un rombo es equilátero.
3. $\angle 1 \cong \angle 3$	3. En un $\triangle$, ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.
4. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	4. Lados opuestos de un ▱ son $\parallel$.
5. $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 4$	5. $\angle$s alternos internos de líneas $\parallel$ son congruentes.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$	6. Objetos congruentes con un mismo objeto son congruentes entre sí.
7. $\overline{AC}$ bisecta al $\angle A$ y al $\angle C$	7. Dividir en dos partes congruentes es bisectar.

5.4 TRES O MÁS PARALELAS; MEDIANAS Y PUNTOS MEDIOS

5.4A Tres o más paralelas

Principio 1: *si tres o más paralelas cortan segmentos congruentes de una línea transversal, entonces cortan segmentos congruentes de cualquier otra línea transversal.*

Si en la figura 5-19 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, y los segmentos a y b de la línea transversal $\overleftrightarrow{AB}$ son congruentes, entonces los segmentos c y d de la línea transveral $\overleftrightarrow{CD}$ son congruentes.

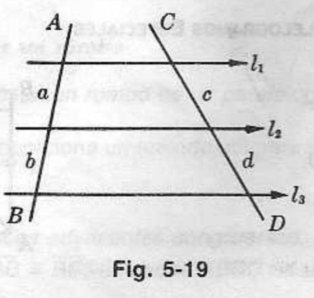


Fig. 5-19

5.4B Principios sobre puntos medios y medianas de triángulos y trapezoides

PRINCIPIO 2: *si se traza una línea desde el punto medio de un lado de un triángulo, paralela al segundo lado, entonces ésta pasa por el punto medio del tercer lado.*

Así, en el $\triangle ABC$, de la figura 5-20, si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, entonces N es el punto medio de $\overline{BC}$.

PRINCIPIO 3: *si una línea une los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces ésta es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad del largo del tercer lado.*

En el $\triangle ABC$, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $MN = \frac{1}{2}AC$.

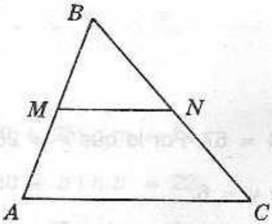


Fig. 5-20

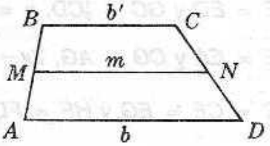


Fig. 5-21

PRINCIPIO 4: *la mediana de un trapezoide es paralela a sus bases, y su longitud es igual a la mitad de la suma de sus lados.*

Si m es la mediana del trapezoide $ABCD$ en la figura 5-21, entonces $m \parallel \overline{AD}$, $m \parallel \overline{BC}$ y $mn = \frac{1}{2}(b + b')$.

PRINCIPIO 5: *la longitud de la mediana a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.*

Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 5-22, si $\overline{CM}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$, entonces $CM = \frac{1}{2}AB$; esto es, $\overline{CM} \cong \overline{AM} \cong \overline{MB}$.

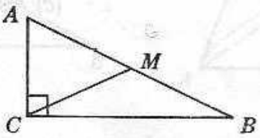


Fig. 5-22

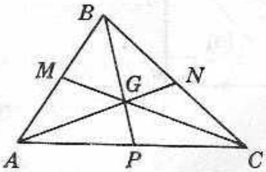


Fig. 5-23

PRINCIPIO 6: *las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que está a dos tercios de la distancia que hay desde cualquier vértice al punto medio del lado opuesto.*

Así si $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CM}$ son las medianas del $\triangle ABC$ en la figura 5-23, entonces éstas se intersectan en el punto G el cual está a dos tercios de la distancia desde A a N, B a P y C a M.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.10 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 1 A TRES O MÁS PARALELAS

Calcule x y y en cada una de las secciones de la figura 5-24.

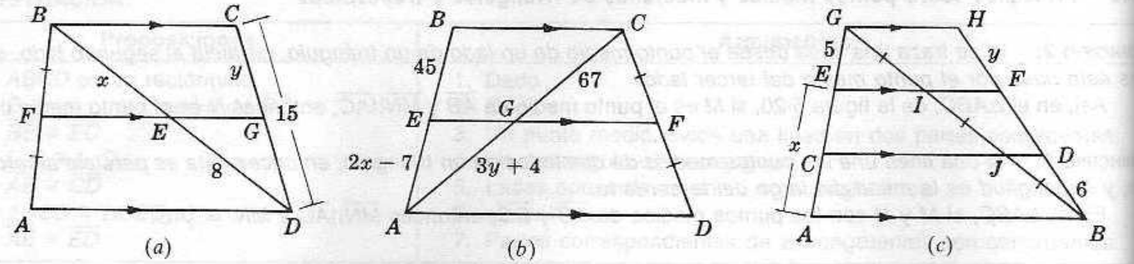


Fig. 5-24

Soluciones

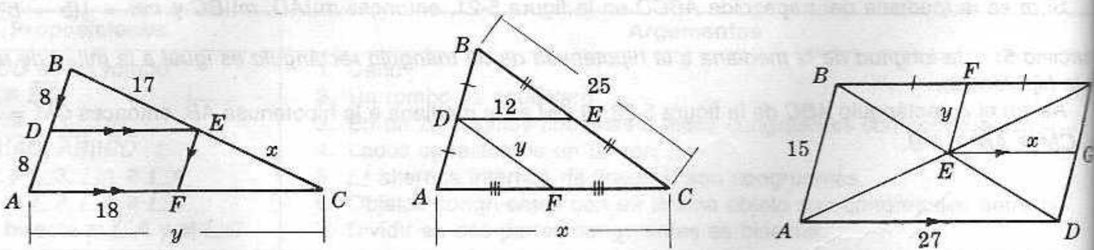
(*a*) Como $BE = ED$ y $GC = \frac{1}{2}CD$, $x = 8$ y $y = 7\frac{1}{2}$.

(*b*) Como $BE = EA$ y $CG = AG$, $2x - 7 = 45$ y $3y + 4 = 67$. Por lo que $x = 26$ y $y = 21$.

(*c*) Como $AC = CE = EG$ y $HF = FD = DB$, $x = 10$ y $y = 6$.

5.11 Aplicación de los Principios 2 y 3

Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-25.



(*a*) (*b*) (*c*) *ABCD* es un paralelogram

Fig. 5-25

Soluciones

(*a*) Por el principio 2, *E* es el punto medio de $\overline{BC}$ y *F* es el punto medio de $\overline{AC}$. Por lo que $x = 17$ y $y = 3$

(*b*) Por el principio 3, $DE = \frac{1}{2}AC$ y $DF = \frac{1}{2}BC$. Por lo que $x = 24$ y $y = 12\frac{1}{2}$.

(*c*) Como *ABCD* es un paralelogramo, *E* es el punto medio de $\overline{AC}$. Entonces por el principio 2, *G* es el pu medio de $\overline{CD}$.
Por el principio 3, $x = \frac{1}{2}(27) = 13\frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}(15) = 7\frac{1}{2}$.

5.12 Aplicación del Principio 4 a la Mediana de un Trapezoide

Si $\overline{MP}$ es la mediana del trapezoide *ABCD* en la figura 5-26,

(*a*) Calcule m si $b = 20$ y $b' = 28$.

(b) Calcule b' si $b = 30$ y $m = 26$.

(c) Calcule b si $b' = 35$ y $m = 40$.

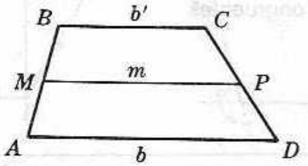


Fig. 5-26

Soluciones

(a) $m = \frac{1}{2}(20 + 28)$ o $m = 24$

(b) $26 = \frac{1}{2}(30 + b')$ o $b' = 22$

(c) $40 = \frac{1}{2}(b + 35)$ o $b = 45$

5.23 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 5 Y 6 A LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

Calcule x y y en cada uno de los casos de la figura 5-27.

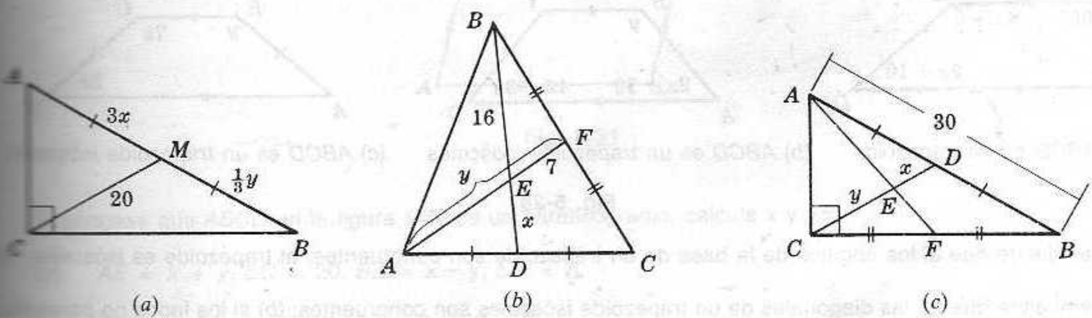


Fig. 5-27

Soluciones

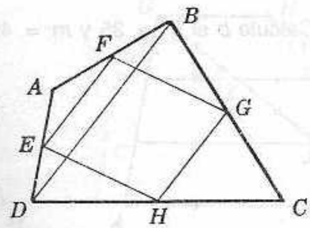
(a) Como $AM = MB$, $\overline{CM}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces por el principio 5, $3x = 20$ y $\frac{1}{3}y = 20$. De aquí $x = 6\frac{2}{3}$ y $y = 60$.

(b) $\overline{BD}$ y $\overline{AF}$ son medianas del $\triangle ABC$. Entonces por el principio 6, $x = \frac{1}{2}(16) = 8$ y $y = 3(7) = 21$.

(c) $\overline{CD}$ es la mediana a la hipotenusa $\overline{AB}$; entonces por el principio 5, $CD = 15$.
$\overline{CD}$ y $\overline{AF}$ son medianas del $\triangle ABC$; entonces por el principio 6, $x = \frac{1}{3}(15) = 5$ y $y = \frac{2}{3}(15) = 10$.

5.14 Resolución de Problemas sobre el Punto Medio

Dado: el cuadrilátero $ABCD$
E, F, G y H puntos medios de
$\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.
Demuéstrese: $EFGH$ es un ▱.
Plan: demuéstrese que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son congruentes y paralelos.

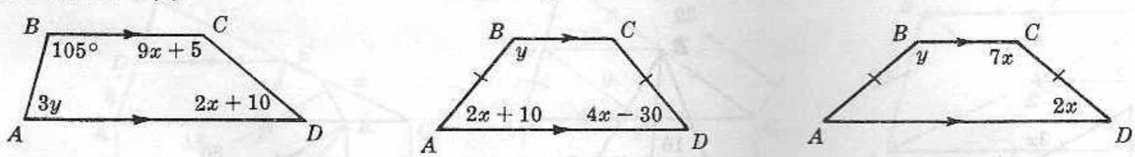


DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BD}$.	1. Puede trazarse un segmento entre dos puntos cualesquiera.
2. E, F, G y H son puntos medios.	2. Dado.
3. $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ y $\overline{GH} \parallel \overline{BD}$ $EF = \frac{1}{2}BD$, $GH = \frac{1}{2}BD$	3. Una línea que une los puntos medios de dos lados de un △ es paralela al tercer lado, y su longitud es igual a la mitad del tercer lado.
4. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$	4. Dos líneas paralelas a una tercera línea son paralelas entre sí.
5. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$	5. Los segmentos con la misma longitud son congruentes.
6. $EFGH$ es un ▱	6. Si dos lados de un cuadrilátero son $\cong$ y $\parallel$, el cuadrilátero es un ▱.

Problemas complementarios

1. Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-28. (5.1)



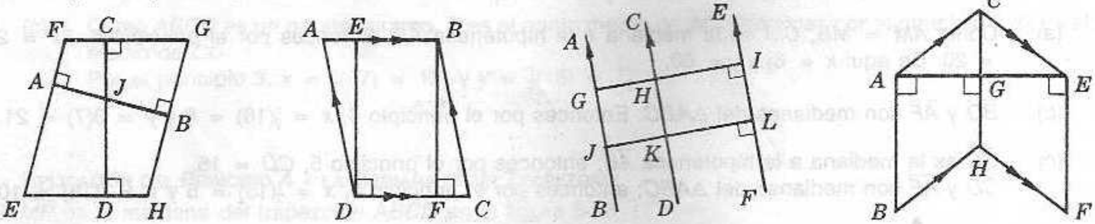
(*a*) $ABCD$ es un trapezoide (*b*) $ABCD$ es un trapezoide isósceles (*c*) $ABCD$ es un trapezoide isósceles

Fig. 5-28

2. Demuestre que si los ángulos de la base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es isósceles. (5.2

3. Demuestre que (*a*) las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes; (*b*) si los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un trapezoide isósceles se extienden hasta que se intersecten en E, el triángulo ADE formado de esta forma es isósceles. (5.2

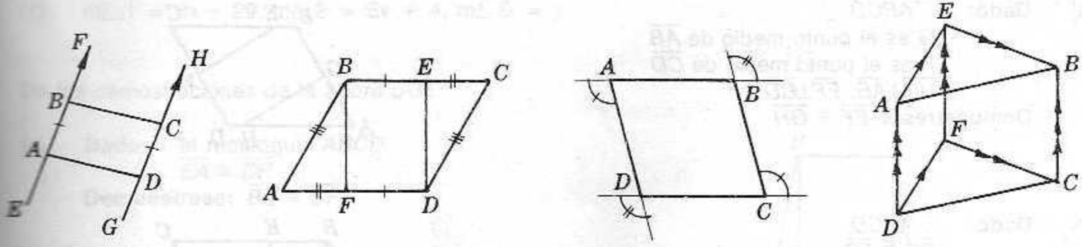
4. Identifique los paralelogramos en cada parte de la figura 5-29. (5.4



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Fig. 5-29

5. Explique por qué $ABCD$, en cada uno de los casos de la figura 5-30, es un paralelogramo. (5.5)



(a) (b) (c) (d)

Fig. 5-30

6. Supóngase que $ABCD$ en la figura 5-31 es un paralelogramo, calcule x y y si: (5.3)

(a) $AD = 5x$, $AB = 2x$, $CD = y$, perímetro $= 84$.

(b) $AB = 2x$, $BC = 3y + 8$, $CD = 7x - 25$, $AD = 5y - 10$

(c) $m\angle A = 4y - 60$, $m\angle C = 2y$, $m\angle D = x$

(d) $m\angle A = 3x$, $m\angle B = 10x - 15$, $m\angle C = y$

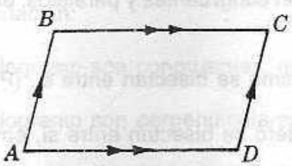


Fig. 5-31

7. Supóngase que $ABCD$ en la figura 5-32 es un paralelogramo, calcule x y y si:

(a) $AE = x + y$, $EC = 20$, $BE = x - y$, $ED = 8$

(b) $AE = x$, $EC = 4y$, $BE = x - 2y$, $ED = 9$

(c) $AE = 3x - 4$, $EC = x + 12$, $BE = 2y - 7$, $ED = x - y$

(d) $AE = 2x + y$, $AC = 30$, $BE = x + y$, $BD = 24$

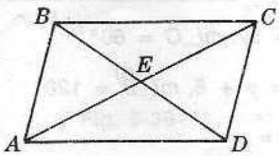


Fig. 5-32

8. Haga las demostraciones que se piden en la figura 5-33.

(*a*) **Dado:** $\square ABCD$
G es el punto medio de $\overline{AB}$
F es el punto medio de $\overline{CD}$
$\overline{HG} \perp \overline{AB}$, $\overline{EF} \perp \overline{CD}$
Demuéstrese: $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

(*b*) **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BE} \cong \overline{FD}$
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{ED}$

(*c*) **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BF}$ bisecta al $\angle B$,
$\overline{ED}$ bisecta al $\angle D$.
Demuéstrese: $\overline{BF} \cong \overline{ED}$

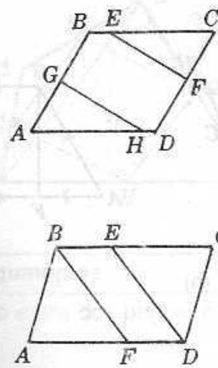


Fig. 5-33

9. Demuéstrese lo que se pide a continuación:

(*a*) Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. (Principio 3.)

(*b*) Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (Principio 8.)

(*c*) Si dos lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo. (Principio 9.)

(*d*) Las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí. (Principio 6.)

(*e*) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (Principio 11.)

10. Supóngase que *ABCD* en la figura 5-34 es un rombo, calcule *x* y *y* si: (5.7)

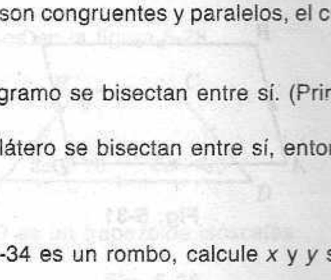


Fig. 5-34

(*a*) $BC = 35$, $CD = 8x - 5$, $BD = 5y$, $m\angle C = 60°$

(*b*) $AB = 43$, $AD = 4x + 3$, $BD = y + 8$, $m\angle B = 120°$

(*c*) $AB = 7x$, $AD = 3x + 10$, $BC = y$

(*d*) $AB = x + y$, $AD = 2x - y$, $BC = 12$

(*e*) $m\angle B = 130°$, $m\angle 1 = 3x - 10$, $m\angle A = 2y$

(*f*) $m\angle 1 = 8x - 29$, $m\angle 2 = 5x + 4$, $m\angle D = y$

11. De las demostraciones de la figura 5-35. (5.8)

(*a*) **Dado:** el rectángulo *ABCD*
$\overline{EA} \cong \overline{DF}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{CF}$

(*b*) **Dado:** el rectángulo *ABCD*
E, *F*, *G* y *H* son los puntos medios de los lados del rectángulo.
Demuéstrese: *EFGH* es un rombo.

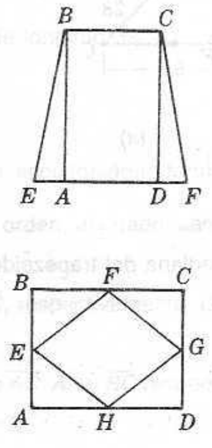


Fig. 5-35

12. Demuéstrese lo que se pide a continuación: (5.9)

(*a*) Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo.

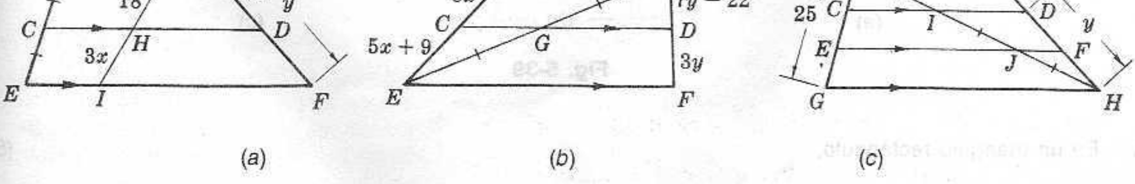
(*b*) Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.

(*c*) Si la diagonal de un paralelogramo bisecta al ángulo del vértice, entonces el paralelogramo es un rombo.

(*d*) Las diagonales de un rombo lo dividen en cuatro triángulos congruentes.

(*e*) Las diagonales de un cuadrado son congruentes.

13. Calcule *x* y *y* en cada uno de los casos de la figura 5-36. (5.10)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 5-36

14. Calcule x y y en cada uno de los casos en la figura 5-37. (5.11)

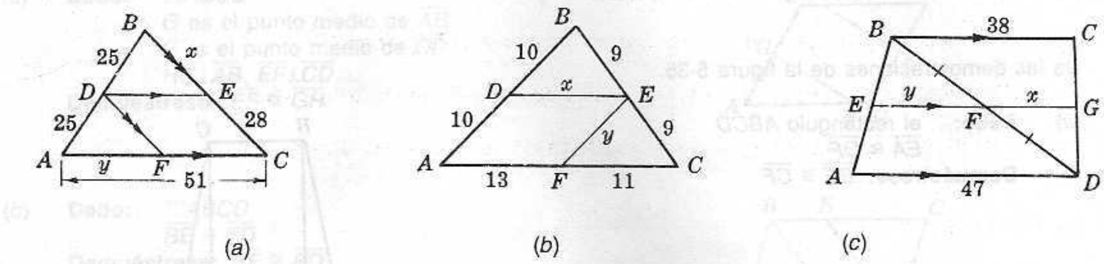


Fig. 5-37

15. Si $\overline{MP}$ es la mediana del trapezoide $ABCD$ en la figura 5-38, (5.12)

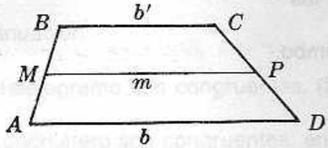


Fig. 5-38

(*a*) Calcule m si $b = 23$ y $b' = 15$.

(*b*) Calcule b' si $b = 46$ y $m = 41$.

(*c*) Calcule b si $b' = 51$ y $m = 62$.

16. Calcule x y y en cada uno de los casos de la figura 5-39. (5.11, 5.12)

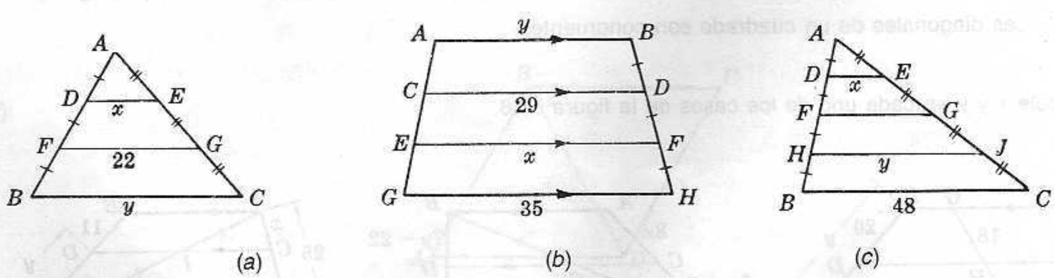


Fig. 5-39

17. En un triángulo rectángulo, (5.13)

(*a*) Calcule la longitud de la mediana a la hipotenusa cuya longitud es 45.

(*b*) Calcule la longitud de la hipotenusa si la longitud de su mediana es 35.

[illegible]. Si las medianas del $\triangle ABC$ se intersectan en D, (5.13)

(*a*) Calcule la longitud de la mediana cuyo segmento más corto es 7.

(*b*) Calcule la longitud de la mediana cuyo segmento más largo es 20.

(*c*) Calcule la longitud del segmento más corto de la mediana de longitud 42.

(*d*) Calcule la longitud del segmento más grande de la mediana de longitud 39.

[illegible]. Demuéstrese lo siguiente: (5.14)

(*a*) Si los puntos medios de los lados de un rombo se unen en orden, el cuadrilátero formado es un rectángulo.

(*b*) Si los puntos medios de los lados de un cuadrado se unen en orden, el cuadrilátero formado es un cuadrado.

(*c*) En el $\triangle ABC$, sean M, P y Q los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Demuestre que $QMPC$ es un paralelogramo.

(*d*) En el $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$. Si Q, M y P son los puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, demuestre que $QMPC$ es un rectángulo.

Círculos

6

6.1 EL CÍRCULO; RELACIONES CIRCULARES

Los siguientes términos están relacionados con el círculo. Aunque algunos de ellos ya han sido definidos con anterioridad se incluyen aquí por conveniencia.

Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. El símbolo para un círculo es $\odot$; para varios círculos es ⓢ.

La *circunferencia* de un círculo es la distancia alrededor del círculo. Tiene 360°.

Un *radio* del círculo es un segmento de línea que une el centro con algún punto sobre el círculo.

Nota: dado que todos los radios de un círculo determinado tienen la misma longitud, se usará algunas veces la palabra *radio* para indicar el número que es "la longitud del radio".

Un *ángulo central* es un ángulo formado por dos radios.

Un *arco* es una parte continua de un círculo. El símbolo para un arco es $\frown$. Un *semicírculo* es un arco que mide la mitad de la circunferencia de un círculo.

Un *arco menor* es un arco que es más pequeño que un semicírculo. Un *arco mayor* es uno que es más grande que un *semicírculo*.

Así, en la figura 6-1 el $\widehat{BC}$ es un arco menor y $\widehat{BAC}$ es un arco mayor. Se requieren tres letras para denotar un arco mayor.

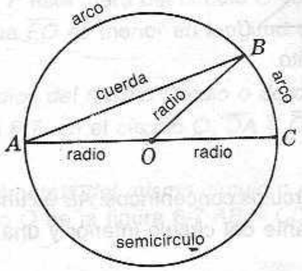


Fig. 6-1

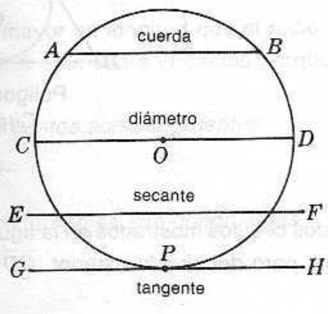


Fig. 6-2

Interceptar un arco implica aislar al arco.

Así en la figura 6-1, $\angle BAC$ y $\angle BOC$ interceptan a $\widehat{BC}$.

Una *cuerda* de un círculo es un segmento de línea que une dos puntos de la circunferencia.

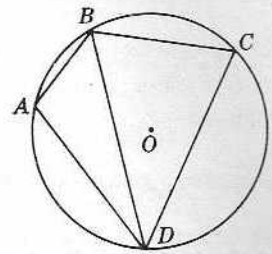
Así, en la figura 6-2, $\overline{AB}$ es una cuerda.

Un *diámetro* de un círculo es una cuerda que pasa a través de su centro. Una *secante* de un círculo es una línea que intercepta al círculo en dos puntos. Una *tangente* a un círculo es una línea que toca al círculo en uno y sólo un punto sin importar qué tanto se extienda la línea.

Así, en la figura 6-2, $\overline{CD}$ es un diámetro del círculo O, $\overleftrightarrow{EF}$ es una secante y $\overleftrightarrow{GH}$ es una tangente al círculo en P. P es el punto de contacto o punto de tangencia.

Un *polígono inscrito* es un polígono tal que todos sus lados son cuerdas de un círculo. Un *círculo circunscrito* es un círculo que pasa por todos los vértices de un polígono.

Así, en la figura 6-3, los $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ y el cuadrilátero $ABCD$ son polígonos inscritos en el círculo O. El círculo O es un círculo circunscrito sobre el cuadrilátero $ABCD$.



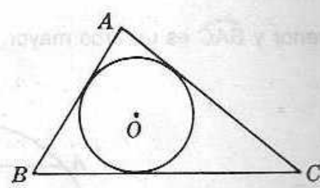
Polígonos inscritos
Círculo circunscrito

Fig. 6-3

Un polígono circunscrito es un polígono tal que todos sus lados son tangentes a un círculo. Un *círculo inscrito* es aquél para el que son tangentes todos los lados de un polígono.

Así, el $\triangle ABC$ es un polígono circunscrito del círculo O en la figura 6-4. El círculo O es un círculo inscrito en el $\triangle ABC$.

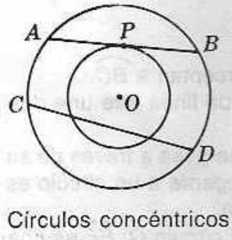
Círculos concéntricos son aquéllos que tienen el mismo centro.



Polígono circunscrito
Círculo inscrito

Fig. 6-4

De este modo, los dos círculos mostrados en la figura 6-5 son círculos concéntricos. $\overline{AB}$ es una tangente del círculo interior y es una cuerda, pero del círculo exterior. $\overline{CD}$ es una secante del círculo interior y una cuerda del exterior.



Círculos concéntricos

Fig. 6-5

Dos círculos son *iguales* si sus radios tienen la misma longitud. Dos círculos son *congruentes* si sus radios son congruentes.

Dos arcos son congruentes si tienen igual medida en grados e igual longitud. El símbolo $m\widehat{AC}$ denota la "medida del arco $\widehat{AC}$."

6.1A Principios relativos a los círculos

PRINCIPIO 1: *un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales.*

Así, el diámetro $\overline{AB}$ divide al círculo O de la figura 6-6 en dos semicírculos iguales, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADB}$.

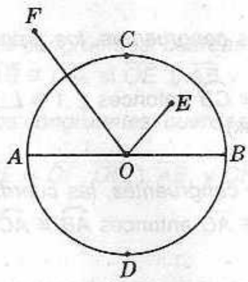


Fig. 6-6

PRINCIPIO 2: *si una cuerda divide a un círculo en dos partes iguales, entonces es un diámetro.* (Esto es el converso del principio 1.)

Así, si $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ en la figura 6-6, entonces $\overline{AB}$ es un diámetro.

PRINCIPIO 3: *un punto está fuera, sobre, o dentro de un círculo siempre que su distancia al centro del mismo sea, respectivamente, mayor que, igual a, o menor que el radio.*

En la figura 6-6, F está fuera del círculo O ya que $\overline{FO}$ es mayor en longitud que el radio. El punto E está dentro del círculo puesto que $\overline{EO}$ es menor en longitud que un radio. A está sobre el círculo porque $\overline{AO}$ es un radio.

PRINCIPIO 4: *los radios del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes.*

Así, en la figura 6-7, en el círculo O, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$.

PRINCIPIO 5: *los diámetros del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-7 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

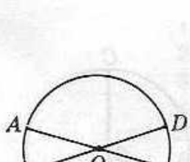


Fig. 6-7

PRINCIPIO 6: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-8, si $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$.

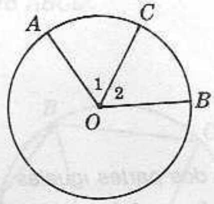


Fig. 6-8

Principio 7: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-8 si $\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$ entonces $\angle 1 \cong \angle 2$.
(Los principios 6 y 7 son conversos entre sí.)

Principio 8: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-9 si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$.

Principio 9: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes.*

Así, en el círculo O de la figura 6-9 si $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
(Los principios 8 y 9 son conversos entre sí.)

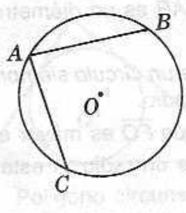


Fig. 6-9

Principio 10: *un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta a la cuerda y a sus arcos.*

Así, en el círculo O de la figura 6-10, si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, entonces $\overline{CD}$ bisecta $\overline{AB}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{ACB}$.

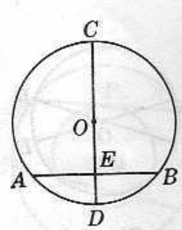


Fig. 6-10

La demostración de este principio se incluye en el capítulo 16.

PRINCIPIO 11: *un bisector perpendicular de una cuerda pasa por el centro del círculo.*
Así, en el círculo O de la figura 6-11, si $\overline{PD}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ entonces $\overline{PD}$ pasa por el centro O.

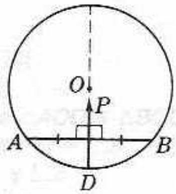


Fig. 6-11

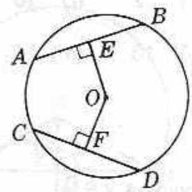


Fig. 6-12

PRINCIPIO 12: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, cuerdas congruentes están a igual distancia del centro.*
Así, en el círculo O de la figura 6-12, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, si $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ y si $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{OE} \cong OF$.

PRINCIPIO 13: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, cuerdas que están a igual distancia del centro son congruentes.*
Así, en el círculo O de la figura 6-12 si $\overline{OE} \cong \overline{OF}$, $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, y $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1 PRUEBA SOBRE EL VOCABULARIO ASOCIADO CON LOS CÍRCULOS

En la figura 6-13, asocie un término del lado izquierdo con los nombres del lado derecho:

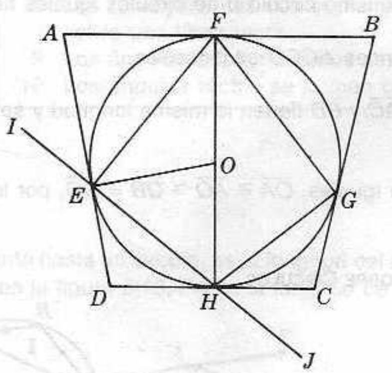


Fig. 6-13

(*a*)	$\overline{OE}$	1.	radio
(*b*)	$\overline{FG}$	2.	ángulo central
(*c*)	$\overline{FH}$	3.	semicírculo
(*d*)	$\overline{CD}$	4.	arco menor
(*e*)	$\overline{IJ}$	5.	arco mayor
(*f*)	$\overset{\frown}{EF}$	6.	cuerda
(*g*)	$\overset{\frown}{FGH}$	7.	diámetro
(*h*)	$\overset{\frown}{FEG}$	8.	secante
(*i*)	$\angle EOF$	9.	tangente
(*j*)	Círculo O alrededor de $EFGH$	10.	polígono inscrito
(*k*)	Círculo O en $ABCD$	11.	polígono circunscrito
(*l*)	Cuadrilátero $EFGH$	12.	círculo inscrito
(*m*)	Cuadrilátero $ABCD$	13.	círculo circunscrito

Soluciones

(*a*) 1 (*e*) 8 (*h*) 5 (*k*) 12

(*b*) 6 (*f*) 4 (*i*) 2 (*l*) 10

(*c*) 7 (*g*) 3 (*j*) 13 (*m*) 11

(*d*) 9

6.2 Aplicación de los Principios 4 y 5

En la figura 6-14, indique (*a*) qué tipo de triángulo es *OCD*; (*b*) qué tipo de cuadrilátero es *ABCD*; (*c*) en la figura si el círculo *O* = círculo *Q*, ¿qué tipo de cuadrilátero es *OAQB*?

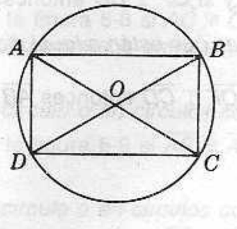


Fig. 6-14

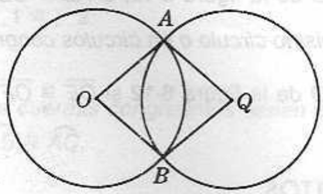


Fig. 6-15

Soluciones

Los radios o diámetros del mismo círculo o de círculos iguales tienen igual longitud.

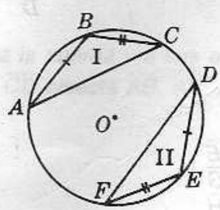
(*a*) Dado que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$, entonces $\triangle OCD$ es isósceles.

(*b*) Dado que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen la misma longitud y se bisectan entre sí, entonces *ABCD* es un rectángulo.

(*c*) Dado que los círculos son iguales, $\overline{OA} \cong \overline{AQ} \cong \overline{QB} \cong \overline{BO}$, por lo tanto, *OAQB* es un rombo.

6.3 Demostración de un Problema sobre Círculos

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\angle B \cong \angle E$
Plan: Demuéstrese que $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$



DEMOSTRACIÓN:

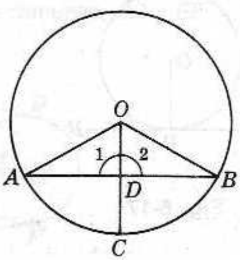
Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. Dado
2. $\widehat{AB} \cong \widehat{DE}$, $\widehat{BC} \cong \widehat{EF}$	2. En un círculo, cuerdas $\cong$ tienen arcos $\cong$.
3. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$	3. Si iguales se suman a iguales las sumas son iguales. Definición de arcos $\cong$.
4. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	4. En un círculo, arcos $\cong$ tienen cuerdas $\cong$.
5. $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$	5. s.s.s. $\cong$ s.s.s.
6. $\angle B \cong \angle E$	6. Las partes correspondientes de $\triangle$ congruentes son $\cong$

6.4 DEMOSTRACIÓN DE UN PROBLEMA DE CÍRCULOS FORMULADO EN PALABRAS

Demuéstrese que si un radio bisecta a una cuerda entonces es perpendicular a la cuerda.

Soluciones

Dado: círculo O
$\overline{OC}$ bisecta a $\overline{AB}$.
Demuéstrese: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle AOD \cong \triangle BOD$
Demuéstrese que $\angle 1 \cong \angle 2$
también que $\angle 1$ y $\angle 2$
son suplementarios.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Dibújense $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$	1. Entre dos puntos cualesquiera puede dibujarse un segmento de línea recta.
2. $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	2. Los radios de un círculo son congruentes
3. $\overline{OC}$ bisecta a $\overline{AB}$	3. Dado
4. $\overline{AD} \cong \overline{DB}$	4. Bisectar es dividir en dos partes $\cong$
5. $\overline{OD} \cong \overline{OD}$	5. Propiedad reflexiva
6. $\triangle AOD \cong \triangle BOD$	6. s.s.s. $\cong$ s.s.s.
7. $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las partes correspondientes de $\triangle$ congruentes son $\cong$.
8. $\angle 1$ es suplementario de $\angle 2$	8. Los $\angle^s$ adyacentes son suplementarios si los lados externos están sobre una línea recta.
9. $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos.	9. Los ángulos suplementarios congruentes, son rectos.
10. $\overline{OC} \perp \overline{AB}$	10. Los ángulos rectos se forman con perpendiculares.

6.2 TANGENTES

La *longitud de una tangente* desde un punto hasta un círculo, es la longitud del segmento de la tangente desde el punto dado, hasta el punto de tangencia. Así, en la figura 6-16, PA es la longitud de la tangente desde P hasta el círculo O.

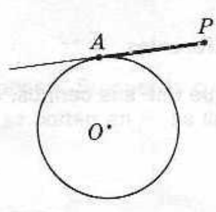


Fig. 6-16

6.2A Principios relativos a las tangentes

PRINCIPIO 1: *una tangente es perpendicular al radio trazado hacia el punto de contacto.*
Así, si $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O en P y si se traza $\overline{OP}$, entonces $\overline{AB} \perp \overline{OP}$. (Fig. 6-17)

PRINCIPIO 2: *una línea es tangente a un círculo si es perpendicular a un radio en ese punto*

Así, en la figura 6-17, si $\overleftrightarrow{AB} \perp$ al radio $\overline{OP}$ en P, entonces $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O.

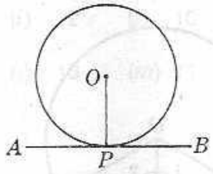


Fig. 6-17

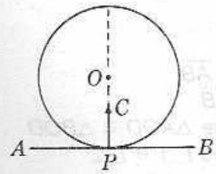


Fig. 6-18

Principio 3: *una línea pasa por el centro de un círculo, si es perpendicular a una tangente en su punto de contacto con el círculo.*

Así, en la figura 6-18, si $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente al círculo O en P, y $\overline{CP} \perp \overleftrightarrow{AB}$ en P, entonces la extensión de $\overline{CP}$ pasará por el centro O.

Principio 4: *las tangentes a un círculo dibujadas desde un punto exterior son congruentes.*

Así, si $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes al círculo O en P y Q (Fig. 6-19), entonces $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$.

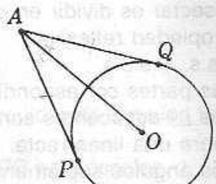


Fig. 6-19

Principio 5: *el segmento dibujado desde el centro de un círculo hasta un punto exterior, bisecta al ángulo entre las tangentes desde ese punto al círculo.*

Así, en la figura 6-19, $\overline{OA}$ bisecta $\angle PAQ$ si $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes al círculo O.

6.2B Dos Círculos en posiciones relativas diferentes

La *línea de centros de dos círculos* es la línea que une sus centros. Así, en la figura 6-20, $\overline{OO'}$ es la línea de centros de los círculos O y O'.

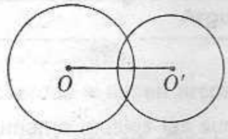


Fig. 6-20

Círculos externamente tangentes

En la figura 6-21, los círculos O y O' son externamente tangentes en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente interna común a ambos círculos. La línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P, es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y es igual en longitud a la suma de los radios, $R + r$. También, $\overleftrightarrow{AB}$ bisecta a cada una de las tangentes externas comunes, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.

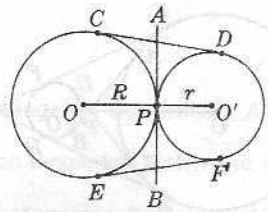


Fig. 6-21

Círculos internamente tangentes

En la figura 6-22, los círculos O y O' son internamente tangentes en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente externa común a ambos círculos. Si se extiende la línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P, es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y es igual en longitud a la diferencia de los radios $R - r$.

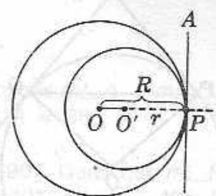


Fig. 6-22

Círculos superpuestos

En la figura 6-23, los círculos O y O' se superponen. Su cuerda común es $\overline{AB}$. Si los círculos son desiguales, sus tangentes externas comunes (iguales) $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ se cortan en P. La línea de centros $\overline{OO'}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ y si se extiende también pasa por P.

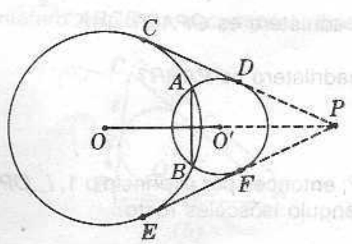


Fig. 6-23

Círculos completamente afuera de sí mismos

En la figura 6-24, los círculos O y O' están completamente afuera uno del otro. Las tangentes internas comunes, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en P. Si los círculos son desiguales, sus tangentes externas comunes, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, cuando se extienden se cortan en P'. La línea de centros $\overline{OO'}$ pasa por P y P'. También, $AB = CD$ y $EF = GH$.

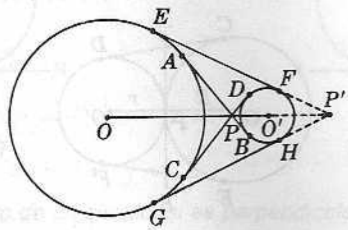
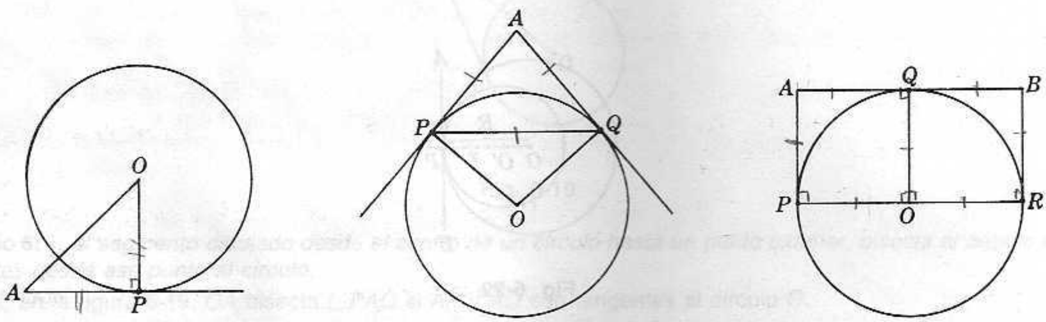


Fig. 6-24

PROBLEMAS RESUELTOS

6.5 Triángulos y Cuadriláteros con Lados Tangentes

En la figura 6-25, los puntos P, Q, y R, son puntos de tangencia.



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 6-25

(*a*) Si $AP = OP$, ¿qué tipo de triángulo es OPA? RECTANGULO ISOSCELES

(*b*) Si $AP = PQ$, ¿qué tipo de triángulo es APQ? EQUIL

(*c*) Si $AP = OP$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $OPAQ$? CUADRADO

(*d*) Si $\overline{OQ} \perp \overline{PR}$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $PABR$? RECTANG

Soluciones

(*a*) $\overline{AP}$ es tangente al círculo en P; entonces por el principio 1, $\angle OPA$ es un ángulo recto. También $AP = OP$. Por lo tanto, $\triangle OAP$ es un triángulo isósceles recto.

(*b*) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes desde un punto al círculo; por lo tanto, del principio 4, $AP = AQ$. También $AP = PQ$. Entonces, $\triangle APQ$ es un triángulo equilátero.

(*c*) Por el principio 4, $AP = AQ$. También $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son radios $\cong$. En adición, $AP = OP$. Por el principio 1, $\angle APO$ es recto. Entonces, $AP = AQ = OP = OQ$; por lo tanto $OPAQ$ es un rombo con un ángulo recto o un cuadrado.

(*d*) Por el principio 1, $\overline{AP} \perp \overline{PR}$ y $\overline{BR} \perp \overline{PR}$. Entonces, $\overline{AP} \parallel \overline{BR}$ dado que ambos son $\perp$ a $\overline{PR}$. Por el principio 1, $\overline{AB} \perp \overline{OQ}$; también $\overline{PR} \perp \overline{OQ}$ (Dado). Entonces, $\overline{AB} \parallel \overline{PR}$ dado que ambos son $\perp$ a $\overline{OQ}$. Por lo tanto, $PABR$ es un paralelogramo con un ángulo recto o un rectángulo.

6.6 Aplicación del Principio 1

(*a*) En la figura 6-26(*a*), $\overline{AP}$ es una tangente. Determine $\angle A$ si $\angle m\angle A$: $m\angle O = 2:3$.

(*b*) En la figura 6-26(*b*), $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son tangentes. Determine $m\angle 1$ si $m\angle O = 140°$.

(*c*) En la figura 6-26(*c*), $\overline{DP}$ y $\overline{CQ}$ son tangentes. Determine $m\angle 2$ y $m\angle 3$ si $\angle OPD$ está trisectado y $\overline{PQ}$ es un diámetro.

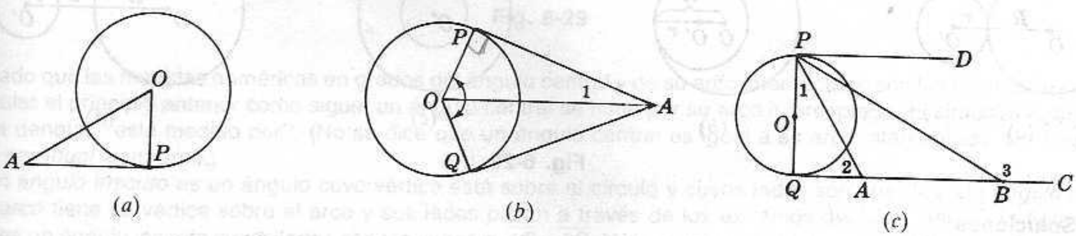


Fig. 6-26

Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $m\angle P = 90°$. Entonces $m\angle A + m\angle O = 90°$. Si $m\angle A = 2x$ y $m\angle O = 3x$, entonces $5x = 90$ y $x = 18$. Por lo tanto, $m\angle A = 36°$.

(*b*) Por el principio 1, $m\angle P = m\angle Q = 90°$. Dado que $m\angle P + m\angle Q + m\angle A + m\angle O = 360°$, $m\angle A + m\angle O = 180°$. Dado que $m\angle O = 140°$, $m\angle A = 40°$. Por el principio 5, $m\angle 1 = ½\, m\angle A = 20°$.

(*c*) Por el principio 1, $m\angle DPQ = m\angle PQC = 90°$. Dado que la $m\angle 1 = 30°$, $m\angle 2 = 60°$. Dado que $\angle 3$ es un ángulo externo del $\triangle PQB$, $m\angle 3 = 90° + 60° = 150°$.

6.7 Aplicación del Principio 4

(*a*) En la figura 6-27(*a*) $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{AB}$ son tangentes. Determine *y*.

(*b*) En la figura 6-27(*b*), $\triangle ABC$ es circunscrito. Determine *x*.

(*c*) En la figura 6-27(*c*), el cuadrilátero *ABCD* es circunscrito. Encuentre *x*.

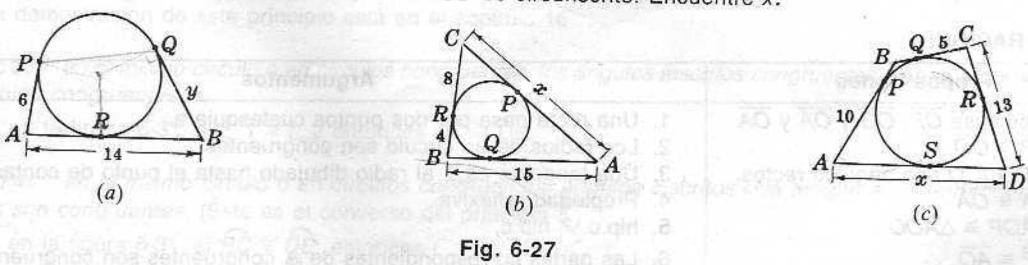


Fig. 6-27

Soluciones

(*a*) Por el principio 4, $AR = 6$, $RB = y$. Entonces, $RB = AB - AR = 14 - 6 = 8$. Por lo tanto, $y = RB = 8$.

(*b*) Por el principio 4, $PC = 8$, $QB = 4$, y $AP = AQ$. Entonces, $AQ = AB - QB = 11$. Por lo tanto, $x = AP + PC = 11 + 8 = 19$.

(*c*) Por el principio 4, $AS = 10$, $CR = 5$, y $RD = SD$. Entonces, $RD = CD - CR = 8$. Por lo tanto, $x = AS + SD = 10 + 8 = 18$.

6.8 Determinación de la Línea de Centros

Dos círculos tienen radios 9 y 4 respectivamente. Calcúlese la longitud de su línea de centros (*a*) si los círculos son externamente tangentes, (*b*) si son internamente tangentes, (*c*) si los círculos son concéntricos, (*d*) si los círculos están separados en 5 unidades de longitud. (Fig. 6-28.)

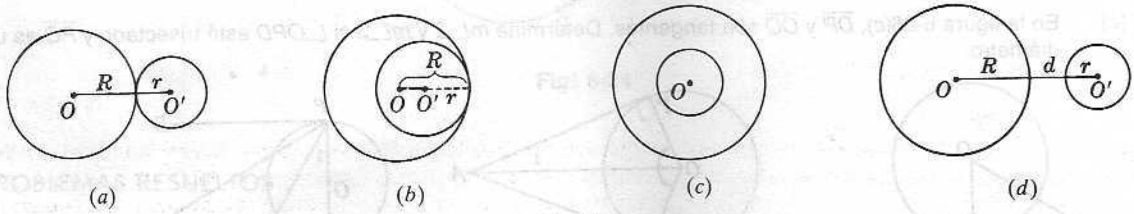


Fig. 6-28

Soluciones

Sean R el radio del círculo más grande, r el radio del círculo más pequeño.

(*a*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $OO' = R + r = 9 + 4 = 13$.

(*b*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $OO' = R - r = 9 - 4 = 5$.

(*c*) Dado que ambos círculos tienen el mismo centro, su línea de centro tiene longitud cero.

(*d*) Dado que $R = 9$, $r = 4$, $d = 5$, $OO' = R + d + r = 9 + 5 + 4 = 18$.

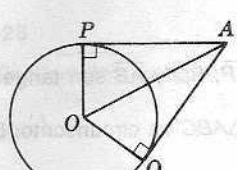
6.9 Demostración de un Problema sobre Tangentes Formulado en Palabras

Demuéstrese: las tangentes a un círculo desde un punto externo son congruentes (Principio 4).

Dado: círculo O
$\overline{AP}$ es una tangente en P.
$\overline{AQ}$ es una tangente en Q.

Demuéstrese: $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$

Plan: dibúiese $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OA}$ y demuéstrese que $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Dibújense $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OA}$ y $\overline{OA}$	1. Una recta pasa por dos puntos cualesquiera.
2. $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\angle P$ y $\angle Q$ son ángulos rectos.	3. Una tangente es $\perp$ al radio dibujado hasta el punto de contacto.
4. $\overline{OA} \cong \overline{OA}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$	5. hip.c. $\cong$ hip.c.
6. $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$	6. Las partes correspondientes de $\triangle$ congruentes son congruentes.

6.3 MEDICIÓN DE ÁNGULOS Y ARCOS EN UN CÍRCULO

Un *ángulo central* tiene el mismo número de grados que el arco que lo intercepta. Así, como se muestra en la figura 6-29, un ángulo central, si es recto, intercepta a un arco de 90°; un ángulo central de 40° intercepta a un arco de 40°; y un ángulo central, si es derecho, intercepta un semicírculo de 180°.

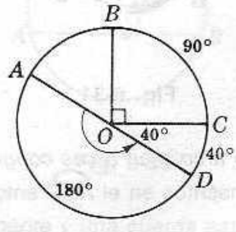


Fig. 6-29

Dado que las medidas numéricas en grados del ángulo central y de su arco interceptado son las mismas, es posible reformular el principio anterior como sigue: un ángulo central se mide por su arco interceptado. El símbolo $\doteq$ se utilizará para denotar "está medido por". (No se dice que un ángulo central es igual a su arco interceptado. Un ángulo *no puede ser igual* a un arco.)

Un *ángulo inscrito* es un ángulo cuyo vértice está sobre el círculo y cuyos lados son cuerdas. Un *ángulo inscrito en un arco* tiene su vértice sobre el arco y sus lados pasan a través de los extremos del arco. Así, en la figura 6-30, el $\angle A$ es un ángulo inscrito cuyos lados son las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Nótese que el $\angle A$ intercepta al *BC* y que está inscrito en el *BAC*.

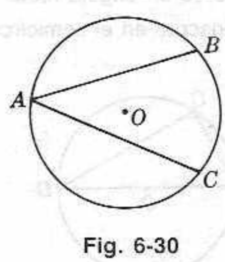


Fig. 6-30

6.3A Principios sobre medidas de ángulos

Principio 1: *un ángulo central se mide por su arco interceptado.*

Principio 2: *un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado.*
Una demostración de este principio está en el capítulo 16.

Principio 3: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, los ángulos inscritos congruentes, tienen arcos interceptados también congruentes.*

Así, en la figura 6-31, si $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$.

Principio 4: *en el mismo círculo o en círculos congruentes, ángulos inscritos que tengan arcos interceptados congruentes son congruentes.* (Éste es el converso del principio 3.)

Así, en la figura 6-31, si $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$

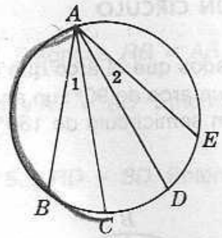


Fig. 6-31

PRINCIPIO 5: *los ángulos inscritos en el mismo arco o en arcos congruentes son congruentes.*

Así, en la figura 6-32, si $\angle C$ y $\angle D$ están inscritos en el $\overparen{ABC}$ entonces $\angle C \cong \angle D$.

Fig. 6-32

PRINCIPIO 6: *un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.*

Así, en la figura 6-33, dado que el $\angle C$ está inscrito en el semicírculo $\overparen{ACD}$, entonces $m\angle C = 90°$.

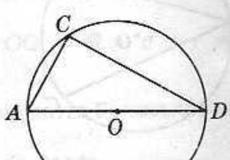


Fig. 6-33

PRINCIPIO 7: *los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.*

De este modo, en la figura 6-34, si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, $\angle A$ es el suplemento del $\angle C$.

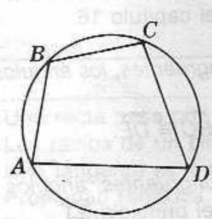


Fig. 6-34

PRINCIPIO 8: *las líneas paralelas interceptan a arcos congruentes en un círculo.*

Así, en la figura 6-35, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$. Si la tangente $\overleftrightarrow{FG}$ es paralela a $\overline{CD}$, entonces $\widehat{PC} \cong \widehat{PD}$.

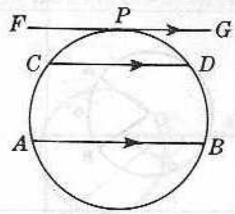


Fig. 6-35

PRINCIPIO 9: *un ángulo formado por una tangente y una cuerda está medido por la mitad de su arco interceptado.*

PRINCIPIO 10: *un ángulo formado por dos cuerdas que se interceptan, está medido por la mitad de la suma de sus arcos interceptados.*

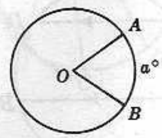
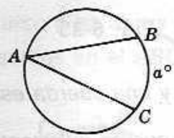
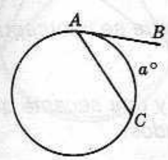
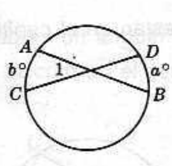
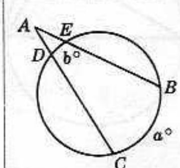
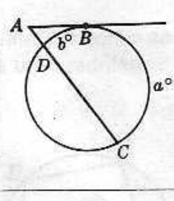
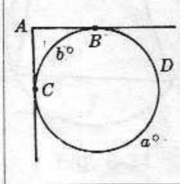
PRINCIPIO 11: *el ángulo formado por dos secantes que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados.*

PRINCIPIO 12: *el ángulo formado por una tangente y una secante que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados.*

PRINCIPIO 13: *el ángulo formado por dos tangentes que se interceptan afuera del círculo, está medido por la mitad de la diferencia de los arcos interceptados*

Las demostraciones de los principios 10 al 13 están en el capítulo 16.

6.3B Tabla de los principios sobre medición de ángulos

Posición del vértice	Tipo de ángulo	Diagrama	Fórmula de la medida	Método de medida
Centro del círculo	Ángulo central (principio 1)		$\angle O \doteq \widehat{AB}$ $m\angle O = a°$	Arco interceptado
Sobre el círculo	Ángulo inscrito (principio 2)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$ $m\angle A = \frac{1}{2}a°$	Mitad del arco interceptado
	Ángulo formado por una cuerda y una tangente (principio 9)			
Dentro del círculo	Ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan (principio 10)		$\angle 1 \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{AC} + \widehat{BD})$ $m\angle 1 = \frac{1}{2}$ $(a° + b°)$	Mitad de la suma de los arcos interceptados
Fuera del círculo	Ángulo formado por dos secantes (principio 10)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BC} - \widehat{DE})$ $m\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$	Mitad de la diferencia de los arcos interceptados
	Ángulo formado por una secante y una tangente (principio 12)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BC} - \widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$	
	Ángulo formado por dos tangentes (principio 13)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}$ $(\widehat{BDC} - \widehat{BC})$ $m\angle A = \frac{1}{2}$ $(a° - b°)$ También, $m\angle A = (180 - b)°$	

Nota: para encontrar el ángulo formado por una secante y una cuerda que se intersectan sobre el círculo, primero encuéntrese la medida del ángulo inscrito adjunto y en seguida résteselo a 180°. Así, si la secante $\overline{AB}$ corta a la cuerda $\overline{CD}$ en C, sobre el círculo de la figura 6-36, para encontrar $m\angle y$, primero determínese la medida del $\angle x$ inscrito. Entonces, $m\angle y = 180 - m\angle x$.

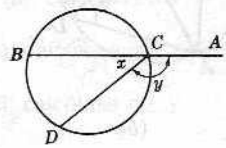


Fig. 6-36

PROBLEMAS RESUELTOS

6.10 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 1 Y 2

(*a*) En la figura 6-37(*a*), si $m\angle y = 46°$, calcule $m\angle x$.

(*b*) En la figura 6-37(*b*), si $m\angle y = 112°$, calcule $m\angle x$.

(*c*) En la figura 6-37(*c*), si $m\angle x = 75°$, calcule $m\widehat{y}$.

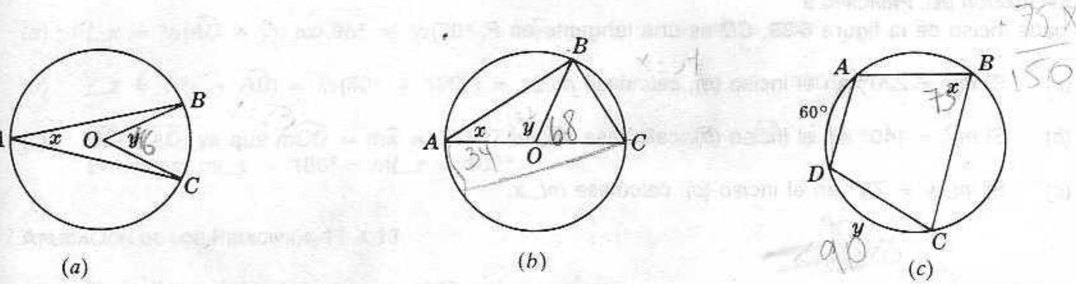


Fig. 6-37

Soluciones

(*a*) $\angle y \doteq \widehat{BC}$, entonces $\widehat{BC} = 46°$. Por lo tanto, $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}(46°) = 23°$, esto es $m\angle x = 23°$.

(*b*) $\angle y \doteq \widehat{AB}$, esto es $m\widehat{AB} = 112°$.
$mBC = m(\widehat{ABC} - \widehat{BC}) = 180° - 112° = 68°$. Entonces, $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}(68)° = 34°$. Esto es $m\angle x = 34°$.

(*c*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{ADC}$, así, $m\widehat{ADC} = 150°$. Entonces, $m\widehat{y} = m(\widehat{ADC} - \widehat{AD}) = (150° - 60°) = 90°$.

6.11 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 3 A 8
Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-38.

x = 50
y = 65

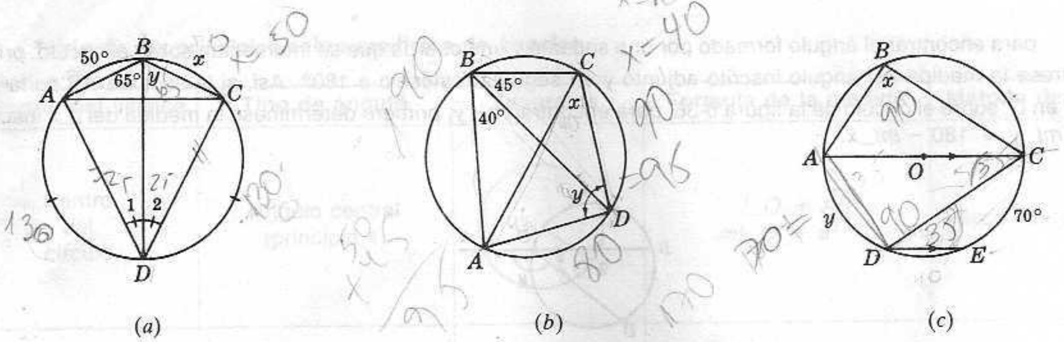


Fig. 6-38

Soluciones

(a) Dado que $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\widehat{x} = m\widehat{AB} = 50°$. Dado que $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, $m\angle y = m\angle ABD = 65°$.

(b) El $\angle ABD$ y $\angle x$ están inscritos en $\widehat{ABD}$; por lo tanto $m\angle x = m\angle ABD = 40°$. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito; por lo tanto $m\angle y = 180° - m\angle B = 95°$.

(c) Dado que $\angle x$ está inscrito en un semicírculo, la $m\angle x = 90°$. Como $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $m\widehat{y} = m\widehat{CE} = 70°$.

6.12 Aplicación del Principio 9

En cada inciso de la figura 6-39, CD es una tangente en P.

(a) Si $m\widehat{y} = 220°$ en el inciso (a), calcúlese $m\angle x$.

(b) Si $m\widehat{y} = 140°$ en el inciso (b), calcúlese $m\angle x$.

(c) Si $m\angle y = 75°$ en el inciso (c), calcúlese $m\angle x$.

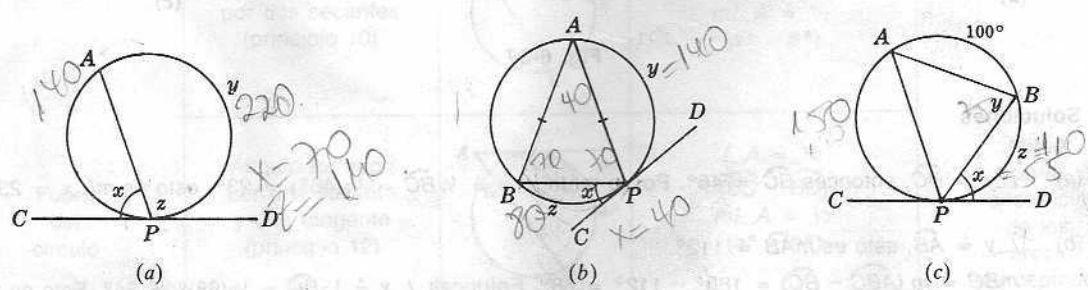


Fig. 6-39

Soluciones

(a) $\angle z \doteq \frac{1}{2}\widehat{y} = \frac{1}{2}(220°) = 110°$. Por lo tanto $m\angle x = 180° - 110° = 70°$.

(b) Dado que $AB = AP$, $m\widehat{AB} = m\widehat{y} = 140°$. Entonces, $m\widehat{z} = 360° - 140° - 140° = 80°$. Dado que $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{z} = 40°$, $m\angle x = 40°$.

(c) $\angle y \doteq \frac{1}{2}\widehat{AP}$, por lo tanto $m\widehat{AP} = 150°$. Entonces $m\widehat{z} = 360° - 100° - 150° = 110°$. Dado que $\angle x \doteq \frac{1}{2}\widehat{z} = 55°$, $m\angle x = 55°$.

6.13 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 10

(a) Si $m\angle x = 95°$ en la figura 6-40 (a), calcúlese $m\widehat{y}$.

(b) Si $m\widehat{y} = 80°$ en la figura 6-40 (b), calcúlese $m\angle x$.

(c) Si $m\widehat{x} = 78°$ en la figura 6-40 (c), calcúlese $m\angle y$.

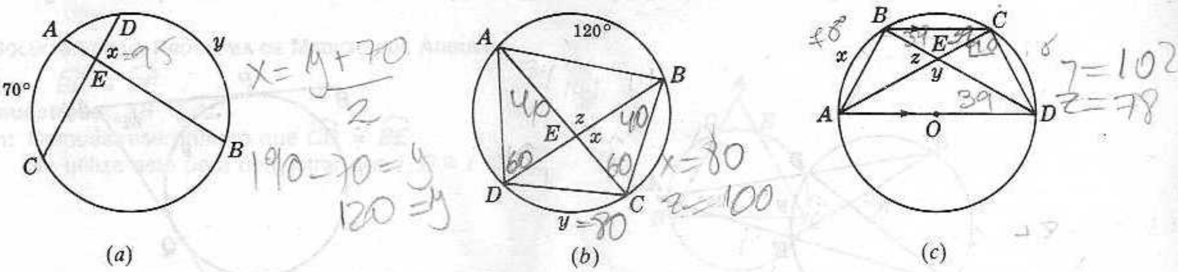


Fig. 6-40

Soluciones

(a) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{y})$; así $95° = \frac{1}{2}(70° + m\widehat{y})$, por lo tanto, $m\widehat{y} = 120°$.

(b) $\angle z \doteq \frac{1}{2}(\widehat{y} + \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(80° + 120°) = 100°$. Entonces, $m\angle x = 180° - m\angle z = 80°$.

(c) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, ya que $m\widehat{CD} = m\widehat{x} = 78°$. También, $\angle z \doteq \frac{1}{2}(\widehat{x} + \widehat{CD}) = 78°$. Entonces, $m\angle y = 180° - m\angle z = 102°$.

6.14 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 11 A 13

(a) En la figura 6-41(a), si $m\angle x = 40°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

(b) En la figura 6-41(b), si $m\angle x = 67°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

(c) En la figura 6-41(c), si $m\angle x = 61°$, calcúlese $m\widehat{y}$.

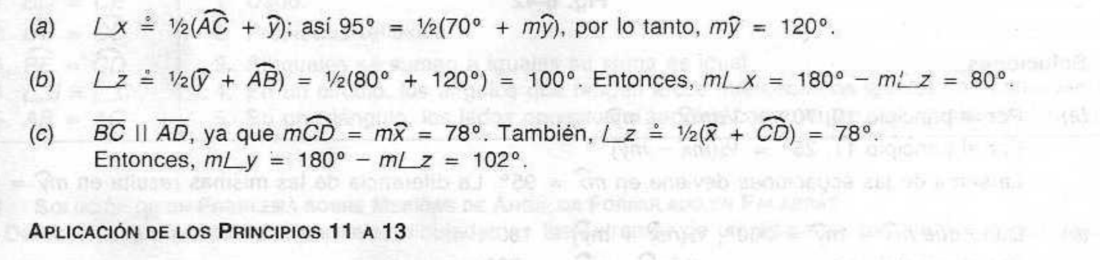


Fig. 6-41

Soluciones

(*a*) $x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{y})$, entonces $40° = \frac{1}{2}(200° - m\widehat{y})$ o $m\widehat{y} = 120°$

(*b*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{BE})$, entonces $67° = \frac{1}{2}(200° - m\widehat{BE})$o $m\widehat{BE} = 66°$
Entonces $m\widehat{y} = 360° - 200° - 66° = 94°$.

(*c*) $\angle x \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BFC} - \widehat{y})$, y $m\widehat{BFC} = 360° - m\widehat{y}$. Entonces: $61° = \frac{1}{2}[(360° - m\widehat{y}) - m\widehat{y})] = 180° - m\widehat{y}$.
Así, $m\widehat{y} = 119°$.

6.15 Cálculo de Arcos por medio de un Sistema de Ecuaciones con Dos Incógnitas
En cada inciso de la figura 6-42, calcule *x*, *y* utilizando un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

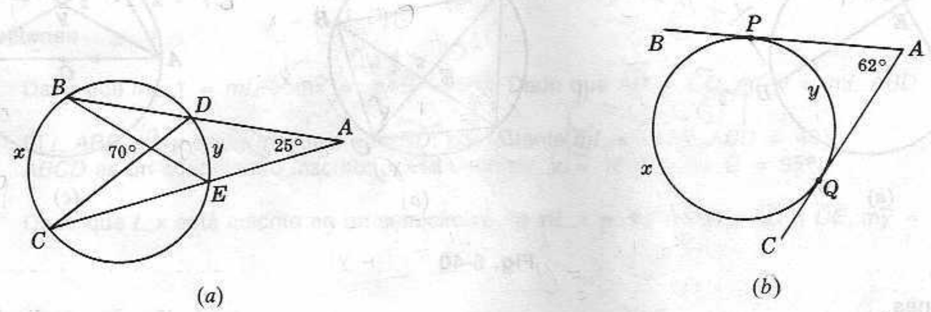


Fig. 6-42

Soluciones

(*a*) Por el principio 10, $70° = \frac{1}{2}(m\widehat{x} + m\widehat{y})$
Por el principio 11, $25° = \frac{1}{2}(m\widehat{x} - m\widehat{y})$
La suma de las ecuaciones deviene en $m\widehat{x} = 95°$. La diferencia de las mismas resulta en $m\widehat{y} = 45°$.

(*b*) Dado que $m\widehat{x} + m\widehat{y} = 360°$, $\frac{1}{2}(m\widehat{x} + m\widehat{y}) = 180°$.
Por el principio 13, $\frac{1}{2}(m\widehat{x} - m\widehat{y}) = 62°$.
La adición de las ecuaciones deviene en $m\widehat{x} = 242°$. La diferencia de las mismas resulta en $m\widehat{y} = 118°$.

6.16 Medición de Ángulos y Arcos en General
En cada inciso de la figura 6-43, determine *x*, *y*.

Fig. 6-43

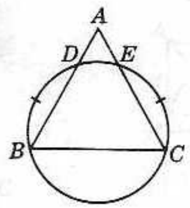
Soluciones

(*a*) Por el principio 2, $50° = \frac{1}{2}m\widehat{PQ}$ o $m\widehat{PQ} = 100°$. También, por el principio 9, $70° = \frac{1}{2}m\widehat{QR}$ o $m\widehat{QR} = 140°$.
Entonces, $m\widehat{PR} = 360° - m\widehat{PQ}\ m\widehat{QR} = 120°$.
Por el principio 9, $x = \frac{1}{2}m\widehat{PR} = 60°$.
Por el principio 13, $y = \frac{1}{2}(m\widehat{PRQ} - m\widehat{PQ}) = \frac{1}{2}(260° - 100°) = 80°$.

(*b*) Por el principio 1, $m\widehat{AB} = 80°$. También, por el principio 8, $m\widehat{BC} = m\widehat{PA} = 85°$. Entonces $m\widehat{PC} = 360° - m\widehat{PA} - m\widehat{AB} - m\widehat{BC} = 100°$.
Por el principio 9, $x = \frac{1}{2}m\widehat{PC} = 55°$.
Por el principio 12, $y = \frac{1}{2}(m\widehat{PCB} - m\widehat{PA}) = \frac{1}{2}(195° - 85°) = 55°$.

6.17 Solución de un Problema de Medición de Ángulos

Dado: $\widehat{BD} = \widehat{CE}$
Demuéstrese: $AB = AC$
Plan: Demuéstrese primero que $\widehat{CD} = \widehat{BE}$.
Se utiliza esto para demostrar que $\angle B \cong \angle C$.



DEMOSTRACIÓN:

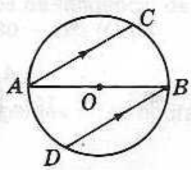
Proposiciones	Argumentos
1. $\widehat{BD} = \widehat{CE}$	1. Dado.
2. $\widehat{DE} = \widehat{DE}$	2. Propiedad reflexiva.
3. $\widehat{BE} = \widehat{CD}$	3. Si iguales se suman a iguales su suma es igual.
4. $\angle B \cong \angle C$	4. En un círculo, los ángulos que tengan arcos interceptados iguales son congruentes.
5. $AB = AC$	5. En un triángulo, los lados opuestos a ángulos congruentes son iguales en longitud.

6.18 Solución de un Problema sobre Medidas de Ángulos Formulado en Palabras

Demuestre que las cuerdas paralelas dibujadas en los extremos de un diámetro, son iguales en longitud.

Soluciones

Dado: círculo O
$\overline{AB}$ es un diámetro.
$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
Demuéstrese: $AC = BD$
Plan: Demuéstrese $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{AB}$ es un diámetro.	1. Dado.
2. $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$	2. Diámetro corta a un círculo en dos semicírculos iguales.
3. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	3. Dado.
4. $AD \cong BC$	4. Sobre un círculo, las líneas paralelas interceptan arcos congruentes.
5. $\widehat{AC} = \widehat{BD}$	5. Si iguales se restan a iguales, su diferencia es igual. Definición de arcos congruentes.
6. $AC = BD$	6. En un círculo, los arcos iguales tienen cuerdas de igual longitud.

Problemas complementarios

1. Efectúe las demostraciones requeridas en la figura 6-44. (6.3)

(a) **Dado:** $AB = DE$
$AC = DF$
Demuéstrese:
$\angle B \cong \angle E$

(b) **Dado:** círculo O,
$AB = BC$
Diámetro $\overline{BD}$
Demuéstrese:
$\overline{BD}$ bisecta $\angle AOC$

(c) **Dado:** círculo O
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
Demuéstrese:
$\angle AOC \cong \angle BOD$

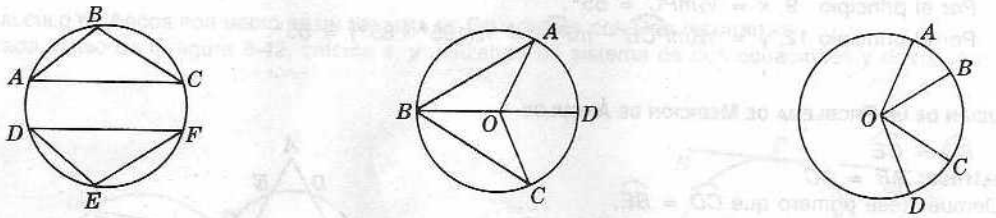


Fig. 6-44

2. Efectúe las demostraciones requeridas en la figura 6-45. (6.3)

(a) **Dado:** $AB = AC$
Demuéstrese:
$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{ACB}$

(b) **Dado:** $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ACB}$
Demuéstrese:
$AB = AC$

(c) **Dado:** círculo O,
$AB = AD$
$\overline{AC}$ diámetro
Demuéstrese:
$BC = CD$

(d) **Dado:** círculo O
$AB = AD$,
$BC = CD$
Demuéstrese:
$\overline{AC}$ es un diámetro

(e) **Dado:** $AD = BC$
Demuéstrese:
$AC = BD$

(f) **Dado:** $AC = BD$
Demuéstrese:
$AD = BC$

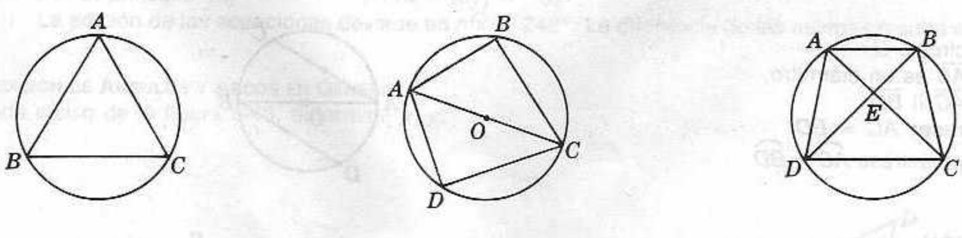


Fig. 6-45

3. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones: (6.4)

(a) Si un radio bisecta una cuerda, entonces bisecta sus arcos.

(b) Si un diámetro bisecta al arco mayor de una cuerda, entonces es perpendicular a la cuerda.

(c) Si un diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces bisecta a la cuerda y a sus arcos.

4. Demuéstrese cada uno de los siguientes puntos: (6.4)

(*a*) Un radio que pasa por el punto de intersección de dos cuerdas congruentes, bisecta al ángulo formado por ellas.

(*b*) Si dos cuerdas dibujadas desde los extremos de un diámetro hacen ángulos congruentes con el diámetro entonces, son cuerdas congruentes.

(*c*) En un círculo, las cuerdas congruentes son equidistantes del centro del círculo.

(*d*) En un círculo, las cuerdas que son equidistantes del centro son congruentes.

5. Resuelva lo siguiente suponiendo que t, t' y t'', en la figura 6-46, sean tangentes. (6.5)

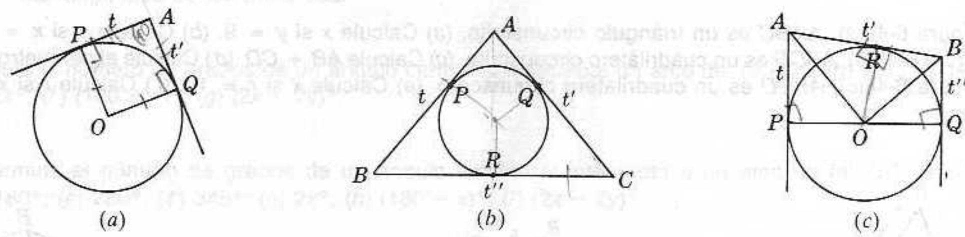


Fig. 6-46

(*a*) En la figura 6-46(*a*), si $m\angle A = 90°$, ¿qué tipo de cuadrilátero es $PAQO$? cuadrado

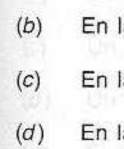
(*b*) En la figura 6-46(*b*), si $BR = RC$, ¿qué tipo de triángulo es ABC?

(*c*) En la figura 6-46(*c*), si $\overline{PQ}$ es un diámetro, ¿qué tipo de cuadrilátero es $PABQ$?

(*d*) En la figura 6-46(*c*), ¿qué tipo de triángulo es AOB?

6. En un círculo O, los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se dibujan hasta los puntos de tangencia de $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Calcule $m\angle AOB$ si la $m\angle APB$ es igual a: (*a*) 40°; (*b*) 120°; (*c*) 90°; (*d*) $x°$; (*e*) $(180 - x)°$; (*f*) $(90 - x)°$. (6.6)

7. Resuelva cada uno de los problemas siguientes (t y t' son tangentes en la figura 6-47). (6.6)



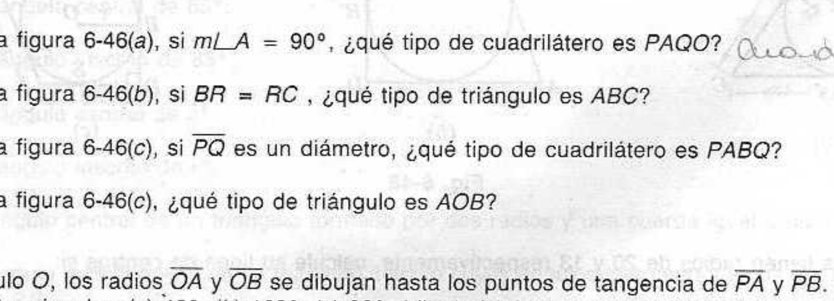


Fig. 6-47

En la figura 6-47(*a*):

(*a*) Calcule $m\angle PAQ$ si $m\angle POQ = 80°$.

(*b*) Calcule $m\angle 1$ y $m\angle PAQ$ si $m\angle PBO = 25°$.

(*c*) Calcule $m\angle 1$ y $m\angle PBO$ si $m\angle PAQ = 72°$.

En la figura 6-47(*b*):

(*d*) Calcule $m\angle 2$ si $\overline{PB}$ bisecta al $\angle APQ$.

(*e*) Calcule $m\angle 2$ si $m\angle 1 = 35°$.

(*f*) Calcule $m\angle 1$ si $PQ = QB$.

8. En la figura 6-48(*a*), $\triangle ABC$ es un triángulo circunscrito. (*a*) Calcule x si $y = 9$. (*b*) Calcule y si $x = 25$. (6.7) En la figura 6-48(*b*), $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. (*c*) Calcule $AB + CD$. (*d*) Calcule el perímetro de $ABCD$. En la figura 6-48(*c*), $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito. (*e*) Calcule x si $r = 10$. (*f*) Calcule r si $x = 25$.

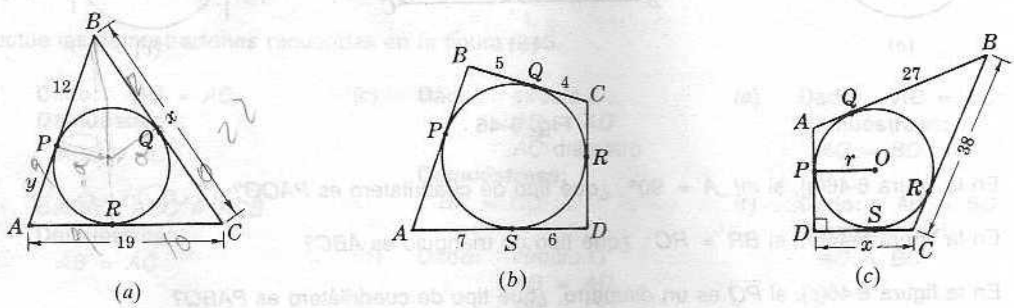


Fig. 6-48

9. Si dos círculos tienen radios de 20 y 13 respectivamente, calcule su línea de centros si: (6.8)

(*a*) Los círculos son concéntricos.

(*b*) Los círculos se encuentran separados por 7 unidades.

(*c*) Los círculos son externamente tangentes.

(*d*) Los círculos son internamente tangentes.

10. Si la línea de centros de dos círculos mide 30 unidades, ¿cuál es la relación entre ambos círculos si: (6.8)

(*a*) Sus radios miden 25 y 5 unidades.

(*b*) Sus radios miden 35 y 5 unidades.

(*c*) Sus radios miden 20 y 5 unidades.

(*d*) Sus radios miden 25 y 10 unidades.

11. ¿Cuál es la relación entre dos círculos si su línea de centros es: (*a*) 0; (*b*) igual a la diferencia de sus radios; (*c*) igual a la suma de sus radios; (*d*) mayor que la suma de sus radios; (*e*) menor que la diferencia de sus radios y mayor que 0; (*f*) mayor que la diferencia de sus radios pero menor que su suma?

12. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados. (6.9)

(*a*) La línea del centro de un círculo a un punto externo bisecta al ángulo formado por las tangentes al círculo desde ese punto.

(*b*) Si dos círculos son externamente tangentes entonces su tangente interna común bisecta a una tangente externa común.

(*c*) Si dos círculos son ajenos entre sí entonces sus tangentes internas comunes son congruentes.

(*d*) En un cuadrilátero circunscrito, la suma de las longitudes de los dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos.

13. Calcule el número de grados de un ángulo central si intercepta un arco de: (*a*) 40°; (*b*) 90°; (*c*) 170°; (*d*) 180°; (*e*) $2x°$; (*f*) $(180 - x)°$; (*g*) $(2x - 2y)°$. (6.10)

14. Determine el número de grados de un ángulo inscrito si intercepta a un arco de (*a*) 40°; (*b*) 90°; (*c*) 170°; (*d*) 180°; (*e*) 260°; (*f*) 348°; (*g*) $2x°$; (*h*) $(180 - x)°$; (*i*) $(2x - 2y)°$. (6.10)

15. Calcule el número de grados del arco interceptado por: (6.10)

(*a*) Un ángulo central de 85°.

(*b*) Un ángulo inscrito de 85°.

(*c*) Un ángulo central de $c°$.

(*d*) Un ángulo inscrito de $i°$.

(*e*) El ángulo central de un triángulo formado por dos radios y una cuerda igual a un radio.

(*f*) El ángulo más pequeño de un triángulo inscrito cuyos ángulos interceptan arcos que están en proporción de 1:2:3.

16. Encuentre el número de grados de cada uno de los arcos interceptados por ángulos de un triángulo inscrito, si las medidas de estos ángulos están en proporción de: (*a*) 1:2:3; (*b*) 2:3:4; (*c*) 5:6:7; (*d*) 1:4:5. (6.10)

17. (*a*) Calcule la $m\angle x$ si en la figura 6-49(*a*) la $m\widehat{y} = 140°$. a (610)

(*b*) Calcule $m\widehat{y}$ si en la figura 6-49(*a*) la $m\angle x = 165°$.

(*c*) Calcule la $m\angle x$ si en la figura 6-49(*b*) la $m\angle y = 115°$. b

(*d*) Calcule la $m\angle y$ si en la figura 6-49(*b*) la $m\angle x = 108°$.

(*e*) Calcule $m\angle x$ si en la figura 6-49(*c*) la $m\widehat{y} = 105°$. c

(*f*) Calcule la $m\widehat{y}$ si en la figura 6-49(*c*) la $m\angle x = 96°$.

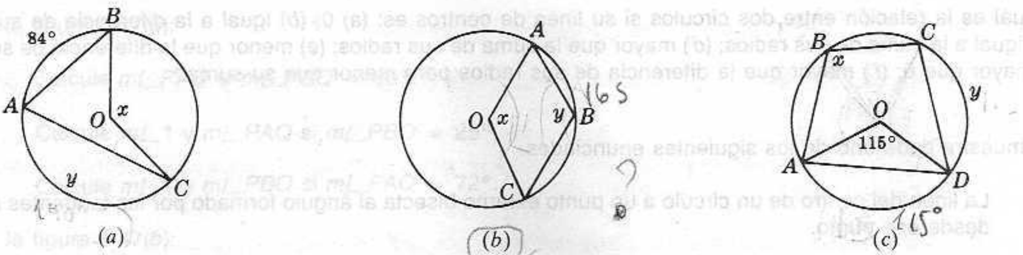


Fig. 6-49

18. En la figura 6-50, *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en el círculo, determine: (6.11)

(*a*) $m\angle A$ si $m\angle C = 45°$.

(*b*) $m\angle B$ si $m\angle D = 90°$.

(*c*) $m\angle C$ si $m\angle A = x°$.

(*d*) $m\angle D$ si $m\angle B = (90 - x)°$.

(*e*) $m\angle A$ si $m\widehat{BAD} = 160°$.

(*f*) $m\angle B$ si $m\widehat{ABC} = 200°$.

(*g*) $m\angle C$ si $m\widehat{BC} = 140°$ y $m\widehat{CD} = 110°$.

(*h*) $m\angle D$ si $m\angle D{:}m\angle B = 2{:}3$.

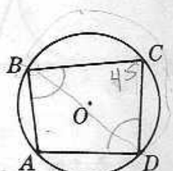


Fig. 6-50

19. Si *BC* y *AD* son los lados paralelos del trapezoide inscrito *ABCD*, calcule en la figura 6-51: (6.11)

(*a*) $m\widehat{AB}$ si $m\widehat{CD} = 85°$.

(*b*) $m\widehat{CD}$ si $m\widehat{AB} = y°$.

(*c*) $m\widehat{AB}$ si $m\widehat{BC} = 60°$ y $m\widehat{AD} = 80°$.

(*d*) $m\widehat{CD}$ si $m\widehat{AD} + m\widehat{BC} = 170°$.

(*e*) $m\angle A$ si $m\angle D = 72°$.

(*f*) $m\angle A$ si $m\angle C = 130°$.

(*g*) $m\angle B$ si $m\angle C = 145°$.

(*h*) $m\angle B$ si $m\widehat{AD} = 90°$ y $m\widehat{AB} = 84°$.

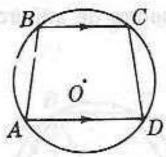


Fig. 6-51

20. Un diámetro es paralelo a una cuerda. Calcule el número de grados en el arco formado por el diámetro y la cuerda si la cuerda intercepta (*a*) un arco menor de 80°; (*b*) un arco mayor de 300°. (6.11)

21. Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-52. (6.11)

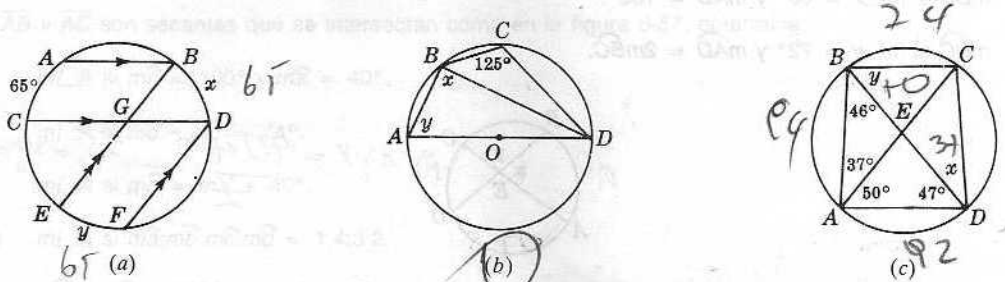


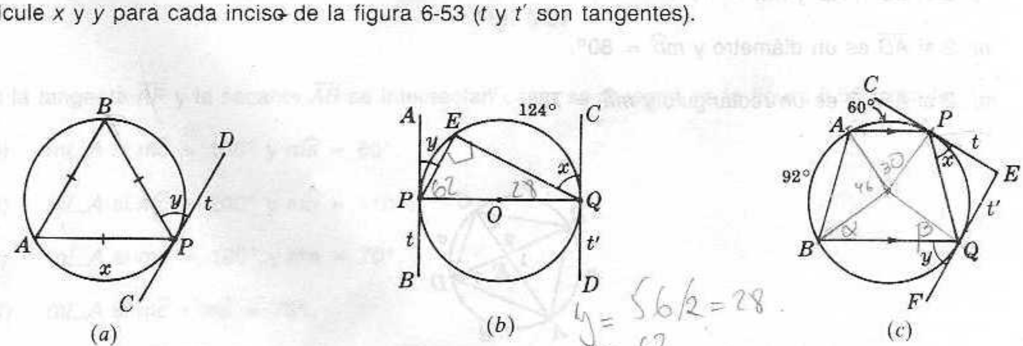
Fig.6-52

22. Calcule el número de grados del ángulo formado por una tangente y una cuerda dibujada hasta al punto de tangencia, si el arco interceptado tiene una medida de (*a*) 38°; (*b*) 90°; (*c*) 138°; (*d*) 180°; (*e*) 250°; (*f*) 334°; (*g*) x°; (*h*) $(360 - x)$°; (*i*) $(2x + 2y)$°. (6.12)

23. Calcule el número de grados del arco interceptado por un ángulo formado por una tangente y una cuerda dibujada hasta el punto de tangencia, si el ángulo mide (*a*) 55°; (*b*) 67½°; (*c*) 90°; (*d*) 135°; (*e*) $(90 - x)$°; (*f*) $(180 - x)$°; (*g*) $(x - y)$°; (*h*) $3\frac{1}{2}x$°. (6.12)

24. Calcule el número de grados de un ángulo agudo formado por una tangente que pasa por un vértice, y el lado adjunto de un (*a*) cuadrado inscrito; (*b*) un triángulo equilátero inscrito; (*c*) un hexágono regular inscrito; (*d*) un decágono regular inscrito. (6.12)

25. Calcule x y y para cada inciso de la figura 6-53 (t y t' son tangentes). (6.12)



y = 56/2 = 28
y = 62

Fig. 6-53

26. Si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas que se intersectan dentro de un círculo, como se muestra en la figura 6-54. Calcule: (6.13)

(*a*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB} = 90°$ y $m\widehat{CD} = 60°$.

(*b*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB}$ y $m\widehat{CD}$ son iguales a 75°.

(*c*) $m\angle x$ si $m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = 230°$.

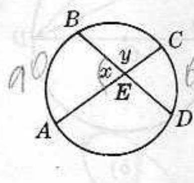
(*d*) $m\angle 2x$ si $m\widehat{BC} + m\widehat{AD} = 160°$.

(*e*) $m\widehat{AB} + m\widehat{CD}$ si $m\angle x = 70°$.

(*f*) $m\widehat{BC} + m\widehat{AD}$ si $m\angle x = 65°$.

(*g*) $m\widehat{BC}$ si $m\angle x = 60°$ y $m\widehat{AD} = 160°$.

(*h*) $m\widehat{BC}$ si $m\angle y = 72°$ y $m\widehat{AD} = 2m\widehat{BC}$.



a) $X = \frac{90+60}{2} = 75 \to y = 105$

Fig. 6-54

27. Si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales del cuadrilátero inscrito *ABCD* de la figura 6-55, calcule: (6.13)

(*a*) $m\angle 1$ si $m\widehat{a} = 95°$ y $m\widehat{c} = 75°$.

(*b*) $m\angle 1$ si $m\widehat{b} = 88°$ y $m\widehat{d} = 66°$.

(*c*) $m\angle 1$ si $m\widehat{b}$ y $m\widehat{d}$ son ambas iguales a 100°.

(*d*) $m\angle 1$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c}:m\widehat{d} = 1:2:3:4$.

(*e*) $m\angle 2$ si $m\widehat{b} + m\widehat{d} = m\widehat{a} + m\widehat{c}$.

(*f*) $m\angle 2$ si $\widehat{BC} \parallel \widehat{AD}$ y $m\widehat{a} = 70°$.

(*g*) $m\angle 2$ si $\overline{AD}$ es un diámetro y $m\widehat{b} = 80°$.

(*h*) $m\angle 2$ si *ABCD* es un rectángulo y $m\widehat{a} = 70°$.

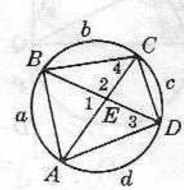


Fig. 6-55

28. Calcule x y y para cada inciso de la figura 6-56. (6.13)

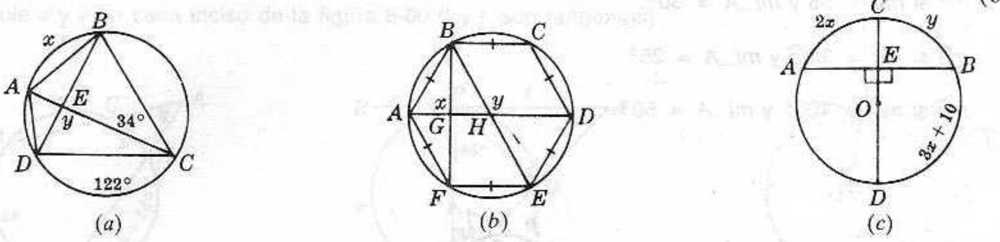


Fig. 6-56

29. Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son secantes que se intersectan como en la figura 6-57, determine: (6.14)

(*a*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 100°$ y $m\widehat{a} = 40°$.

(*b*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} - m\widehat{a} = 74°$.

(*c*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = m\widehat{a} + 40°$.

(*d*) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c}:m\widehat{d} = 1:4:3:2$.

(*e*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 160°$ y $m\angle A = 20°$.

(*f*) $m\widehat{c}$ si $m\widehat{a} = 60°$ y $m\angle A = 35°$.

(*g*) $m\widehat{c} - m\widehat{a}$ si $m\angle A = 47°$.

(*h*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 3\widehat{a}$ y $m\angle A = 25°$.

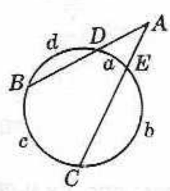


Fig. 6-57

30. Si la tangente $\overline{AP}$ y la secante $\overline{AB}$ se intersectan como se muestra en la figura 6-58, calcule: (6.14)

(*a*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 150°$ y $m\widehat{a} = 60°$.

(*b*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} = 200°$ y $m\widehat{b} = 110°$.

(*c*) $m\angle A$ si $mb = 120°$ y $ma = 70°$.

(*d*) $m\angle A$ si $m\widehat{c} - m\widehat{a} = 73°$.

(*e*) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c} = 1:4:7$.

(*f*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 220°$ y $m\angle A = 40°$.

(*g*) $m\widehat{c}$ si $m\widehat{a} = 55$ y $m\angle A = 30°$.

(*h*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{c} = 3m\widehat{a}$ y $m\angle A = 25°$.

(*i*) $m\widehat{a}$ si $m\widehat{b} = 100°$ y $m\angle A = 50°$.

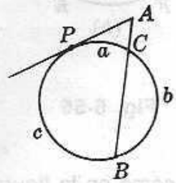


Fig. 6-58

31. Si $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ son tangentes que se intersectan como se muestra en la figura 6-59, determine: (6.14)

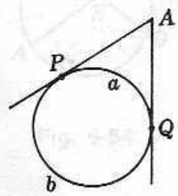


Fig. 6-59

(*a*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 200°$

(*b*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = 95°$

(*c*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = x°$

(*d*) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = (90 - x)°$

(*e*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 3m\widehat{a}$

(*f*) ma si $m\widehat{b} = m\widehat{a} + 50°$

(*g*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} - m\widehat{a} = 84°$

(*h*) $m\angle A$ si $m\widehat{b}:m\widehat{a} = 5:1$

(*i*) $m\angle A$ si $m\widehat{b}:m\widehat{a} = 7:3$

(*j*) $m\angle A$ si $m\widehat{b} = 5m\widehat{a} - 60°$.

(*k*) $m\widehat{a}$ si $m\angle A = 35°$

(*l*) $m\widehat{a}$ si $m\angle A = y°$

(*m*) $m\widehat{b}$ si $m\angle A = 60°$ (*n*) $m\widehat{b}$ si $m\angle A = x°$ (*o*) $m\widehat{b}$ si $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$

32. Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-60 (t y t' son tangentes) (6.14)

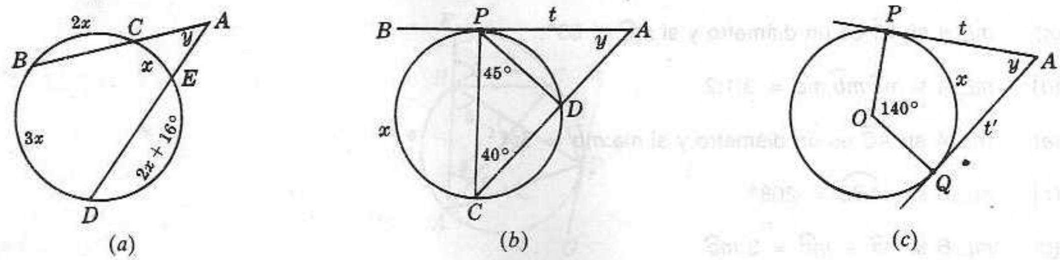


Fig. 6-60

33. Si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son secantes que se intersectan como se muestra en la figura 6-61, calcule: (6.15)

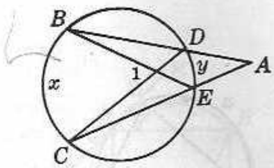


Fig. 6-61

(*a*) $m\widehat{x}$ si $m\angle 1 = 80°$ y $m\angle A = 40°$.

(*b*) $m\widehat{x}$ si $m\angle 1 + m\angle A = 150°$.

(*c*) $m\widehat{x}$ si $\angle 1$ y $\angle A$ son suplementarios.

(*d*) $m\widehat{y}$ si $m\angle 1 = 95$ y $m\angle A = 45°$.

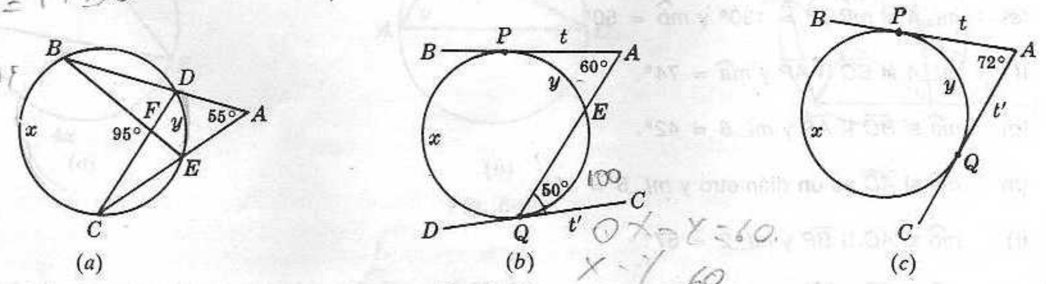
(*e*) $m\widehat{y}$ si $m\angle 1 = m\angle A = 22\frac{1}{2}°$.

(*f*) $m\widehat{y}$ si $m\widehat{x} + m\widehat{y} = 190°$ y $m\angle A = 50°$.

34. Calcule x y y en cada inciso de la figura 6-62 (t y t' son tangentes). (6.15)

$\frac{X-Y}{2} = 55 \Rightarrow$ ① $X - Y = 110$

② $\frac{X+Y}{2} \rightarrow 95$



① $X - Y = 60$

$\frac{X-Y}{2} = 60$

② $X + Y = 260$

Fig. 6-62

35. Si ABC es un triángulo inscrito como se muestra en la figura 6-63, encuentre: (6.16)

(a) $m\angle A$ si $m\widehat{a} = 110°$ y $m\widehat{c} = 200°$.

(b) $m\angle A$ si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $m\widehat{a} = 102°$.

(c) $m\angle A$ si $\overline{AC}$ es un diámetro y si $m\widehat{a} = 80°$.

(d) $m\angle A$ si $m\widehat{a}:m\widehat{b}:m\widehat{c} = 3:1:2$

(e) $m\angle A$ en $\overline{AC}$ es un diámetro y si $ma:mb = 5:4$

(f) $m\angle B$ si $m\widehat{ABC} = 208°$

(g) $m\angle B$ si $m\widehat{a} + m\widehat{b} = 3\, m\widehat{c}$

(h) $m\angle B$ si $m\widehat{a} = 75°$ y $m\widehat{c} = 2m\widehat{b}$

(i) $m\angle C$ si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y si $m\widehat{a} = 5m\widehat{b}$

(j) $m\widehat{c}$ si $m\angle A$: $m\widehat{B}$:$m\angle C$ = 5:4:3

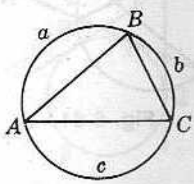


Fig. 6-63

36. Si en la figura 6-64, $ABCP$ es un cuadrilátero inscrito, $\overleftrightarrow{PD}$ es una tangente y $\overrightarrow{AF}$ una secante. Encuentre: (6.16)

(a) $m\angle 1$ si $m\widehat{a} = 94°$ y $m\widehat{c} = 54°$.

(b) $m\angle 2$ si $\overline{AP}$ es un diámetro.

(c) $m\angle 3$ si $m\widehat{CPA} = 250°$.

(d) $m\angle 3$ si $m\angle ABC = 120°$.

(e) $m\angle 4$ si $m\widehat{BCP} = 130°$ y $m\widehat{b} = 50°$.

(f) $m\angle 4$ si $\overline{BC} \parallel \overline{AP}$ y $m\widehat{a} = 74°$.

(g) $m\widehat{a}$ si $\overline{BC} \parallel \overline{AP}$ y $m\angle 6 = 42°$.

(h) $m\widehat{a}$ si $\overline{AC}$ es un diámetro y $m\angle 5 = 35°$.

(i) $m\widehat{b}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{BP}$ y $m\angle 2 = 57°$.

(j) $m\widehat{c}$ si $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$ son diámetros y $m\angle 5 = 41°$.

(*k*) $m\widehat{a}$ si $m\angle 1 = 95°$ y $m\widehat{b} = 95°$.

(*l*) $m\angle CPA$ si $m\angle 3 = 79°$.

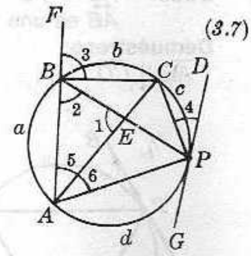


Fig. 6-64

37. Determine x y y en cada inciso de la figura 6-65 (t y t' son tangentes). (6.16)

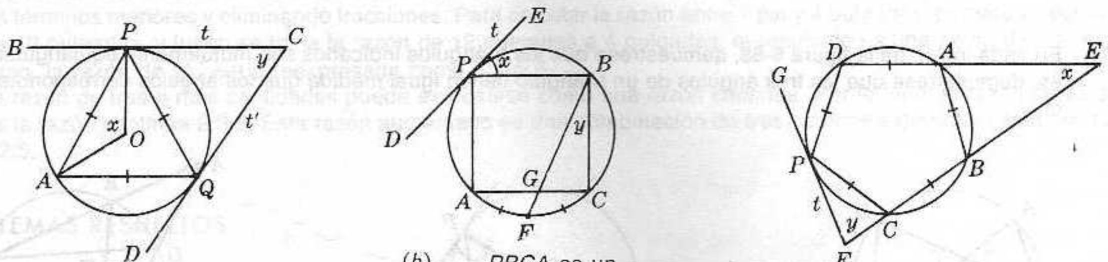


Fig. 6-65

38. Calcular x y y en cada inciso de la figura 6-66. (6.16)

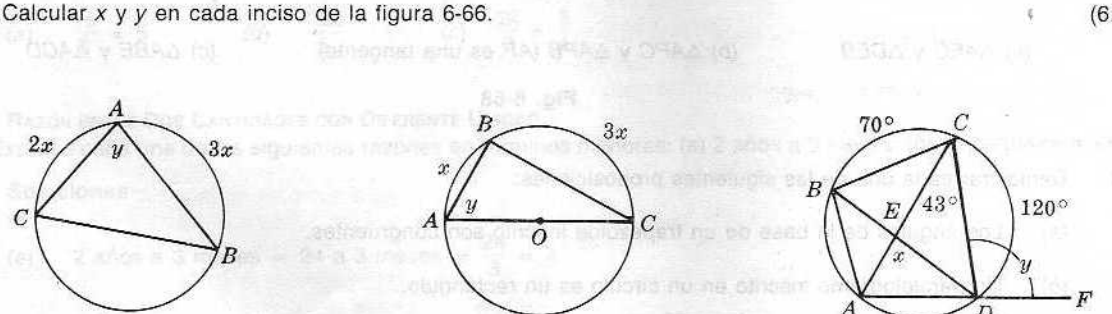


Fig. 6-66

39. Efectúe la demostración requerida en la figura 6-67. (6.17)

(*a*) **Dado:** $\overline{AC}$ bisecta $\angle A$
Demuéstrese:
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$

(*b*) **Dado:** $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
Demuéstrese:
$\overline{AC}$ bisecta $\angle A$

(*c*) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AB}$ es una tangente
Demuéstrese:
$PC = PD$

(*d*) **Dado:** $PC = PD$
$\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente
Demuéstrese:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

(*e*) **Dado:** $m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$
Demuéstrese:
$CE = ED$

(*f*) **Dado:** $CE = EB$
Demuéstrese:
$\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$

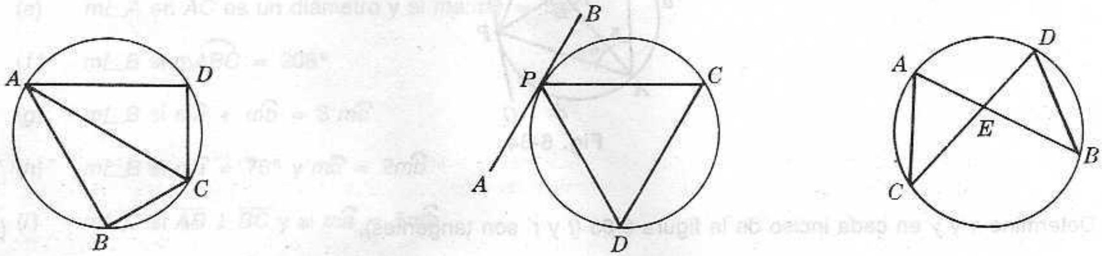
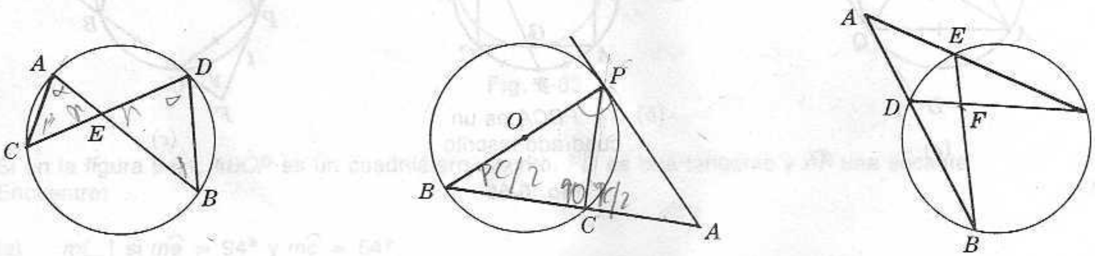


Fig. 6-67

40. En cada inciso de la figura 6-68, demuéstrese que los triángulos indicados son mutuamente equiangulares; esto es, demuéstrese que los tres ángulos de un triángulo tienen igual medida que los ángulos correspondientes del otro. (6.17)



(*a*) $\triangle AEC$ y $\triangle DEB$ (*b*) $\triangle APC$ y $\triangle APB$ (AP es una tangente) (*c*) $\triangle ABE$ y $\triangle ACD$

Fig. 6-68

41. Demostrar cada una de las siguientes proposiciones: (6:18)

(*a*) Los ángulos de la base de un trapezoide inscrito son congruentes.

(*b*) Un paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.

(*c*) En un círculo, las cuerdas paralelas interceptan arcos iguales.

(*d*) Las diagonales dibujadas desde un vértice de un pentágono regular inscrito trisectan al ángulo del vértice.

(*e*) Si una tangente que pasa por un vértice de un triángulo inscrito es paralela a su lado opuesto entonces el triángulo es isósceles.

7

Similitud

7.1 RAZONES

Las *razones* se utilizan para comparar cantidades por medio de la división: la razón de dos cantidades es la primera dividida entre la segunda. Una razón es un número abstracto, es decir, un número sin unidad de medida. Por lo tanto, la razón de 10 pies a 5 pies es 10 pies $\div$ 5 pies, lo cual es igual a 2.

Una razón puede expresarse de las siguientes maneras: (1) por medio del signo de ":", como en 3:4; (2) si se emplea "a" como en 3 a 4; (3) como una fracción común, igual que en $\frac{3}{4}$; (4) como un número decimal, 0.75; y (5) como un porcentaje, 75%.

Las cantidades involucradas en una razón deben tener la misma unidad. Una razón debe simplificarse reduciéndola a sus términos menores y eliminando fracciones. Para calcular la razón entre 1 pie y 4 pulgadas, primero se convierte el pie a 12 pulgadas, y luego se toma la razón de 12 pulgadas a 4 pulgadas; el resultado es una razón de 3 a 1, o 3. Asimismo, la razón de $2\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ sería reexpresada como 5:1 o 5.

La razón de tres o más cantidades puede expresarse como una *razón continua*. Por lo tanto la razón de \$2 a \$3 a \$5 es la razón continua 2:3:5. Esta razón aumentada es una combinación de tres razones separadas; éstas son 2:3, 3:5, y 2:5.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1 Razón entre Dos Cantidades con la Misma Unidad

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 15° a 3°; (*b*) \$1.25 a \$5; (*c*) $2\frac{1}{2}$ años a 2 años.

Soluciones

(*a*) $\dfrac{15}{3} = 5$ (*b*) $\dfrac{1.25}{5}$ (*c*) $\dfrac{2\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$

7.2 Razón entre Dos Cantidades con Diferente Unidad

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 2 años a 3 meses; (*b*) 80 centavos a \$3.20.

Soluciones

(*a*) 2 años a 3 meses = 24 a 3 meses = $\dfrac{24}{3} = 8$

(*b*) 80 centavos a \$3.20 = 80 centavos a 320 centavos = $\dfrac{80}{320} = \dfrac{1}{4}$

7.3 Razón Continua entre Tres Cantidades

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 1 galón a 2 cuartos a 2 pintas; (*b*) 1 tonelada a 1 libra a 8 onzas.

Soluciones

(*a*) 1 galón a 2 cuartos a 2 pintas = 4 cuartos a 2 cuartos a 1 cuarto = 4:2:1.

(*b*) 1 tonelada a 1 libra a 8 onzas = 2 000 libras a 1 libra a $\frac{1}{2}$ libra = 2 000:1:$\frac{1}{2}$ = 4 000:2:1.

7.4 RAZONES NUMÉRICAS Y ALGEBRAICAS

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 50 a 60; (*b*) 6.3 a 0.9; (*c*) 12 a $\frac{3}{8}$; (*d*) $2x$ a $5x$; (*e*) $5s^2$ a s^3; (*f*) x a $5x$ a $7x$.

Soluciones

(*a*) $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ (*d*) $\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

(*b*) $\frac{6.3}{0.9} = 7$ (*e*) $\frac{5s^2}{s^3} = \frac{5}{s}$

(*c*) $12 \div \frac{3}{8} = 32$ (*f*) $x{:}5x{:}7x = 1{:}5{:}7$

7.5 USO DE RAZONES EN PROBLEMAS DE ÁNGULOS

Si dos ángulos están en la razón de 3:2, calcule los ángulos si (*a*) son adyacentes y forman un ángulo que mide de 40°; (*b*) son ángulos agudos de un triángulo rectángulo; (*c*) son dos ángulos de un triángulo cuyo tercer ángulo mide 70°.

Soluciones

Sea la medida de los ángulos $3x$ y $2x$. Entonces:

(*a*) $3x + 2x = 40$, de aquí que $5x = 40$ o $x = 8$; por lo que los ángulos miden 24° y 16°.

(*b*) $3x + 2x = 90$, de aquí que $5x = 90$ o $x = 18$; por lo que los ángulos miden 54° y 36°.

(*c*) $3x + 2x + 70 = 180$, de aquí que $5x = 110$ o $x = 22$; por lo que los ángulos miden 66° y 44°.

7.6 TRES ÁNGULOS QUE TIENEN UNA RAZÓN FIJA

Tres ángulos están en la razón de 4:3:2. Calcule los ángulos si (*a*) el primero y el tercero son suplementarios; (*b*) los ángulos son los tres ángulos de un triángulo.

Soluciones

Sea la medida de los ángulos $4x$, $3x$ y $2x$. Entonces:

(*a*) $4x + 2x = 180$, de aquí que $6x = 180$ o $x = 30$; por lo que los ángulos miden 120°, 90° y 60°.

(*b*) $4x + 3x + 2x = 180$, de aquí que $9x = 180$ o $x = 20$; por lo que los ángulos miden 80°, 60° y 40°.

7.2 PROPORCIONES

Una *proporción* es una igualdad de dos razones. Así, 2:5 = 4:10 (o $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$) es una proporción.

El cuarto término de una proporción es la *cuarta proporcional* a los otros tres tomados en orden. Así, en 2:3 = 4:x, x es la cuarta proporcional a 2, 3, y 4.

Los *medios* de una proporción son sus términos intermedios, esto es, su segundo y tercer términos. Los *extremos* de una proporción son sus términos externos, esto es, su primer y cuarto términos. Por lo tanto, en $a{:}b = c{:}d$, los medios son b y c, y los extremos son a y d.

Si los dos medios de una proporción son iguales, cualquier medio es la media proporcional entre el primero y el cuarto términos. Así, en $9{:}3 = 3{:}1$, 3 es la media proporcional entre 9 y 1.

7.2A Principios sobre proporciones

PRINCIPIO 1: *en cualquier proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

De este modo, si $a{:}b = c{:}d$, entonces $ad = bc$.

PRINCIPIO 2: *si el producto de dos números es igual al producto de otros dos números, cualquier par puede ocupar los medios de una proporción y el otro par ocupa los extremos.*

Si $3x = 5y$, entonces $x{:}y = 5{:}3$ o $3{:}y = 5{:}x$ o $5{:}x = 3{:}y$.

7.2B Métodos para convertir una proporción en una proporción equivalente

PRINCIPIO 3: (método de inversión) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se invierte cada una de las razones.*

De este modo, si $\frac{1}{x} = \frac{4}{5}$, entonces $\frac{x}{1} = \frac{5}{4}$.

PRINCIPIO 4: (método de alternación) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se intercambian los medios o los extremos.*

Así, si $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, entonces $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3} = \frac{y}{x}$.

PRINCIPIO 5: (método de adición) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se adicionan términos en cada una de las razones para obtener nuevos términos primero y tercero.*

Por lo tanto, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Si $\frac{x-2}{2} = \frac{9}{1}$, entonces $\frac{x}{2} = \frac{10}{1}$.

PRINCIPIO 6: (método de sustracción) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente al sustraer términos en cada una de las razones, para obtener nuevos términos primero y tercero.*

Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Si $\frac{x+3}{3} = \frac{9}{1}$, entonces $\frac{x}{3} = \frac{8}{1}$.

7.2C Otros principios sobre proporciones

PRINCIPIO 7: *si tres términos de una proporción son iguales a tres términos de otra proporción, los términos restantes son iguales.*

De este modo, si $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ y $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$, entonces $y = 4$.

$5x = 3y$ $x = \frac{3y}{5}$ $x = \frac{12}{5}$ $\frac{12}{5} = \frac{3y}{5}$

$y = 4$

PRINCIPIO 8: *en una serie de razones iguales, la suma de cualquiera de los numeradores es a la suma de sus denominadores correspondientes, como cualquier numerador a su denominador.*

Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$. Si $\frac{x-y}{4} = \frac{x-3}{5} = \frac{3}{1}$, entonces $\frac{x-y+y-3+3}{4+5+1} = \frac{3}{1}$ o $\frac{x}{10} = \frac{3}{1}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.7 CÁLCULO DE INCÓGNITAS EN LAS PROPORCIONES

Resuelva las siguientes proporciones para x:

(*a*) $x:4 = 6:8$ (*c*) $x:5 = 2x:(x + 3)$ (*e*) $\dfrac{x}{2x - 3} = \dfrac{3}{5}$

(*b*) $3:x = x:27$ (*d*) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{5}$ (*f*) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{7}{x + 2}$

Soluciones

(*a*) Como $4(6) = 8x$, $8x = 24$ o $x = 3$.

(*b*) Como $x^2 = 3(27)$, $x^2 = 81$ o $x = \pm 9$.

(*c*) Como $5(2x) = x(x + 3)$, se tiene $10x = x^2 + 3x$. Entonces $x^2 - 7x = 0$, de modo que $x = 0$ o 7.

(*d*) Como $2x = 3(5)$, $2x = 15$ o $x = 7\frac{1}{2}$.

(*e*) Como $3(2x - 3)$, se tiene $6x - 9 = 5x$, de modo que $x = 9$.

(*f*) Como $4(7) = (x - 2)(x + 2)$, se tiene $28 = x^2 - 4$. Entonces $x^2 = 32$, de modo que $x = \pm 4\sqrt{2}$.

7.8 CÁLCULO DE LA CUARTA PROPORCIONAL DE TRES NÚMEROS DADOS

Calcule la cuarta proporcional de (*a*) 2, 4, 6; (*b*) 4, 2, 6; (*c*) $\frac{1}{2}$, 3, 4; (*d*) b, d, c.

Soluciones

(*a*) Se tiene $2:4 = 6:x$, de modo que $2x = 24$ o $x = 12$.

(*b*) Se tiene $4:2 = 6:x$, de modo que $4x = 12$ o $x = 3$.

(*c*) Se tiene $\frac{1}{2}:3 = 4:x$, de modo que $\frac{1}{2}x = 12$ o $x = 24$.

(*d*) Se tiene $b:d = c:x$, de modo que $bx = cd$ o $x = cd/b$.

7.9 CÁLCULO DE LA MEDIA PROPORCIONAL DE DOS NÚMEROS DADOS

Calcule la media proporcional positiva x entre (*a*) 5 y 20; (*b*) $\frac{1}{2}$ y $\frac{8}{9}$.

Soluciones

(*a*) Se tiene $5:x = x:20$, de modo que $x^2 = 100$ o $x = 10$.

(*b*) Se tiene $\frac{1}{2}:x = x:\frac{8}{9}$, de modo que $x^2 = \frac{4}{9}$ o $x = \frac{2}{3}$.

7.10 CONVERSIÓN DE PRODUCTOS IGUALES EN PROPORCIONES

(*a*) Construya una proporción cuyo cuarto término sea x, tal que $2bx = 3s^2$.

(*b*) Calcule la razón x a y si $ay = bx$.

Soluciones

(*a*) $2b{:}3s = s{:}x$ o $2b{:}3 = s^2{:}x$ o $2b{:}s^2 = 3{:}x$

(*b*) $x{:}y = a{:}b$

7.11 CONVERSIÓN DE PROPORCIONES EN NUEVAS PROPORCIONES

Utilice cada una de las siguientes proporciones para formar una nueva proporción cuyo primer término sea x:

(*a*) $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$ (*b*) $\frac{x-6}{6} = \frac{5}{3}$

(*c*) $\frac{x+8}{8} = \frac{8}{3}$ (*d*) $\frac{5}{2} = \frac{15}{x}$

Soluciones

(*a*) Por el principio 3, $\frac{x}{15} = \frac{4}{3}$.

(*b*) Por el principio 5, $\frac{x}{6} = \frac{8}{3}$.

(*c*) Por el principio 6, $\frac{x}{8} = \frac{1}{3}$.

(*d*) Por el principio 4, $\frac{x}{2} = \frac{15}{5}$.

7.12 COMBINACIÓN DE NUMERADORES Y DENOMINADORES DE PROPORCIONES

Utilice el principio 8 para calcular x en cada una de las siguientes proporciones:

(*a*) $\frac{x-2}{9} = \frac{2}{3}$ (*b*) $\frac{x+y}{8} = \frac{x-y}{4} = \frac{2}{3}$ (*c*) $\frac{3x-y}{15} = \frac{y-3}{10} = \frac{3}{5}$.

Soluciones

(*a*) Al sumar numeradores y denominadores se obtiene $\frac{x-2+2}{9+3} = \frac{2}{3}$ o $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$, de modo que $x = 8$.

(*b*) Se tiene $\frac{(x+y)+(x-y)}{8+4} = \frac{2}{3}$, de aquí resulta $\frac{2x}{12} = \frac{2}{3}$, de modo que $x = 4$.

(*c*) Se utilizan las tres razones para obtener $\frac{(3x-y)+(y-3)+3}{15+10+5} = \frac{3}{5}$ o $\frac{3x}{30} = \frac{3}{5}$, de modo que $x = 6$.

7.3 SEGMENTOS PROPORCIONALES

Si dos segmentos se dividen proporcionalmente, (1) los nuevos segmentos correspondientes son proporcionales, y (2) los dos segmentos originales y cualquier par de nuevos segmentos correspondientes son proporcionales.

Así, si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en la figura 7-1 se dividen proporcionalmente por $\overline{DE}$, se puede escribir una proporción como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ utilizando los cuatro segmentos; o se puede escribir una proporción como $\frac{a}{AB} = \frac{c}{AC}$ utilizando los dos segmentos originales y dos de los nuevos segmentos.

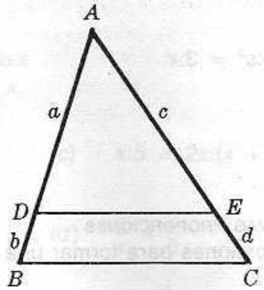
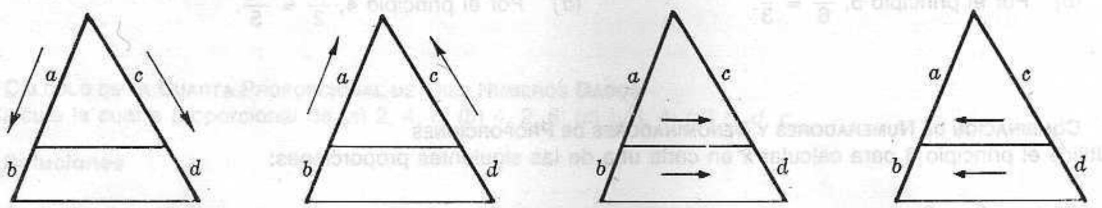


Fig. 7-1

7.3A Obtención de las ocho disposiciones de cualquier proporción

Una proporción como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ puede reescribirse en ocho formas. Para obtener las ocho variaciones, se permite que cada término de la proporción represente a uno de los nuevos segmentos de la figura 7-1. Se obtienen dos de las posibles proporciones, de cada dirección, de la siguiente manera:



Dirección: hacia abajo
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

Dirección: hacia arriba
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ o $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Dirección: hacia la derecha
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ o $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

Dirección: hacia la izquierda
$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ o $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

7.3B Principios sobre segmentos proporcionales

Principio 1: *si una línea es paralela a un lado de un triángulo, entonces ésta divide a los otros dos lados proporcionalmente.*

De este modo, en el $\triangle ABC$ de la figura 7-2, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

TEO · TALES

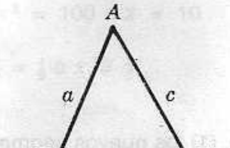


Fig. 7-2

Tec. Thales

Principio 2: *si una línea divide proporcionalmente a dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.* (Los principios 1 y 2 son conversos.)

Así, en el $\triangle ABC$ (Fig. 7-2), si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Principio 3: *tres o más paralelas dividen proporcionalmente a dos transversales cualesquiera.*

Por ello, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ en la figura 7-3, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

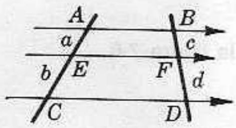


Fig. 7-3

Principio 4: *la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los lados adyacentes.*

De este modo, en el $\triangle ABC$ de la figura 7-4, si $\overline{CD}$ bisecta al $\angle C$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

TEO. BISECTRIZ

$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$

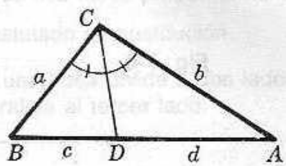


Fig. 7-4

PROBLEMAS RESUELTOS

7.13 Aplicación del Principio 1

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-5

$\frac{x}{12} = \frac{28}{14}$

$x = \frac{28 \cdot 12}{14}$

$x = 24$

$\frac{x}{x+4} = \frac{5}{7}$

$7x = 5(x+4)$

$7x = 5x+20$

$2x = 20$

$x = 10$

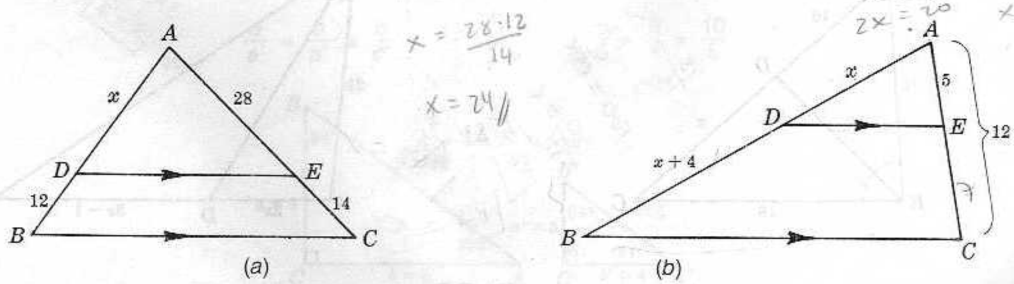


Fig. 7-5

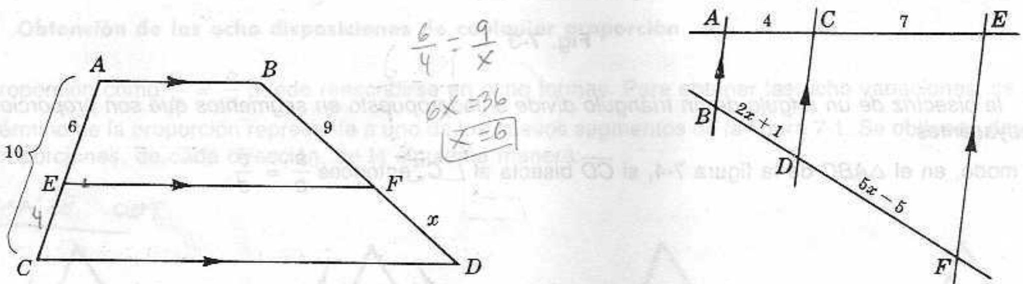
Soluciones

(*a*) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; de aquí $\dfrac{x}{12} = \dfrac{28}{14}$, de modo que $x = 24$.

(*b*) Se tiene que $EC = 7$ y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$; de aquí $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{5}{7}$. Entonces, $7x = 5x + 20$ y $x = 10$.

7.14 Aplicación del Principio 3

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-6



$\dfrac{6}{4} = \dfrac{9}{x}$

$6x = 36$

$\boxed{x = 6}$

Fig. 7-6

$\dfrac{2x+1}{5x-5} = \dfrac{4}{7}$

$7(2x+1) = 4(5x-5)$

$14x + 7 = 20x - 20$

$27 = 6x$

$\dfrac{27}{6} = x \quad 4.5 \times 5 \quad 4\tfrac{1}{2} \; \dfrac{9}{2}$

Soluciones

(*a*) Se tiene $EC = 4$ y $\overline{AB} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{CD}$; de aquí $\dfrac{x}{9} = \dfrac{4}{6}$ y $x = 6$.

(*b*) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; de aquí $\dfrac{5x-5}{2x+1} = \dfrac{7}{4}$, de lo que $20x - 20 = 14x + 7$. Entonces $6x = 27$ y $x = 4\tfrac{1}{2}$.

$\dfrac{21}{30} = \dfrac{2x}{3x-1}$

$21(3x-1) = 60x$

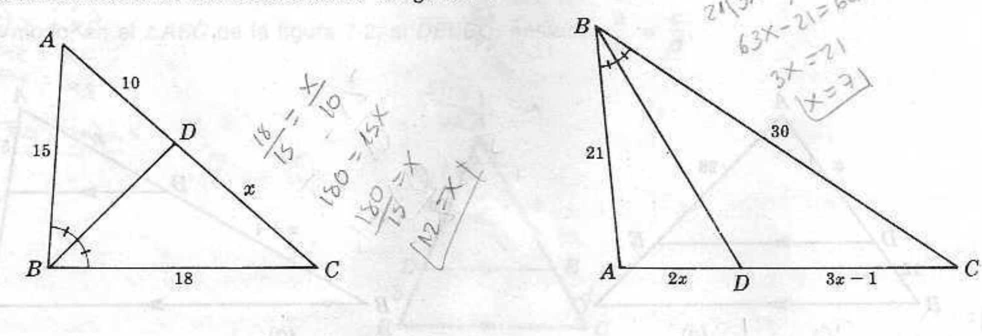
$63x - 21 = 60x$

$3x = 21$

$\boxed{x = 7}$

7.15 Aplicación del Principio 4

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-7



$\dfrac{18}{15} = \dfrac{x}{10}$

$180 = 15x$

$\dfrac{180}{15} = x$

$\boxed{12 = x}$

Fig. 7-7

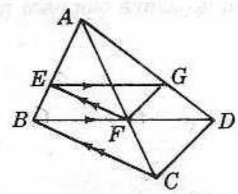
Soluciones

(*a*) $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$; de aquí $\dfrac{x}{10} = \dfrac{18}{15}$ y $x = 12$. ✓

(*b*) $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$; de aquí $\dfrac{3x-1}{2x} = \dfrac{30}{21} = \dfrac{10}{7}$. De modo que $21x - 7 = 20x$ y $x = 7$. ✓

7.16 Resolución de un Problema sobre Segmentos Proporcionales

Dado: $\overline{EG} \parallel \overline{BD}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$
Demuéstrese: $\overline{FG} \parallel \overline{CD}$
Plan: Demuéstrese que FG divide a $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ proporcionalmente.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{EG} \parallel \overline{BD}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$	1. Dado
2. $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AG}{GD}$, $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{FC}$	2. Una línea (segmento) paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados proporcionalmente.
3. $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AG}{GD}$	3. Postulado de sustitución.
4. $\overline{FG} \parallel \overline{CD}$	4. Si una línea divide a dos lados de un triángulo proporcionalmente, es paralela al tercer lado.

7.4 TRIÁNGULOS SIMILARES

Los *polígonos similares* son aquellos cuyos ángulos correspondientes son congruentes y cuyos lados correspondientes son proporcionales. Los polígonos similares tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño.

El símbolo para "similar" es $\sim$. La notación $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se lee como "el triángulo ABC es similar al triángulo A-prima B-prima C-prima". Como en el caso de triángulos congruentes, *los lados correspondientes de los triángulos similares aparecen opuestos a ángulos congruentes*. (Nótese que los lados y ángulos correspondientes se designan comúnmente con las mismas letras, agregándoles primas.)

En la figura 7-8 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ya que

$$m\angle A = m\angle A' = 37° \qquad m\angle B = m\angle B' = 53° \qquad m\angle C = m\angle C' = 90°$$

y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \text{o} \qquad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$$

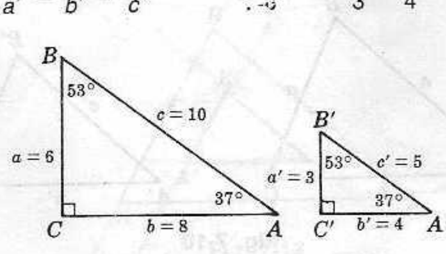


Fig. 7-8

7.4A Selección de triángulos similares para demostrar una proporción

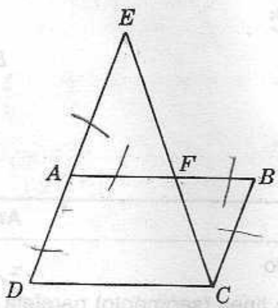
En el problema resuelto 7.25, se supone que *ABCD*, en una figura como la figura 7-9, es un paralelogramo, y se deb demostrar que $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$. Para demostrar esta proporción, es necesario encontrar triángulos similares cuyos lados estén en la misma proporción. Esto se puede hacer seleccionando el triángulo cuyas letras *A*, *E* y *F* estén en los numera dores y el triángulo cuyas letras *B*, *C* y *F* estén en los denominadores. De este modo se probaría que $\triangle AEF \sim \triangle BCF$

Suponga que la proporción que se va a demostrar es $\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{FB}$. En un caso como éste, el hecho de intercambia los medios conduce a $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$. Se pueden seleccionar entonces los triángulos necesarios con base en los numerado res y los denominadores.

¿ $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$?

$\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{FB}$

$\triangle AEF \sim \triangle BCF$



$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{FB}$

BC

Fig. 7-9

Suponga que la proporción que se va a demostrar es $\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{FB}$. Entonces, el método para seleccionar triángulos no puede utilizarse hasta que el término *AD* sea reemplazado por *BC*. Esto es posible ya que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son lados opuestos del paralelogramo *ABCD* y por lo tanto, son congruentes.

7.4B Principios sobre triángulos similares

PRINCIPIO 1: *los ángulos correspondientes de triángulos similares son congruentes.* (Por definición.)

PRINCIPIO 2: *los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.* (Por definición.)

PRINCIPIO 3: *dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.*

Así, en la figura 7-10, si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

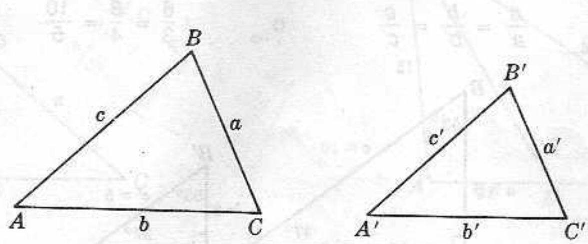


Fig. 7-10

Principio 4: *dos triángulos son similares si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo del otro y los lados que incluyen estos ángulos son proporcionales.*

Por ello, en la figura 7-10, si $\angle C \cong \angle C'$ y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Principio 5: *dos triángulos son similares si sus lados correspondientes son proporcionales.*

En la figura 7-10, si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Principio 6: *dos triángulos rectángulos son similares si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.* (Corolario del principio 3.)

Principio 7: *una línea paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo similar al triángulo dado.*

En la figura 7-11, si $\overline{DE} \| \overline{BC}$, entonces $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

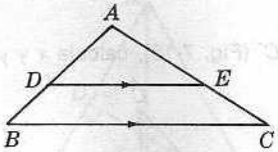


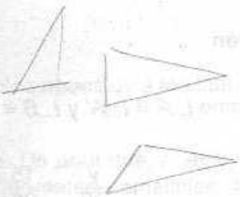
Fig. 7-11

Principio 8: *los triángulos similares a un mismo triángulo son similares entre sí.*

Principio 9: *la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos que son similares al triángulo dado y entre sí.*

Así, en la figura 7-12, $\triangle CDA \sim \triangle CDB \sim \triangle ABC$.

Teo. Euclides



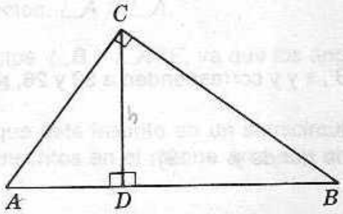


Fig. 7-12

Principio 10: *dos triángulos son similares si sus lados respectivos son paralelos entre sí.*

En la figura 7-13, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

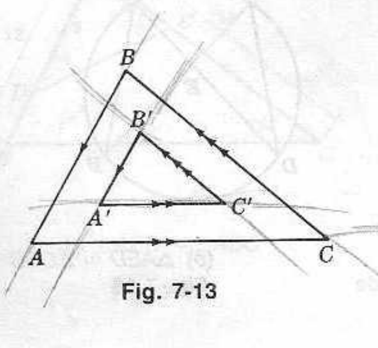


Fig. 7-13

Principio 11: *dos triángulos son similares si sus lados respectivos son perpendiculares entre sí.*
Así, en la figura 7-14, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

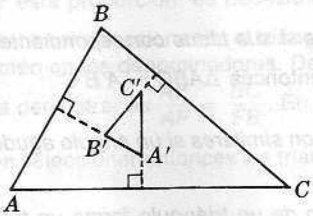


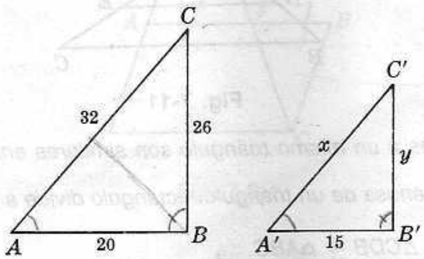
Fig. 7-14

PROBLEMAS RESUELTOS

7.17 Aplicación del Principio 2

En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ (Fig. 7-15), calcule x y y si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$.

$\frac{20}{15} = \frac{32}{x} =$



$\frac{x}{32} =$

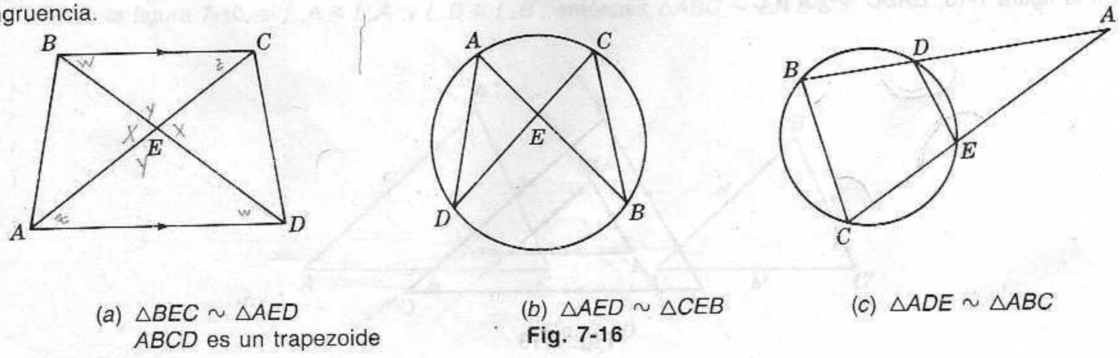
Fig. 7-15

Solución

Como $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong B'$, x y y corresponden a 32 y 26, respectivamente. Entonces $\frac{x}{32} = \frac{15}{20}$, de donde $x = 24$; asimismo $\frac{y}{26} = \frac{15}{20}$, de donde $y = 19\frac{1}{2}$.

7.18 Aplicación del Principio 3

En cada una de las secciones de la figura 7-16, se pueden utilizar dos pares de ángulos congruentes para demostrar que los triángulos indicados son similares. Determine los ángulos congruentes y especifique la razón de su congruencia.



(*a*) $\triangle BEC \sim \triangle AED$
$ABCD$ es un trapezoide

(*b*) $\triangle AED \sim \triangle CEB$

(*c*) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Fig. 7-16

Soluciones

(*a*) $\angle CBD \cong \angle BDA$ y $\angle BCA \cong \angle CAD$, ya que los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$). Además, $\angle BEC$ y $\angle AED$ son ángulos congruentes opuestos por el vértice.

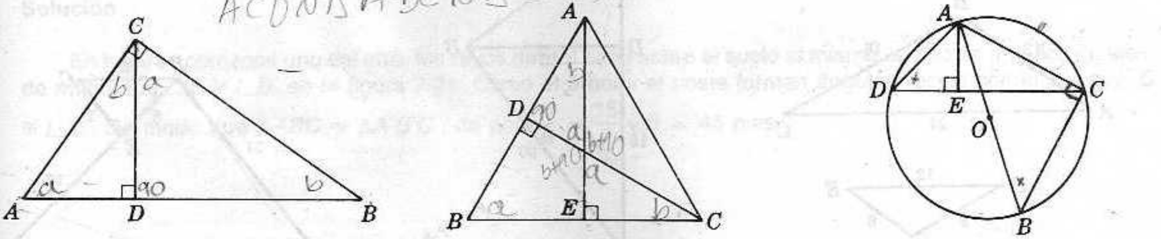
(*b*) $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$, ya que los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes. Además, $\angle AED$ y $\angle CEB$ son ángulos congruentes opuestos por el vértice.

(*c*) $\angle ABC \cong \angle AED$, ya que cada uno es suplemento del $\angle DEC$. $\angle ACB \cong \angle ADE$, ya que cada uno es suplemento del $\angle BDE$. Además, $\angle A \cong \angle A$.

7.19 Aplicación del Principio 6

En cada sección de la figura 7-17, determine los ángulos que pueden utilizarse para demostrar que los triángulos indicados son similares.

ACD ∼ ΔABC ∼ ΔCBD



(*a*) $\triangle ACD \sim \triangle ACB$ (*b*) $\triangle AEC \sim \triangle CDB$, $AB = AC$ (*c*) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\overline{AB}$ es un diámetro

ΔCD ∼ ΔABC

Fig. 7-17

Soluciones

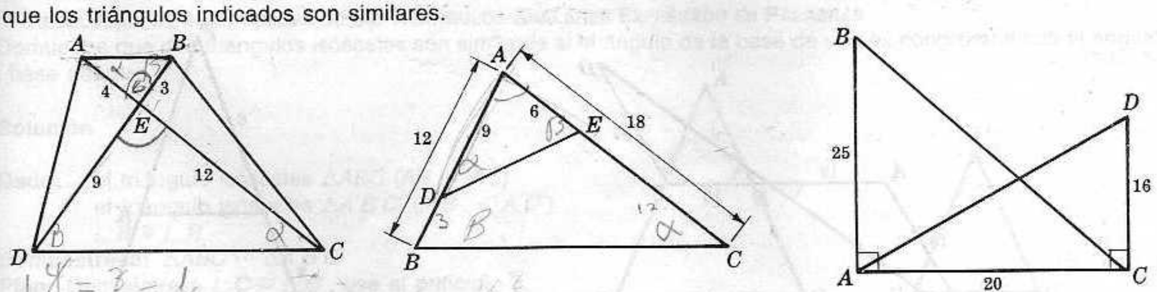
(*a*) $\angle ACB$ y $\angle ADC$ son ángulos rectos. $\angle A \cong \angle A$.

(*b*) $\angle AEC$ y $\angle BDC$ son ángulos rectos. $\angle B \cong \angle ACE$, ya que los ángulos opuestos a los lados congruentes en un triángulo son congruentes.

(*c*) $\angle ACB$ es un ángulo recto, ya que está inscrito en un semicírculo. De aquí que, $\angle AED \cong \angle ACB$. $\angle D \cong \angle B$ ya que los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.

7.20 Aplicación del Principio 4

En cada sección de la figura 7-18, determine el par de ángulos congruentes y la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares.



$\frac{x}{12} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(*a*) $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ (*b*) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (*c*) $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

Fig. 7-18

$\frac{9}{6} = \frac{18}{12}$

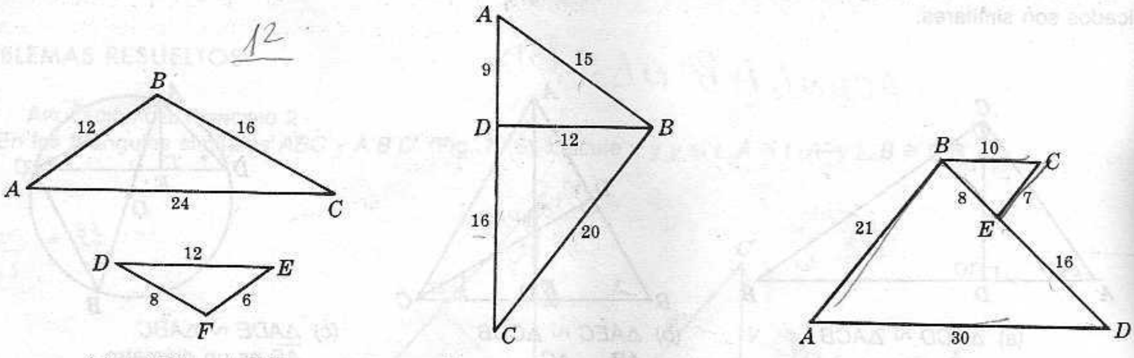
Soluciones

(*a*) $\angle AEB \cong \angle DEC$; $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ (*e*) $\angle BAC \cong \angle ACD$; $\frac{20}{16} = \frac{25}{20}$

(*b*) $\angle A \cong \angle A$; $\frac{6}{12} = \frac{9}{18}$

7.21 Aplicación del Principio 5

En cada una de las secciones de la figura 7-19, determine la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares.



(*a*) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (*b*) $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (*c*) $\triangle ABD \sim \triangle BEC$

Fig. 7-19

Soluciones

(*a*) $\frac{6}{12} = \frac{8}{16} = \frac{12}{24}$ (*c*) $\frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{10}{30}$

(*b*) $\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$

7.22 Proporciones que se Obtienen de los Triángulos Similares

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-20

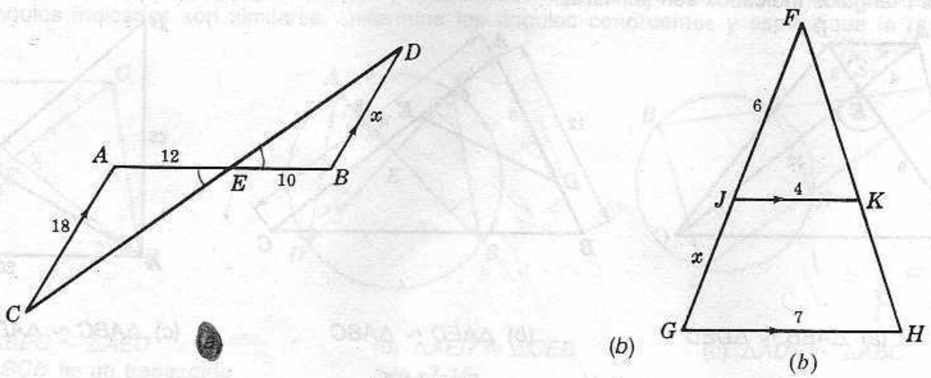


Fig. 7-20

Soluciones

(*a*) Como $\overline{BD} \| \overline{AC}$, $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$; por lo que $\triangle AEC \sim \triangle DEB$. Entonces $\dfrac{x}{18} = \dfrac{10}{12}$ y $x = 15$.

(*b*) Como $\overline{JK} \| \overline{GH}$, $\triangle FJK \sim \triangle FGH$ por el principio 7. Por lo que $\dfrac{6}{x+6} = \dfrac{4}{7}$ y $x = 4\frac{1}{2}$.

7.23 CÁLCULO DE ALTURAS POR MEDIO DE LA SOMBRA EN EL SUELO

Un árbol proyecta una sombra de 15 pies al mismo tiempo que un poste vertical cercano de 6 pies de altura produce una sombra de 2 pies. Calcule la altura del árbol si ambos, el árbol y el poste, forman ángulos rectos con el suelo.

Solución

En lugares cercanos uno del otro, los rayos del sol caen sobre el suelo al mismo tiempo en ángulos iguales; de modo que $\angle B \cong \angle B'$ en la figura 7-21. Como el árbol y el poste forman ángulos rectos con el suelo, $\angle C \cong \angle C'$. De modo que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, de aquí $\dfrac{h}{6} = \dfrac{15}{2}$ y $h = 45$ pies.

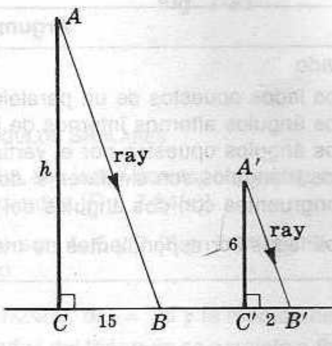


Fig. 7-21

7.24 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE TRIÁNGULOS SIMILARES EXPRESADO EN PALABRAS

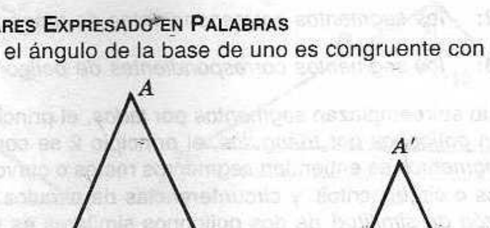
Demuestre que dos triángulos isósceles son similares si el ángulo de la base de uno es congruente con el ángulo de la base del otro.

Solución

Dado: el triángulo isósceles $\triangle ABC$ ($AB = AC$)
el triángulo isósceles $\triangle A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$)
$\angle B \cong \angle B'$

Demuéstrese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Plan: Demuéstrese $\angle C \cong \angle C'$, use el principio 3.



DEMOSTRACIÓN:

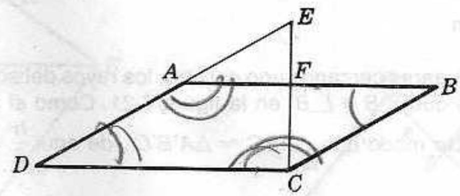
Proposiciones	Argumentos
1. $\angle B \cong \angle B'$	1. Dado
2. $\angle B \cong \angle C$, $\angle B' \cong \angle C'$	2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
3. $\angle C \cong \angle C'$	3. Las cosas ≅ a las cosas ≅ son ≅ entre sí.
4. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	4. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro.

7.25 Resolución de un Problema sobre Proporciones que Involucra Triángulos Semejantes

Dado: el paralelogramo $ABCD$

Demuéstrese: $\dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AF}{BF}$

Plan: Demuéstrese $\triangle AEF \sim \triangle BFC$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $ABCD$ es un paralelogramo.	1. Dado
2. $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$	2. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.
3. $\angle DEC \cong \angle ECB$	3. Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.
4. $\angle EFA \cong \angle BFC$	4. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
5. $\triangle AEF \sim \triangle BFC$	5. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro.
6. $\dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AF}{BF}$	6. Los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.

7.5 EXTENSIÓN DE UN PRINCIPIO BÁSICO SOBRE PROPORCIONES

Principio 1: *los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.*

Principio 2: *los segmentos correspondientes de triángulos similares son proporcionales.*

Principio 3: *los segmentos correspondientes de polígonos similares son proporcionales.*

Cuando se reemplazan *segmentos* por *lados*, el principio 1 se convierte en el principio 2 más general. Cuando se reemplazan *polígonos* por *triángulos*, el principio 2 se convierte en el principio 3, aún más general.

Por *segmentos* se entienden segmentos rectos o curvos tales como alturas, medianas, bisectrices, radios de círculos inscritos o circunscritos, y circunferencias de círculos inscritos o circunscritos.

La *razón de similitud* de dos polígonos similares es la razón de cualquier par de líneas correspondientes.

Los corolarios de los principios 2 y 3, como los siguientes, se pueden inventar para cualquier combinación de líneas correspondientes:

1. Las *alturas* correspondientes de triángulos similares tienen la misma razón, como dos *medianas* correspondientes cualquiera. Así, si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ en la figura 7-22, entonces $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{m}{m'}$.

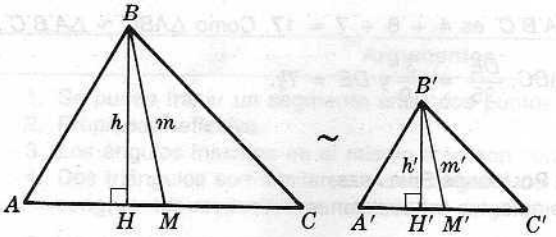


Fig. 7-22

2. Los *perímetros* de los polígonos similares están en la misma razón que dos *lados* correspondientes cualesquiera. Así, en la figura 7-23, si el cuadrilátero I es $\sim$ al cuadrilátero I′, entonces $\frac{34}{17} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{6}{5} = \frac{14}{7}$.

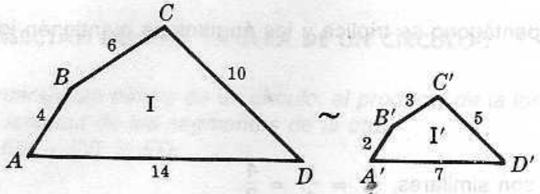


Fig. 7-23

PROBLEMAS RESUELTOS

7.26 Razones Entre Líneas de Triángulos Similares

(*a*) En dos triángulos similares, los lados correspondientes están en proporción de 3:2. Calcule la razón de sus medianas correspondientes [Fig. 7-24(*a*)].

(*b*) Los lados de un triángulo son 4, 6 y 7 [Fig. 7-24(*b*)]. Si el perímetro de un triángulo similar es de 51, calcule su lado más largo.

(*c*) En el $\triangle ABC$ de la figura 7-24(*c*), $BC = 25$ y la medida de la altura sobre $\overline{BC}$ es de 10. Un segmento de línea que termina en los lados del triángulo es paralelo a $\overline{BC}$ y está a 3 unidades de A. Calcule su longitud.

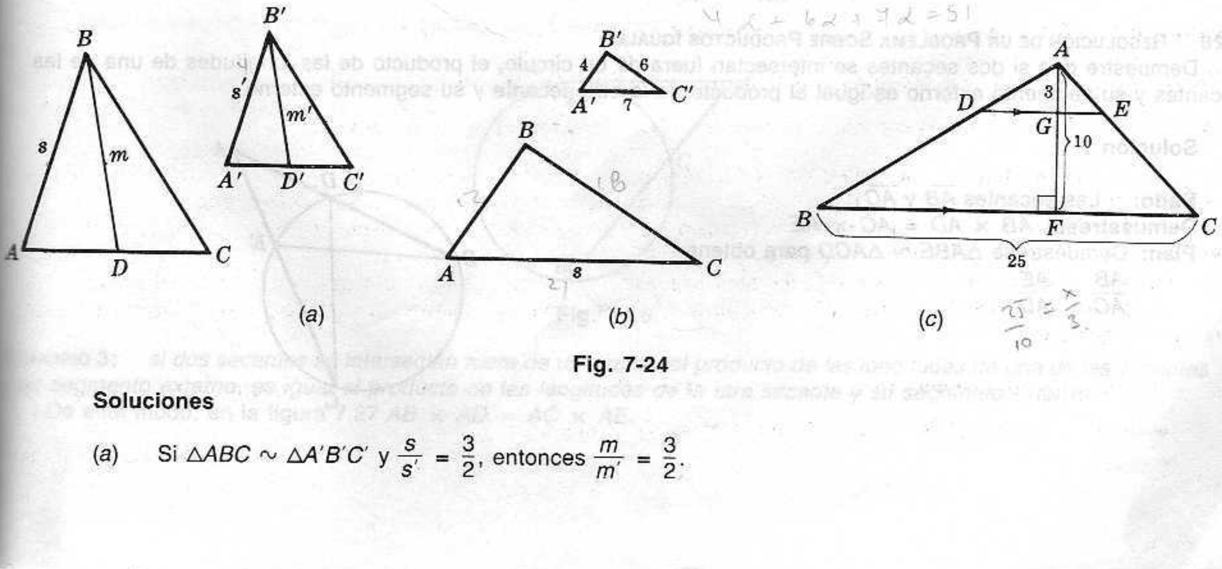


Fig. 7-24

Soluciones

(*a*) Si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y $\frac{s}{s'} = \frac{3}{2}$, entonces $\frac{m}{m'} = \frac{3}{2}$.

(*b*) El perímetro del $\triangle A'B'C'$ es $4 + 6 + 7 = 17$. Como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\frac{s}{7} = \frac{51}{17}$ y $s = 21$.

(*c*) Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\frac{DE}{25} = \frac{3}{10}$ y $DE = 7\frac{1}{2}$.

7.27 Razones Entre Líneas de Polígonos Similares

Complete cada una de las siguientes proposiciones:

(*a*) Si los lados correspondientes de dos polígonos similares están en la proporción de 4:3, entonces la razón de sus perímetros es de __?__.

(*b*) El perímetro de dos cuadriláteros similares es de 30 y 40 respectivamente. Si un lado del cuadrilátero menor es 8, el lado correspondiente del mayor es de __?__.

(*c*) Si cada lado de un pentágono se triplica y los ángulos se mantienen iguales, entonces cada diagonal es __?__.

Soluciones

(*a*) Como los polígonos son similares, $\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'} = \frac{4}{3}$.

(*b*) Como los cuadriláteros son similares, $\frac{s}{s'} = \frac{p}{p'}$. Entonces $\frac{s}{8} = \frac{30}{24}$ y $s = 10$.

(*c*) Triplíquese, ya que los polígonos son similares si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

7.6 DEMOSTRACIÓN DE PRODUCTOS IGUALES DE LONGITUDES DE SEGMENTOS

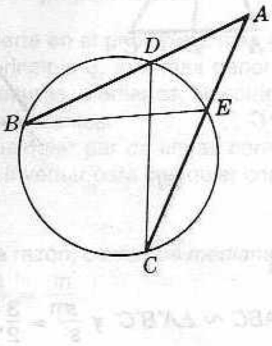
En un problema, para demostrar que el producto de la longitud de dos segmentos es igual al producto de la longitud de otro par de segmentos, es necesario establecer la proporción que conduce a los dos productos iguales.

PROBLEMA RESUELTO

7.28 Resolución de un Problema Sobre Productos Iguales

Demuestre que si dos secantes se intersectan fuera de un círculo, el producto de las longitudes de una de las secantes y su segmento externo es igual al producto de la otra secante y su segmento externo.

Solución



Dado: Las secantes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

Demuéstrese: $AB \times AD = AC \times AE$

Plan: Demuéstrese $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ para obtener $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$.	1. Se puede trazar un segmento entre dos puntos cualesquiera.
2. $\angle A \cong \angle A$	2. Propiedad reflexiva.
3. $\angle B \cong \angle C$	3. Los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.
4. $\triangle AEB \sim \triangle ADC$	4. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.
5. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$	5. Los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.
6. $AB \times AD = AC \times AE$	6. En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

7.7 SEGMENTOS QUE SE INTERSECTAN DENTRO Y FUERA DE UN CÍRCULO

Principio 1: *si dos cuerdas se intersectan dentro de un círculo, el producto de la longitud de los segmentos de una cuerda es igual al producto de la longitud de los segmentos de la otra.*

Así, en la figura 7.25, $AE \times EB = CE \times ED$.

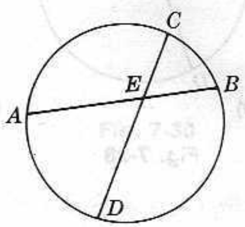


Fig. 7-25

Principio 2: *si una tangente y una secante se intersectan fuera de un círculo, la tangente es la media proporcional entre la secante y su segmento externo.*

Por ello, en la figura 7.26, si $\overline{PA}$ es una tangente, entonces $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AP}{AC}$.

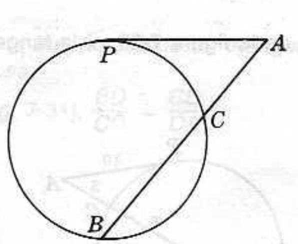


Fig. 7-26

Principio 3: *si dos secantes se intersectan fuera de un círculo, el producto de las longitudes de una de las secantes y su segmento externo, es igual al producto de las longitudes de la otra secante y su segmento externo.*

De este modo, en la figura 7.27 $AB \times AD = AC \times AE$.

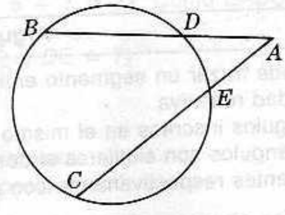
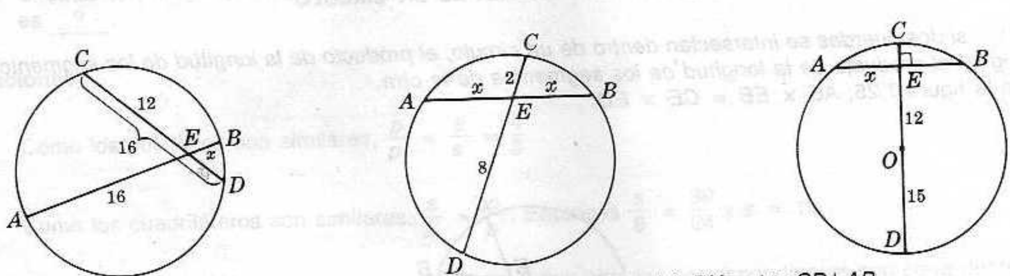


Fig. 7-27

PROBLEMAS RESUELTOS

7.29 Aplicación del Principio 1

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-28, si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en E.



(a) (b) (c) Diámetro $CD \perp AB$

Fig. 7-28

Soluciones

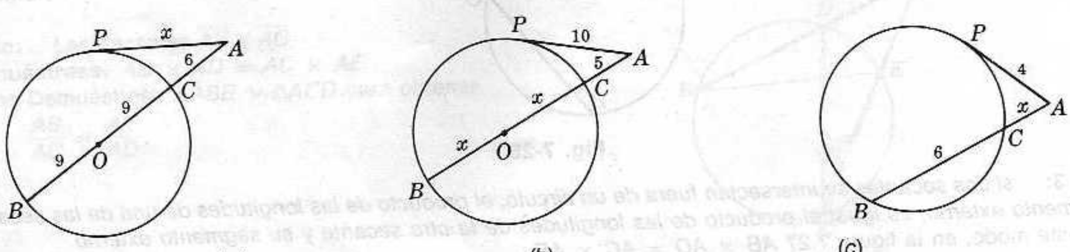
(a) $ED = 4$. Entonces $16x = 4(12)$, de modo que $16x = 48$ o $x = 3$.

(b) $AE = EB = x$. Entonces $x^2 = 8(2)$, así $x^2 = 16$ y $x = 4$.

(c) $CE = 3$ y $AE = EB = x$. Entonces $x^2 = 27(3)$ o $x^2 = 81$ y $x = 9$.

7.30 Aplicación del Principio 2

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-29, si la tangente $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$ se intersectan en A.



(a) (b) (c)

Fig. 7-29

Soluciones

(*a*) $AB = 9 + 9 + 6 = 24$. Entonces $x^2 = 24(6)$ o $x^2 = 144$ y $x = 12$.

(*b*) $AB = 2x + 5$. Entonces $5(2x + 5) = 100$ y $x = 7\frac{1}{2}$.

(*c*) $AB = x + 6$. Entonces $x(x + 6) = 16$ o $x^2 + 6x - 16 = 0$.
Por factorización se obtiene $(x + 8)(x - 2) = 0$ y $x = 2$.

7.31 Aplicación del Principio 3

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-30, si las secantes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en A.

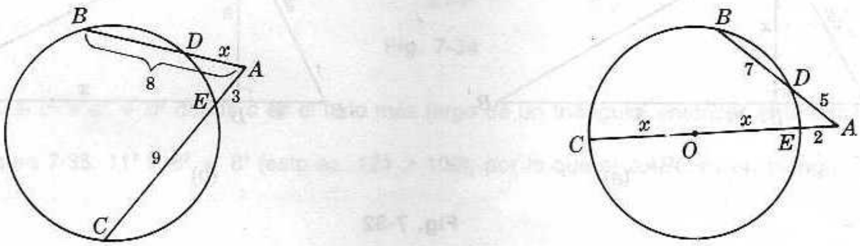


Fig. 7-30

Soluciones

(*a*) $AC = 12$. Entonces $8x = 12(3)$ y $x = 4\frac{1}{2}$.

(*b*) $AC = 2x + 2$ y $AB = 12$. Entonces $2(2x + 2) = 12(5)$ y $x = 14$.

7.8 MEDIAS PROPORCIONALES EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Principio 1: *la longitud de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la longitud de los segmentos de la hipotenusa.*

Así, en el triángulo rectángulo ABC (Fig. 7-31), $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{CD}{DA}$. Teo. Euclides

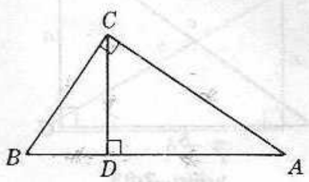


Fig. 7-31

Principio 2: *en un triángulo rectángulo, la longitud de cualquier lado es la media proporcional entre las longitudes de la hipotenusa y la longitud de la proyección de ese lado sobre la hipotenusa.*

Así, en el $\triangle$ rectángulo ABC, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$.

En el capítulo 16 se da una demostración de este principio.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.32 Cálculo de Medias Proporcionales en Triángulos Rectángulos

En cada uno de los triángulos de la figura 7-32, calcule x y y

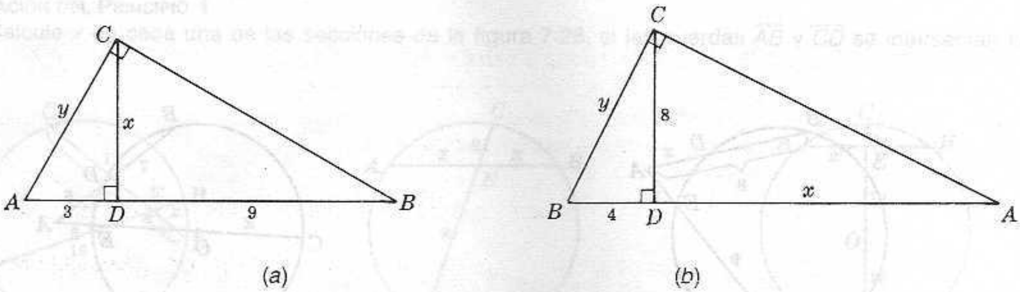


Fig. 7-32

Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $\frac{3}{x} = \frac{x}{9}$ o $x^2 = 27$ y $x = 3\sqrt{3}$. Por el principio 2, $\frac{12}{y} = \frac{y}{3}$, así $y^2 = 36$ y $y = 6$.

(*b*) Por el principio 1, $\frac{x}{8} = \frac{8}{4}$ y $x = 16$. Por el principio 2, $\frac{20}{y} = \frac{y}{4}$, así $y^2 = 80$ y $y = 4\sqrt{5}$.

7.9 TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. Así, en la figura 7-33, $c^2 = a^2 + b^2$.

En el capítulo 16 se da una demostración del teorema de Pitágoras.

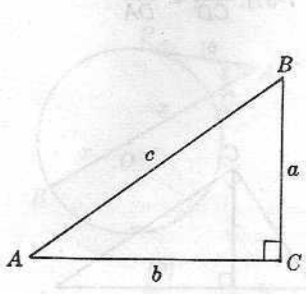


Fig. 7-33

7.9A Pruebas para triángulos rectángulos, agudos y obtusos

Si se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$ en los tres lados de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo; pero si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces el triángulo no es un triángulo rectángulo.

En el $\triangle ABC$, si $c^2 < a^2 + b^2$ donde c es el lado más largo de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo agudo.

Por lo tanto, en la figura 7-34, $9^2 < 6^2 + 8^2$ (esto es, $81 < 100$); por lo que el $\triangle ABC$ es un triángulo agudo.

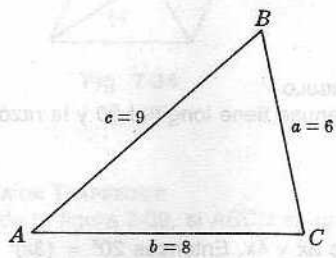


Fig. 7-34

En el $\triangle ABC$, si $c^2 > a^2 + b^2$ donde c es el lado más largo de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo obtuso.

Así, en la figura 7-35, $11^2 > 6^2 + 8^2$ (esto es, $121 > 100$); por lo que el $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso.

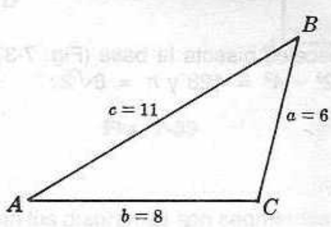


Fig. 7-35

PROBLEMAS RESUELTOS

7.33 Cálculo de los Lados de un Triángulo Rectángulo

En la figura 7-36, (*a*) calcule la longitud de la hipotenusa c si $a = 12$ y $b = 9$; (*b*) calcule a si $b = 6$ y $c = 8$; (*c*) calcule b si $a = 4\sqrt{3}$ y $c = 8$.

81 + 144

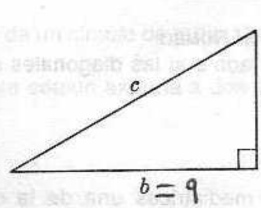


Fig. 7-36

Soluciones

(*a*) $c^2 = a^2 + b^2 = 12^2 + 9^2 = 225$ y $c = 15$.

(*b*) $a^2 = c^2 - b^2 = 8^2 - 6^2 = 28$ y $a = 2\sqrt{7}$.

(*c*) $b^2 = c^2 - a^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 48 = 16$ y $b = 4$.

7.34 Razones en un Triángulo Rectángulo

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa tiene longitud 20 y la razón de sus lados es de 3:4. Calcule cada uno de sus lados.

Solución

Sea la longitud de sus lados $3x$ y $4x$. Entonces $20^2 = (3x)^2 + (4x)^2$.

Al efectuar las operaciones, se obtiene $400 = 9x^2 + 16x^2$ o $400 = 25x^2$ y $x = 4$; por lo que sus lados tienen longitud 12 y 16.

7.35 Aplicación del Teorema de Pitágoras a un Triángulo Isósceles

Calcule la longitud de la altura sobre la base de un triángulo isósceles, si la base es 8 y los lados iguales son 12.

Solución

La altura h de un triángulo isósceles bisecta la base (Fig. 7-37).

Entonces $h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}b)^2 = 12^2 - 4^2 = 128$ y $h = 8\sqrt{2}$.

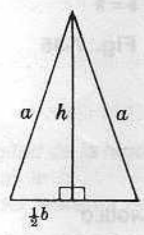


Fig. 7-37

7.36 Aplicación del Teorema de Pitágoras a un Rombo

En un rombo, calcule (*a*) la longitud de un lado s si las diagonales son 30 y 40; (*b*) la longitud de una diagonal d si su lado es 26 y la otra diagonal es 20.

Solución

Las diagonales de un rombo son mediatrices una de la otra; por lo que $s^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + (\frac{1}{2}d')^2$ en la figura 7-38.

(*a*) Si $d = 30$ y $d' = 40$, entonces $s^2 = 15^2 + 20^2 = 625$ o $s = 25$.

(*b*) Si $s = 26$ y $d' = 20$, entonces $26^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + 10^2$ o $576 = (\frac{1}{2}d)^2$. Por lo que $\frac{1}{2}d = 24$ o $d = 48$.

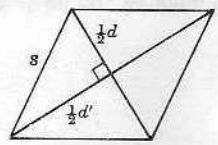


Fig. 7-38

7.37 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN TRAPEZOIDE

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-39, si $ABCD$ es un trapezoide.

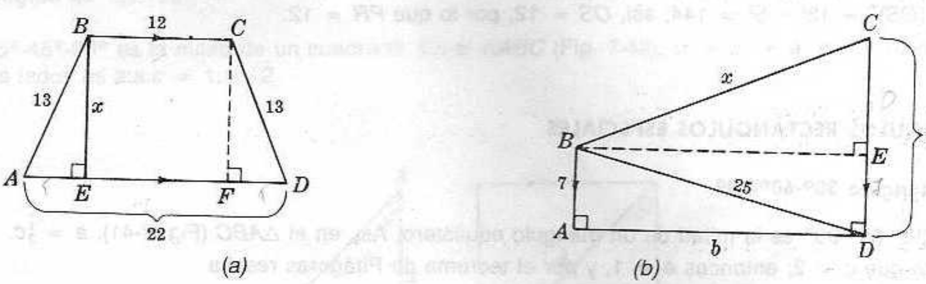


Fig. 7-39

Soluciones

Las perpendiculares punteadas en los diagramas son segmentos adicionales necesarios sólo para las soluciones.

Note cómo se forman rectángulos con estos segmentos agregados.

(*a*) $EF = BC = 12$ y $AE = \frac{1}{2}(22 - 12) = 5$. Entonces $x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ o $x = 12$.

(*b*) $b^2 = 25^2 - 7^2 = 576$ o $b = 24$; además, $BE = b = 24$ y $CE = 17 - 7 = 10$. Entonces $x^2 = 24^2 + 10^2$ o $x = 26$.

7.38 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN CÍRCULO

(*a*) Calcule la distancia d del centro de un círculo de radio 17 a una cuerda cuya longitud es 30 [Fig. 7-40(*a*)].

(*b*) Calcule la longitud de la tangente común externa a dos círculos tangentes externamente, de radios 4 y 9 [Fig. 7-40(*b*)].

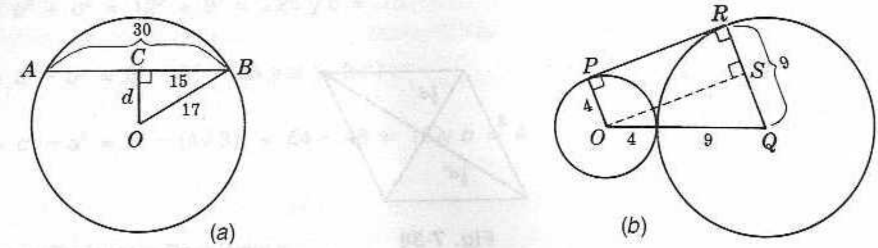


Fig. 7-40

Soluciones

(*a*) $BC = \frac{1}{2}(30) = 15$. Entonces $d^2 = 17^2 - 15^2 = 64$ y $d = 8$.

(*b*) $\overline{OS} \cong \overline{PR}$, $RS = 4$, $OQ = 13$ y $SQ = 9 - 4 = 5$. Entonces, en el triángulo rectángulo OSQ, $(OS)^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; así, $OS = 12$, por lo que $PR = 12$.

7.10 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

7.10A El triángulo 30°-60°-90°

Un triángulo 30°-60°-90° es la mitad de un triángulo equilátero. Así, en el $\triangle ABC$ (Fig. 7-41), $a = \frac{1}{2}c$.

Considere que $c = 2$; entonces $a = 1$, y por el teorema de Pitágoras resulta

$$b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \qquad \text{o} \qquad b\sqrt{3}$$

La razón de sus lados es, por lo tanto, $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$.

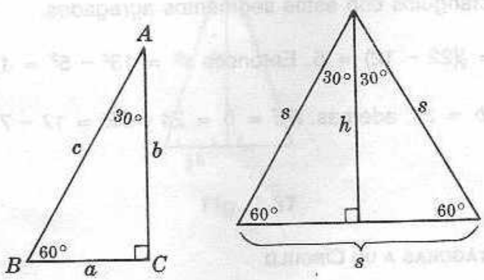


Fig. 7-41

Principios del triángulo 30°-60°-90°

PRINCIPIO 1: *la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.*
En la figura 7-41, $a = \frac{1}{2}c$.

Principio 2: *la longitud del lado opuesto al ángulo de 60° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, multiplicada por la raíz cuadrada de 3.*

En la figura 7-41, $b = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$.

Principio 3: *la longitud del lado opuesto al ángulo de 60° es igual a la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° multiplicado por la raíz cuadrada de 3.*

En la figura 7-41, $b = a\sqrt{3}$.

Principio del triángulo equilátero

Principio 4: *la longitud de la altura de un triángulo equilátero, es igual a la mitad de la longitud de un lado multiplicado por la raíz cuadrada de 3.*

En la figura 7-41, $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$.

7.10B El triángulo 45°-45°-90°

Un triángulo 45°-45°-90° es la mitad de un cuadrado. En el $\triangle ABC$ (Fig. 7-42), $c^2 = a^2 + a^2$ o $c = a\sqrt{2}$. Por lo que la razón de sus lados es $a{:}a{:}c = 1{:}1{:}\sqrt{2}$.

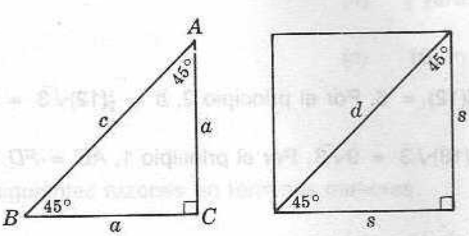


Fig. 7-42

Principios del triángulo 45°-45°-90°

Principio 5: *la longitud del lado opuesto al ángulo de 45° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa multiplicada por la raíz cuadrada de 2.*

En la figura 7-42, $a = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$.

Principio 6: *la longitud de la hipotenusa es igual a la longitud de un lado, multiplicada por la raíz cuadrada de 2.*

En la figura 7-42, $c = a\sqrt{2}$.

Principio del cuadrado

Principio 7: *en un cuadrado, la longitud de una diagonal es igual a la longitud de un lado, multiplicada por la raíz cuadrada de 2.*

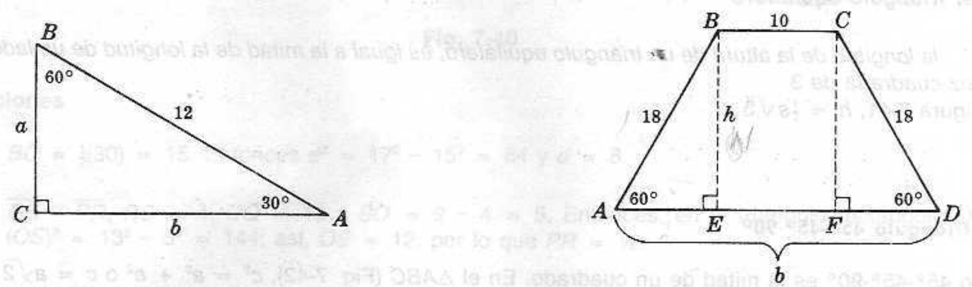
En la figura 7-42, $d = s\sqrt{2}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.39 Aplicación de los Principios 1 y 4

(*a*) Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo 30°-60°-90° es 12, calcule la longitud de sus lados [Fig. 7-43(*a*)].

(*b*) Cada lado de un trapezoide isósceles tiene longitud 18. Si los ángulos de la base son de 60° y la base menor es 10, calcule las longitudes de su altura y de su base mayor [Fig. 7-43(*b*)].



(*a*) (*b*)

Fig. 7-43

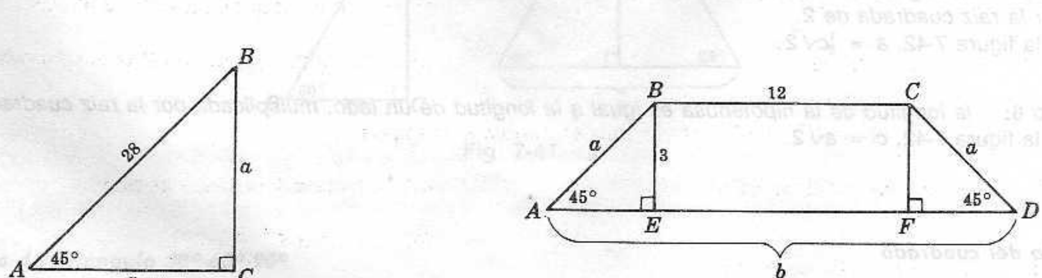
Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $a = \frac{1}{2}(12) = 6$. Por el principio 2, $b = \frac{1}{2}(12)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(*b*) Por el principio 2, $h = \frac{1}{2}(18)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Por el principio 1, $AE = FD = \frac{1}{2}(18) = 9$; por lo que $b = 9 + 10 + 9 = 28$.

7.40 Aplicación de los Principios 5 y 6

(*a*) Calcule la longitud del lado de un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene longitud 28 [Fig. 7-44(*a*)].



(*a*) (*b*)

Fig. 7-44

(*b*) Un trapezoide isósceles tiene ángulos de la base que miden 45°. Si la base menor tiene longitud 12 y la altura tiene longitud 3, calcule las longitudes de la base mayor y de cada uno de sus lados [Fig. 7-44(*b*)].

Soluciones

(*a*) Por el principio 5, $a = \frac{1}{2}(28)\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.

(*b*) Por el principio 6, $a = 3\sqrt{2}$. $AE = BE = 3$ y $EF = 12$; por lo que $b = 3 + 12 + 3 = 18$.

Problemas complementarios

1. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.1)

(*a*) 20 centavos a 5 centavos

(*b*) 5 monedas de 10 centavos de dólar a 15 del mismo valor

(*c*) 30 libras a 25 libras

(*d*) 20° a 14°

(*e*) 27 min a 21 min

(*f*) 50% a 25%

(*g*) 15° a 75°

(*h*) 33% a 77%

(*i*) \$2.20 a \$3.30

(*j*) \$0.84 a \$0.96

(*k*) $\frac{1}{2}$ libra a $\frac{1}{4}$ libra

(*l*) $2\frac{1}{2}$ días a $3\frac{1}{2}$ días

(*m*) 5 pies a $\frac{1}{4}$ pie

(*n*) $\frac{1}{2}$ yarda a $1\frac{1}{2}$ yardas

(*o*) $16\frac{1}{2}$ m a $5\frac{1}{2}$ m

2. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.2)

(*a*) 1 año a 2 meses

(*b*) 2 semanas a 5 días

(*c*) 3 días a 3 semanas

(*d*) $\frac{1}{2}$h a 20 min

(*e*) 2 yardas a 2 pies

(*f*) $2\frac{1}{3}$ yardas a 2 pies

(*g*) $1\frac{1}{2}$ pies a 9 pulgadas

(*h*) 2 g a 8 mg

(*i*) 100 lb a 1 ton

(*j*) \$2 a 25 centavos

(*k*) 2 monedas de 25 a 30 centavos

(*l*) 1 yarda cuadrada a 2 pies cuadrados

3. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.3)

(*a*) 20 centavos a 30 centavos a \$1 dólar

(*b*) \$3 a \$1.50 a 25 centavos

(*c*) 1 moneda de 25 centavos a 1 moneda de 10 centavos a una moneda de 5 centavos

(*d*) 1 día a 4 días a 1 semana

(*e*) $\frac{1}{2}$ día a 9 h a 3 h

(*f*) 2 h a $\frac{1}{2}$ h a 15 min

(*g*) 1 ton a 200 lb a 40 lb (*h*) 3 lb a 1 lb a 8 oz (*i*) 1 gal a 1 qt a 1 pt

4. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.4)

(*a*) 60 a 70
(*b*) 84 a 7
(*c*) 65 a 15
(*d*) 125 a 500
(*e*) 630 a 105
(*f*) 1 760 a 990
(*g*) 0.7 a 2.1
(*h*) 0.36 a 0.24
(*i*) 0.002 a 0.007
(*j*) 0.055 a 0.005
(*k*) 6.4 a 8
(*l*) 114 a 2.4
(*m*) $7\frac{1}{2}$ a $2\frac{1}{2}$
(*n*) $1\frac{1}{2}$ a 10
(*o*) $\frac{5}{8}$ a $1\frac{1}{2}$
(*p*) $\frac{7}{4}$ a $\frac{1}{8}$

5. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.4)

(*a*) x a $8x$
(*b*) $15c$ a 5
(*c*) $11d$ a 22
(*d*) 2π a πD
(*e*) πab a πa^2
(*f*) $4S$ a S^2
(*g*) S^3 a $6S^2$
(*h*) $9r^2$ a $6rt^2$
(*i*) x a $4x$ a $10x$
(*j*) $15y$ a $10y$ a $5y$
(*k*) x^3 a x^2 a x
(*l*) $12w$ a $10w$ a $8w$ a $2w$

6. Utilice x como factor común para representar los siguientes números y su suma: (7.4)

(*a*) Dos números cuya razón es 5:4
(*b*) Dos números cuya razón es 9 a 1.
(*c*) Tres números cuya razón es 2:5:11
(*d*) Cinco números cuya razón es 1:2:2:3:7

7. Si dos ángulos en la razón de 5:4 están representados por $5x$ y $4x$, exprese cada una de las siguientes proposiciones como una ecuación; después calcule x y los ángulos: (7.5)

(*a*) Los ángulos son adyacentes y forman en conjunto un ángulo que mide 45°.

(*b*) Los ángulos son complementarios.

(*c*) Los ángulos son suplementarios.

(*d*) Los ángulos son dos ángulos de un triángulo cuyo tercer ángulo es su diferencia.

8. Si tres ángulos en la razón 7:6:5 son representados por $7x$, $6x$ y $5x$, exprese cada una de las siguientes proposiciones como una ecuación, después calcule x y los ángulos: (7.6)

(*a*) El primero y el segundo son adyacentes y juntos forman un ángulo que mide 91°.

(*b*) El primero y el tercero son suplementarios.

(*c*) El primero y la mitad del segundo son complementarios.

(*d*) Los ángulos son los tres ángulos de un triángulo.

9. Resuelva las siguientes proporciones para x: (7.7)

(*a*) $x:6 = 8:3$

(*b*) $5:4 = 20:x$

(*c*) $9:x = x:4$

(*d*) $x:2 = 10:x$

(*e*) $(x + 4):3 = 3:(x - 4)$

(*f*) $(2x + 8):(x + 2) = (2x + 5):(x + 1)$

(*g*) $a:b = c:x$

(*h*) $x:2y = 18y:x$

10. Resuelva las siguientes proporciones para x: (7.7)

(*a*) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$

(*b*) $\frac{7}{x} = \frac{3}{2}$

(*c*) $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$

(*d*) $\frac{x}{5} = \frac{15}{x}$

(*e*) $\frac{x + 2}{5} = \frac{6}{3}$

(*f*) $\frac{x - 1}{3} = \frac{5}{x + 1}$

(*g*) $\frac{2x}{x + 7} = \frac{3}{5}$

(*h*) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

11. Encuentre la cuarta proporcional entre cada uno de los siguientes conjuntos de números: (7.8)

(*a*) 1, 3, 5 (*c*) 2, 3, 4 (*e*) 3, 2, 5 (*g*) 2, 8, 8

(*b*) 8, 6, 4 (*d*) 3, 4, 2 (*f*) $\frac{1}{3}$, 2, 5 (*h*) b, $2a$, $3b$

12. Encuentre la media proporcional positiva entre cada una de las siguientes parejas de números: (7.9)

(*a*) 4 y 9 (*c*) $\frac{1}{3}$ y 27 (*e*) 2 y 5 (*g*) p y q

(*b*) 12 y 3 (*d*) $2b$ y $8b$ (*f*) 3 y 9 (*h*) a^2 y b

13. De cada una de las siguientes ecuaciones, forme una proporción cuyo cuarto término sea x: (7.10)
(*a*) $cx = bd$ (*b*) $pq = ax$ (*c*) $hx = a^2$ (*d*) $3x = 7$ (*e*) $x = ab/c$

14. En cada una de las siguientes ecuaciones, calcule la razón de x a y: (7.10)

(*a*) $2x = y$ (*b*) $3y = 4x$ (*c*) $x = \frac{1}{2}y$ (*d*) $ax = hy$ (*e*) $x = by$

15. ¿Cuál de las siguientes no es una proporción? (7.10)

(*a*) $\frac{4}{3} \stackrel{?}{=} \frac{24}{18}$ (*b*) $\frac{3}{5} \stackrel{?}{=} \frac{7}{12}$ (*c*) $\frac{25}{45} \stackrel{?}{=} \frac{10}{18}$ (*d*) $\frac{0.2}{0.3} \stackrel{?}{=} \frac{6}{9}$ (*e*) $\frac{x}{8} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$ cuando $x = 6$.

16. De cada una de las siguientes, forme una nueva proporción cuyo primer término sea x. Después calcule x. (7.11)

(*a*) $\frac{3}{2} = \frac{9}{x}$ (*b*) $\frac{1}{x} = \frac{5}{4}$ (*c*) $\frac{a}{x} = \frac{2}{b}$ (*d*) $\frac{x+5}{5} = \frac{11}{10}$ (*e*) $\frac{x-20}{20} = \frac{1}{4}$

17. Calcule x en cada uno de estos pares de proporciones:

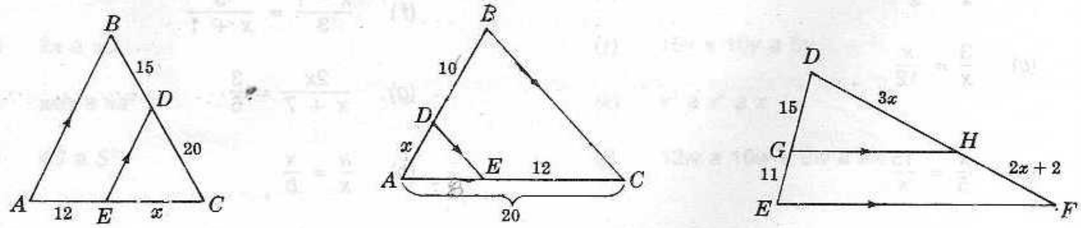
(*a*) $a:b = c:x$ y $a:b = c:d$ (*c*) $2:3x = 4:5y$ y $2:15 = 4:5y$

(*b*) $5:7 = x:42$ y $5:7 = 35:42$ (*d*) $7:5x - 2 = 14:3y$ y $7:18 = 14:3y$

18. Calcule x en cada una de las siguientes proporciones: (7.12)

(*a*) $\frac{x-7}{8} = \frac{7}{4}$ (*b*) $\frac{x+y}{6} = \frac{x-y}{3} = \frac{1}{3}$ (*c*) $\frac{2x-y}{8} = \frac{y-1}{10} = \frac{1}{2}$

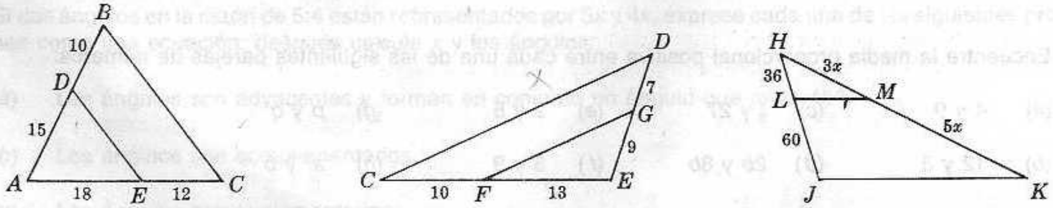
19. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-45. (7.13)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 7-45

20. ¿En qué secciones de la figura 7-46 es una línea paralela a un lado del triángulo?



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 7-46

21. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-47. (7.14)

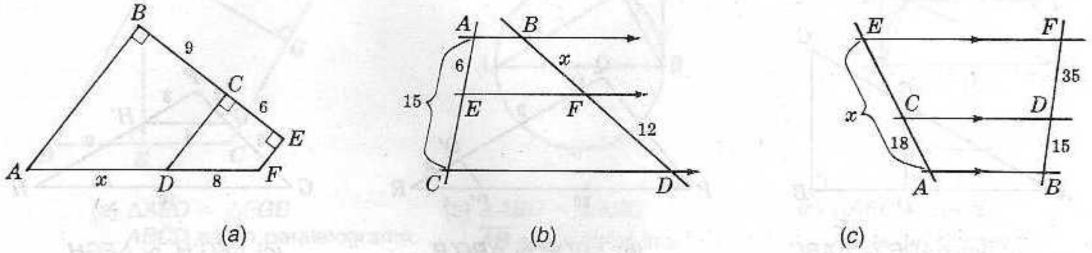


Fig. 7-47

22. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-48. (7.15)

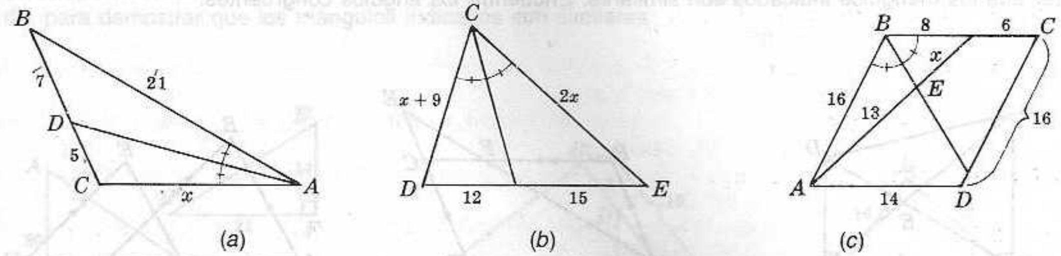


Fig. 7-48

23. Demuestre que tres o más paralelas dividen proporcionalmente a dos transversales. (7.16)

24. En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ de la figura 7-49, $\angle B$ y $\angle B'$ son ángulos correspondientes. Calcule $m\angle B$ si (a) $m\angle A' = 120°$ y $m\angle C' = 25°$; (b) $m\angle A' + m\angle C' = 127°$.

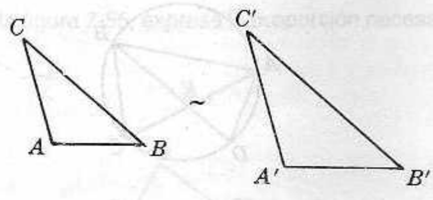


Fig. 7-49

25. En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ de la figura 7-50, $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$. (a) Calcule a si $c = 24$; (b) calcule b si $a = 20$; (c) calcule c si $b = 63$. (7.17)

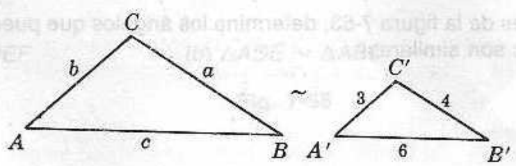
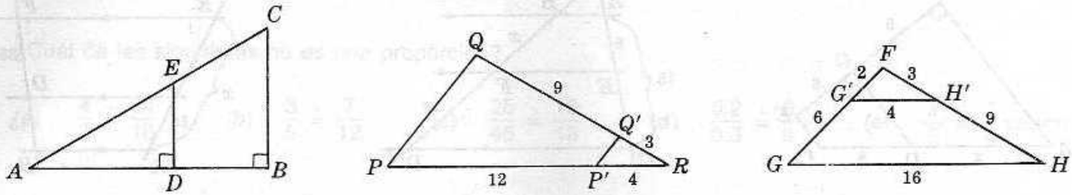


Fig. 7-50

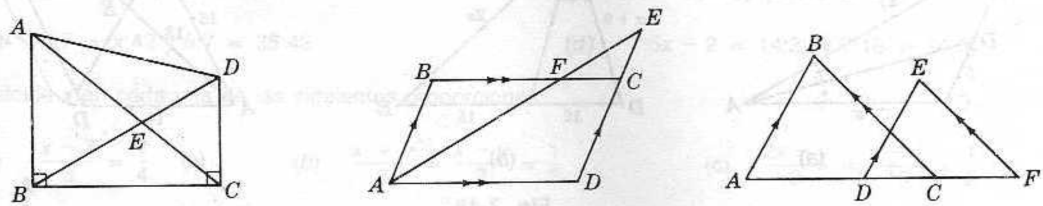
26. En cada una de las secciones de la figura 7-51, demuestre que los triángulos indicados son similares.



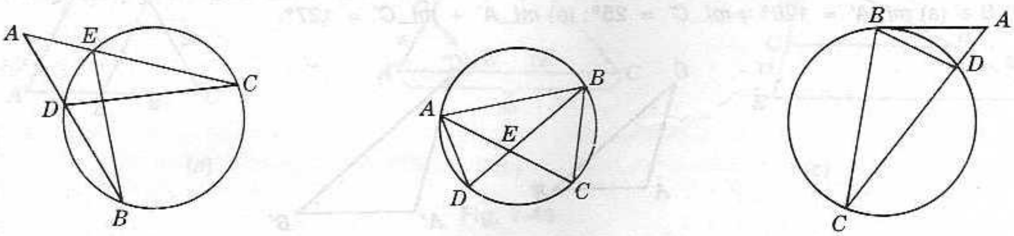
(*a*) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (*b*) $\triangle RQP \sim \triangle RQ'P'$ (*c*) $\triangle FG'H' \sim \triangle FGH$

Fig. 7-51

27. En cada una de las secciones de la figura 7-52, pueden utilizarse dos pares de ángulos congruentes para demostrar que los triángulos indicados son similares. Encuentre los ángulos congruentes. (7.18)



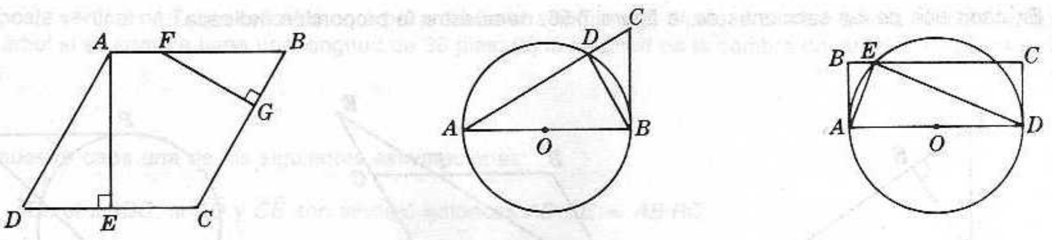
(*a*) $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ (*b*) $\triangle BFA \sim \triangle AED$ (*c*) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



(*d*) $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ (*e*) $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ $\widehat{BC} \cong \widehat{CD}$ (*f*) $\triangle ABC \sim \triangle ABD$

Fig. 7-52

28. En cada una de las secciones de la figura 7-53, determine los ángulos que pueden ser utilizados para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.19)



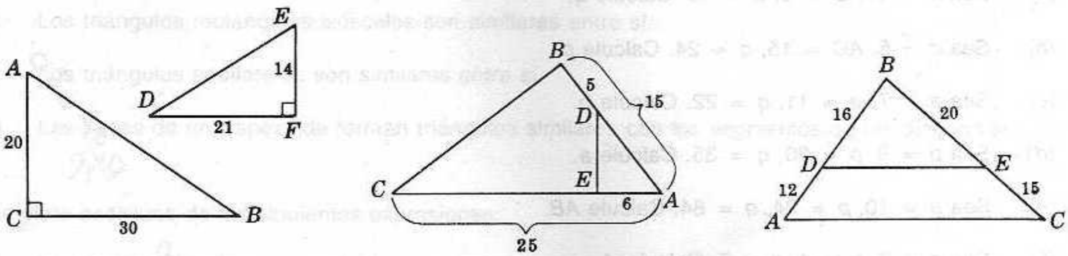
(a) $\triangle AED \sim \triangle FGB$
ABCD es un paralelogramo.

(b) $\triangle ABD \sim \triangle ABC$
$\overline{AB}$ es un diámetro.
$\overline{BC}$ es una tangente.

(c) $\triangle AEB \sim \triangle AED$
$\overline{AD}$ es un diámetro.
ABCD es un rectángulo

Fig. 7-53

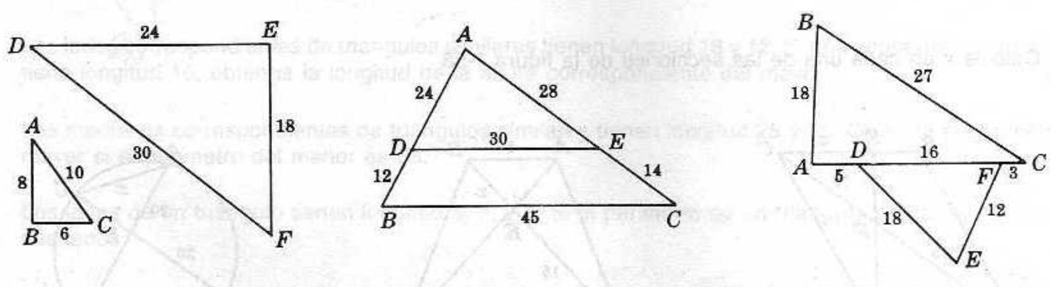
29. En cada una de las secciones de la figura 7-54, determine el par de ángulos congruentes y la proporción necesaria, para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.20)



(a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (c) $\triangle BDE \sim \triangle BAC$

Fig. 7-54

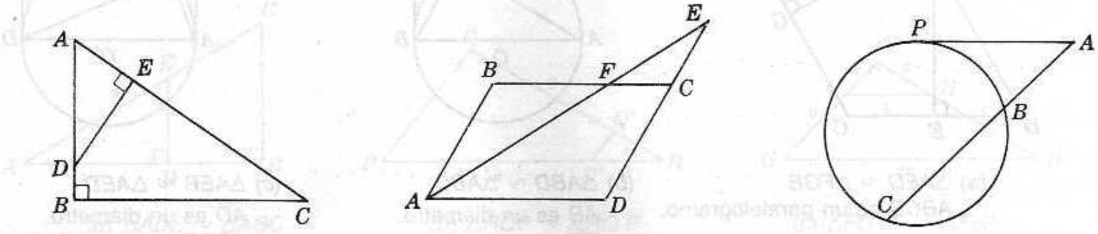
30. En cada una de las secciones de la figura 7-55, exprese la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.21)



(a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (c) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

Fig. 7-55

31. En cada una de las secciones de la figura 7-56, demuestre la proporción indicada. (7.25)



(a) $AD:AC = DE:BC$ (b) $AB:EC = BF:FC$ $ABCD$ es un paralelogramo (c) $AC:AP = AP:AB$ $\overrightarrow{AP}$ es una tangente

Fig. 7-56

32. En el $\triangle ABC$ (Fig. 7-57), $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. (7.22)

(a) Sea $a = 4$, $AB = 8$, $p = 10$. Calcule q.

(b) Sea $c = 5$, $AC = 15$, $q = 24$. Calcule p.

(c) Sea $a = 7$, $p = 11$, $q = 22$. Calcule b.

(d) Sea $b = 9$, $p = 20$, $q = 35$. Calcule a.

(e) Sea $a = 10$, $p = 24$, $q = 84$. Calcule AB.

(f) Sea $c = 3$, $p = 4$, $q = 7$. Calcule d.

$\frac{40}{20} = \frac{x}{30}$

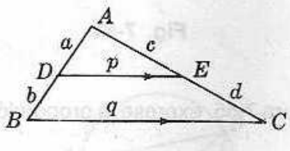
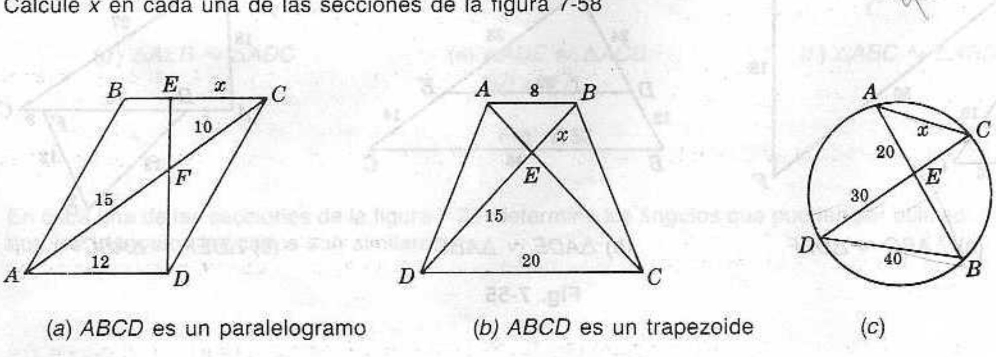


Fig. 7-57

33. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-58 (7.22)



(a) $ABCD$ es un paralelogramo (b) $ABCD$ es un trapezoide (c)

Fig. 7-58

34. Un poste vertical de 7 pies cerca de un árbol produce una sombra de 6 pies. A la misma hora, calcule (*a*) la altura del árbol si su sombra tiene una longitud de 36 pies; (*b*) la longitud de la sombra del árbol si su altura es de 77 pies. (7.23)

35. Demuestre cada una de las siguientes aseveraciones: (7.25)

(*a*) En el $\triangle ABC$, si $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas, entonces $AD{:}CE = AB{:}BC$.

(*b*) En el círculo O, el diámetro $\overline{AB}$ y la tangente $\overline{BC}$ son los lados del $\triangle ABC$. Si $\overline{AC}$ intersecta al círculo en D, entonces $AD{:}AB = AB{:}AC$.

(*c*) Las diagonales de un trapezoide se dividen entre sí en segmentos proporcionales.

(*d*) En el triángulo rectángulo ABC, $\overline{CD}$ es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$, entonces $AC{:}CD = AB{:}BC$.

36. Demuestre cada una de las siguientes aseveraciones: (7.24)

(*a*) Una línea paralela, a un lado de un triángulo, forma un triángulo similar al triángulo dado.

(*b*) Los triángulos rectángulos isósceles son similares entre sí.

(*c*) Los triángulos equiláteros son similares entre sí.

(*d*) Las bases de un trapezoide forman triángulos similares con los segmentos de las diagonales.

37. Complete cada una de las siguientes expresiones: (7.26)

(*a*) En triángulos similares, si los lados correspondientes están en la razón de 8:5, entonces las alturas correspondientes están en la razón de __?__.

(*b*) En triángulos similares, si las bisectrices correspondientes están en la razón de 3:5, entonces sus perímetros están en la razón de __?__.

(*c*) Si se dividen los lados de un triángulo a la mitad, entonces el perímetro es __?__, las bisectrices son __?__, las medianas son __?__, y los radios de los círculos circunscritos son __?__.

38. (*a*) Los lados correspondientes de triángulos similares tienen longitud 18 y 12. Si una altura del menor de ellos tiene longitud 10, obtenga la longitud de la altura correspondiente del mayor. (7.26)

(*b*) Las medianas correspondientes de triángulos similares tienen longitud 25 y 15. Obtenga el perimetro del mayor si el perímetro del menor es 36.

(*c*) Los lados de un triángulo tienen longitud 5, 7, y 8. Si el perímetro de un triángulo similar es 100, calcule sus lados.

(*d*) Las bases de un trapezoide tienen longitud 5 y 20, y la altura tiene longitud 12. Calcúlese la longitud de la altura de un triángulo formado por la base menor y la extensión, hasta que se intersecten de los lados no paralelos.

(*e*) Las bases de un trapezoide tienen longitud 11 y 22. Su altura tiene longitud 9. Calcule la distancia del punto de intersección de las diagonales a cada una de sus bases.

39. Complete cada una de las siguientes expresiones: (7.27)

(*a*) Si los lados correspondientes de dos polígonos similares están en la razón de 3:7, entonces la razón de sus alturas correspondientes es de _?_.

(*b*) Si los perímetros de dos hexágonos similares están en la razón de 56 a 16, entonces la razón de sus diagonales correspondientes es de _?_.

(*c*) Si se cuadriplica cada lado de un octágono y los ángulos permanecen iguales, entonces su perímetro es de _?_.

(*d*) La base de un rectángulo es dos veces la de un rectángulo similar. Si el radio del círculo circunscrito al primer rectángulo es 14, entonces el radio del círculo circunscrito al segundo es de _?_.

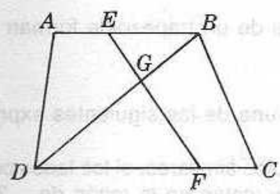
40. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados:

(*a*) Las bisectrices correspondientes de dos triángulos están en la misma razón que un par de lados correspondientes.

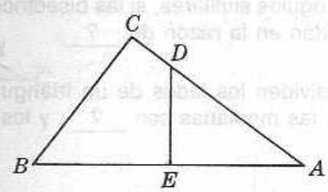
(*b*) Las medianas correspondientes de triángulos similares están en la misma razón que un par de lados correspondientes.

41. Demuestre lo solicitado en la figura 7-59. (7.28)

(*a*) **Dado:** Trapezoide *ABCD*
Demuéstrese:
$GB \times DF = GF \times EB$



(*b*) **Dado:** $\overline{BC} \perp \overline{AC}$
$\overline{DE} \perp \overline{AB}$
Demuéstrese:
$DE \times AC = BC \times AE$



(*c*) **Dado:** Diámetro $\overline{BC}$
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese:
$(BD^2) = BE \times BC$

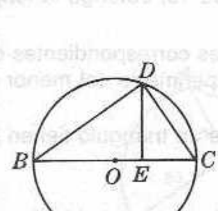
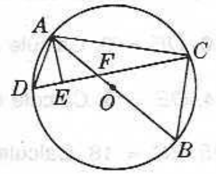
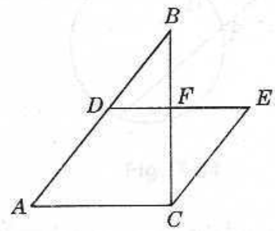


Fig. 7-59

(*d*) **Dado:** Círculo O
Diámetro AB
$\overline{AE} \perp \overline{CD}$
Demuéstrese:
$AD \times BC = AB \times DE$



(*e*) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$
$\overline{AC} \perp \overline{BC}$
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese:
$AB \times CF = BC \times EC$



(*f*) **Dado:** $\widehat{BC} \cong \widehat{CD}$
Demuéstrese:
$(BC^2) = AC \times EC$

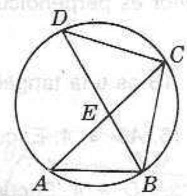


Fig. 7-59

42. Demuestre cada una de las siguientes aseveraciones: (7.28)

(*a*) Si dos cuerdas se intersectan en un círculo, el producto de la longitud de los segmentos de una cuerda es igual al producto de la longitud de los segmentos de la otra.

(*b*) En un triángulo rectángulo, el producto de la longitud de su hipotenusa y la altura sobre ésta es igual al producto de la longitud de sus lados.

(*c*) Si en el △ inscrito ABC la bisectriz del $\angle A$ intersecta a $\overline{BC}$ en D y al círculo en E, entonces $BD \times AC = AD \times EC$.

43. En la figura 7-60: (7.29)

(*a*) Sea $AE = 10$, $EB = 6$, $CE = 12$. Calcule ED.

(*b*) Sea $AB = 15$, $EB = 8$, $ED = 4$. Calcule CE.

(*c*) Sea $AE = 6$, $ED = 4$, $CD = 13$. Calcule EB.

(*d*) Sea $ED = 5$, $EB = 2(AE)$, $CD = 15$. Calcule AE.

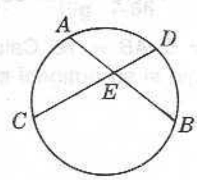


Fig. 7-60

43. En la figura 7-61, diámetro $\overline{CD} \perp$ cuerda $\overline{AB}$: (7.29)

(*e*) Sea $OD = 10$, $OE = 8$. Calcule AB.

(*f*) Sea $AB = 24$, $OE = 5$. Calcule OD.

(*g*) Sea $OD = 25$, $EC = 18$. Calcule AB.

(*h*) Sea $AB = 8$, $OD = 5$. Calcule EC.

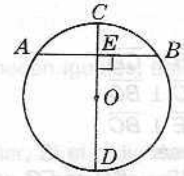


Fig. 7-61

44. Un punto está a 12 pulgadas del centro de un círculo cuyo radio es de 15 pulgadas. Calcule las longitudes de la cuerda menor y mayor que pueden ser trazadas a través de este punto. (*Sugerencia:* la cuerda mayor es un diámetro, y la menor es perpendicular a este diámetro). (7.29)

45. En la figura 7-62, $\overline{AB}$ es una tangente: (7.29)

(*a*) Sea $AC = 16$, $AD = 4$. Encuentre AB.

(*b*) Sea $CD = 5$, $AD = 4$. Encuentre AB.

(*c*) Sea $AB = 6$, $AD = 3$. Encuentre AC.

(*d*) Sea $AC = 20$, $AB = 10$. Encuentre AD.

(*e*) Sea $AB = 12$, $AD = 9$. Encuentre CD.

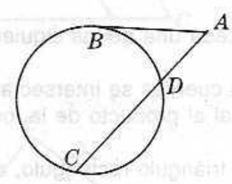


Fig. 7-62

En la figura 7-63, $\overline{CD}$ es un diámetro; $\overline{AB}$ es una tangente; (7.29)

(*f*) Sea $AD = 6$, $OD = 9$. Calcule AB.

(*g*) Sea $AD = 2$, $AB = 8$. Calcule CD.

(*h*) Sea $AD = 5$, $AB = 19$. Calcule OD.

(*i*) Sea $AB = 12$, $AC = 18$. Calcule OD.

(*j*) Sea $OD = 5$, $AB = 12$. Calcule AD.

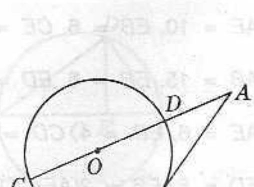


Fig. 7-63

46. En la figura 7-64: (7.31)

(*a*) Sea $AB = 14$, $AD = 4$, $AE = 7$. Calcule AC.

(*b*) Sea $AC = 8$, $AE = 6$, $AD = 3$. Calcule BD.

(*c*) Sea $BD = 5$, $AD = 7$, $AE = 4$. Calcule AC.

(*d*) Sea $AD = DB$, $EC = 14$, $AE = 4$. Calcule AD.

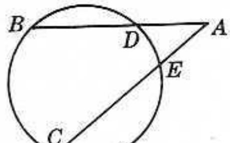


Fig. 7-64

En la figura 7-65, $\overline{CE}$ es un diámetro: (7.31)

(*e*) Sea $OC = 3$, $AE = 6$, $AD = 8$. Calcule AB.

(*f*) Sea $BD = 7$, $AD = 5$, $AE = 2$. Calcule OC.

(*g*) Sea $OC = 11$, $AB = 15$, $AD = 5$. Calcule AE.

(*h*) Sea $OC = 5$, $AE = 6$, $BD = 4$. Calcule AD.

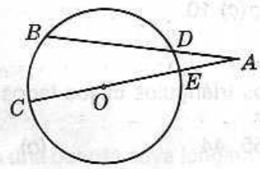


Fig. 7-65

47. $\overline{CD}$ es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ en la figura 7-66. (7.32)

(*a*) Si $p = 2$ y $q = 6$, encuentre a y h.

(*b*) Si $p = 4$ y $a = 6$, encuentre c y h.

(*c*) Si $p = 16$ y $h = 8$, encuentre q y b.

(*d*) Si $b = 12$ y $q = 6$, encuentre p y h.

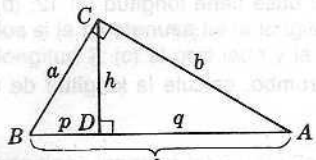


Fig. 7-66

48. En un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitud a y b, calcule la longitud de la hipotenusa c cuando: (7.33)

(*a*) $a = 15, b = 20$ (*b*) $a = 15, b = 36$ (*c*) $a = 5, b = 4$

(*d*) $a = 5, b = 5\sqrt{3}$ (*e*) $a = 7, b = 7$

49. En el triángulo rectángulo de la figura 7-67, calcule la longitud del lado faltante cuando: (7.33)

(*a*) $a = 12, c = 20$ (*b*) $b = 6, c = 8$ (*c*) $b = 15, c = 17$

(*d*) $a = 2, c = 4$ (*e*) $a = 5\sqrt{2}, c = 10$ (*f*) $a = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{2}$

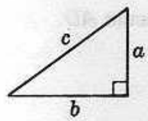


Fig. 7-67

50. Calcúlese la longitud de los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud c, si estos lados están en la razón de: (*a*) 3:4 y $c = 15$; (*b*) 5:12 y $c = 26$; (*c*) 8:15 y $c = 170$; (*d*) 1:2 y $c = 10$ (7.34)

51. En un rectángulo, calcule la longitud de la diagonal si sus lados tienen longitudes (*a*) 9 y 40; (*b*) 5 y 10. (7.33)

52. En un rectángulo, calcule la longitud de uno de sus lados si la diagonal tiene longitud 15 y el otro tiene longitud (*a*) 9; (*b*) 5; (*c*) 10. (7.33)

53. De entre los triángulos cuyos lados tienen las longitudes como sigue, ¿cuáles son triángulos rectángulos?

(*a*) 33, 55, 44 (*b*) 120, 130, 50 (*c*) 4, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$ (*d*) 25, 7, 24

(*e*) 5 pulgadas, 1 pie, 1 pie 1 pulgada (*f*) 1 yarda, 1 yarda 1 pie, 1 yarda 2 pies

(*g*) 11 millas, 60 millas, 61 millas (*h*) 5 cm, 5 cm, 7 cm

54. ¿Es un triángulo rectángulo si sus lados están en la razón de (*a*) 3:4:5; (*b*) 2:3:4?

55. Calcule la longitud de la altura de un triángulo isósceles si cada uno de sus dos lados congruentes tiene longitud 10 y su base tiene longitud (*a*) 12; (*b*) 16; (*c*) 18; (*d*) 10. (7.35)

56. En un rombo, calcule la longitud de un lado si las diagonales tienen longitudes (*a*) 18 y 24; (*b*) 4 y 8; (*c*) 6 y $6\sqrt{3}$. (7.36)

57. En un rombo, calcule la longitud de una diagonal si un lado y la otra diagonal tienen longitudes, respectivamente (*a*) 10 y 12; (*b*) 17 y 16; (*c*) 4 y 4; (*d*) 10 y $10\sqrt{3}$. (7.36)

58. En el trapezoide isósceles *ABCD* de la figura 7-68, (7.37)

(*a*) Calcule a si $b = 32$, $b' = 20$ y $h = 8$. (*b*) Calcule h si $b = 24$, $b' = 14$ y $a = 13$.

(*c*) Calcule b si $a = 15$, $b' = 10$ y $h = 12$. (*d*) Calcule b' si $a = 6$, $b = 21$ y $h = 3\sqrt{3}$.

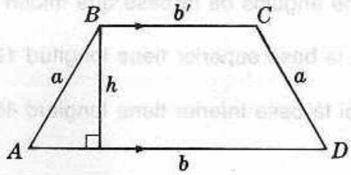


Fig. 7-68

59. En el trapezoide *ABCD* de la figura 7-69, (7.37)

(*a*) Calcule d si $a = 11$, $b = 3$ y $c = 15$.
(*b*) Calcule a si $d = 20$, $b = 12$ y $c = 36$.
(*c*) Calcule d si $a = 5$, $p = 13$ y $c = 14$.
(*d*) Calcule p si $a = 20$, $c = 28$ y $d = 17$

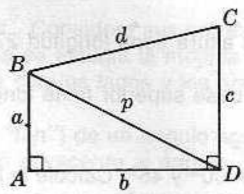


Fig. 7-69

60. El radio de un círculo es 15. Calcule (*a*) la distancia desde el centro a una cuerda cuya longitud es 18; (*b*) la longitud de una cuerda cuya distancia a su centro es 9. (7.38)

61. En un círculo, una cuerda cuya longitud es 16 está a una distancia de 6 de su centro. Calcule la longitud de una cuerda cuya distancia a su centro es de 8. (7.38)

62. Dos círculos tangentes tienen externamente radios de 25 y 9. Calcule la longitud de una tangente común externa. (7.38)

63. En un triángulo 30°-60°-90°, calcule las longitudes de (*a*) los lados si la hipotenusa tiene longitud 20; (*b*) el otro lado y la hipotenusa, si el lado opuesto al ángulo de 30° tiene longitud 7; (*c*) el otro lado y la hipotenusa si el lado opuesto al ángulo de 60° tiene longitud $5\sqrt{3}$. (7.39)

64. En un triángulo equilátero, calcule la longitud de la altura si el lado tiene longitud (*a*) 22; (*b*) $2a$. Calcule el lado si la altura tiene longitud (*c*) $24\sqrt{3}$; (*d*) 24. (7.39)

65. En un rombo que tiene un ángulo que mide 60°, calcule las longitudes de (*a*) las diagonales si un lado tiene longitud 25; (*b*) el lado y la diagonal mayor si la diagonal menor tiene longitud 35. (7.39)

66. En un trapezoide isósceles que tiene ángulos de la base que miden 60°, determine las longitudes de: (7.39)

(a) La base inferior y la altura si la base superior tiene longitud 12 y los lados tienen longitud 16

(b) La base superior y la altura si la base inferior tiene longitud 45 y los lados tienen longitud 28

67. En un triángulo rectángulo isósceles, calcule la longitud de cada lado, si la hipotenusa tiene longitud (a) 34; (b) $2a$. Calcule la longitud de la hipotenusa si cada lado tiene longitud (c) 34; (d) $15\sqrt{2}$. (7.40)

68. En un cuadrado, calcule la longitud de (a) el lado si la diagonal tiene longitud 40; (b) la diagonal si el lado tiene longitud 40. (7.40)

69. En un trapezoide isósceles que tiene ángulos de la base que miden 45°, calcule las longitudes de: (7.40)

(a) La base inferior y cada lado si la altura tiene longitud 13 y la base superior tiene longitud 19

(b) La base superior y cada lado si la altura tiene longitud 27 y la base inferior tiene longitud 65

(c) Cada lado y la base inferior, si la base superior tiene longitud 25 y la altura tiene longitud 15

70. Un triángulo tiene dos ángulos que miden 30° y 45°. Calcule la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° si la longitud del lado opuesto al ángulo de 45° es 8. (*Sugerencia:* trace la altura al tercer lado.) (7.39, 7.40)

71. Un paralelogramo tiene un ángulo que mide 45°. Calcule las distancias entre sus pares de lados opuestos, si sus lados tienen longitudes 10 y 12. (7.40)

8

Trigonometría

8.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Trigonometría significa "medición de triángulos". Considere sus partes: *tri* significa "tres", *gono* significa "ángulo" y *metría* significa "medida". Así, en trigonometría se estudia la medida (o medición) de triángulos.

Las siguientes razones están relacionadas con los lados y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo:

1. *Razón tangente*: La tangente (abreviatura "tan") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo dividida entre la longitud del cateto adyacente al ángulo.

2. *Razón seno*: El seno (abreviatura "sen") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo dividida entre la longitud de la hipotenusa.

3. *Razón coseno*: El coseno (abreviatura "cos") de un ángulo agudo es igual a la longitud del cateto adyacente al ángulo dividida entre la longitud de la hipotenusa.

Así, en el triángulo rectángulo *ABC* de la figura 8-1,

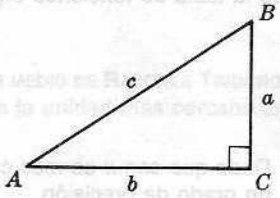


Fig. 8-1

$$\tan A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } A}{\text{longitud del cateto opuesto adyacente a } A} = \frac{a}{b} \qquad \tan B = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } B}{\text{longitud del cateto adyacente a } B} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } A}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } B}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } A}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } B}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Si *A* y *B* son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \cos B \qquad \cos A = \operatorname{sen} B \qquad \tan A = \frac{1}{\tan B} \qquad \tan B = \frac{1}{\tan A}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 USO DE LA TABLA DE SENOS, COSENOS Y TANGENTES

Los siguientes valores fueron tomados de una tabla de senos, cosenos y tangentes. Exprese en forma de ecuación el significado de los valores en las tres primeras líneas. En seguida, utilice la tabla del final de este libro para completar la última línea

	Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
(*a*)	1°	0.0175	0.9998	0.0175
(*b*)	30°	0.5000	0.8660	0.5774
(*c*)	60°	0.8660	0.5000	1.7321
(*d*)	?	?	0.3420	?

Soluciones

(*a*) sen 1° = 0.0175; cos 1° = 0.9998; tan 1° = 0.0175

(*b*) sen 30° = 0.5000; cos 30° = 0.8660; tan 30° = 0.5774

(*c*) sen 60° = 0.8660; cos 60° = 0.5000; tan 60° = 1.7321

(*d*) En la tabla de funciones trigonométricas el número 0.3420 asociado al coseno está en la línea de 70°; por lo tanto,el ángulo buscado mide 70°. Finalmente, de la misma tabla se tiene que sen 70° = 0.9397 y que tan 70° = 2.7475.

8.2 CÁLCULO DE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO CON UN GRADO DE PRECISIÓN DADO

Calcule la medida de *x*, con una precisión máxima de la primera unidad en grados, si: (*a*) sen x = 0.9235; (*b*) cos $x = \frac{21}{25}$ o 0.8400; (*c*) tan $x = \sqrt{5}/10$ o 0.2236. Utilice la tabla de funciones trigonométricas.

Soluciones

Diferencias

(*a*)
sen 68° = 0.9272 → 0.0037
sen x = 0.9235
sen 67° = 0.9205 → 0.0030

Dado que sen x es más cercano a sen 67°, $m\angle x$ = 67° hasta un grado de precisión

(*b*)
cos 32° = 0.8480 → 0.0080
cos x = 0.8400
cos 33° = 0.8387 → 0.0013

Dado que cos x es más cercano a cos 33°, $m\angle x$ = 33° con grado de precisión.

(*c*)
tan 13° = 0.2309 → 0.0073
tan x = 0.2236
tan 12° = 0.2126 → 0.0110

Dado que tan x es más cercano a tan 13°, $m\angle x$ = 13° con grado de precisión

8.3 CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para cada triángulo rectángulo en la figura 8-2, calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

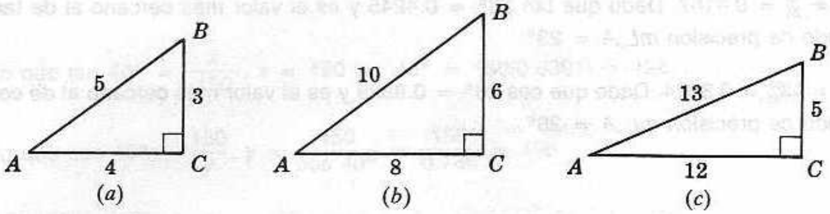


Fig.8-2

Soluciones

Fórmulas	(*a*) $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$	(*b*) $a = 6,\ b = 8,\ c = 10$	(*c*) $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$
$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan A = \frac{3}{4}$	$\tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$\tan A = \frac{5}{12}$
$\tan B = \frac{b}{a}$	$\tan B = \frac{4}{3}$	$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\tan B = \frac{12}{5}$
$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$	$\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$	$\operatorname{sen} A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\operatorname{sen} A = \frac{5}{13}$
$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{sen} B = \frac{4}{5}$	$\operatorname{sen} B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\operatorname{sen} B = \frac{12}{13}$
$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos A = \frac{4}{5}$	$\cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\cos A = \frac{12}{13}$
$\cos B = \frac{a}{c}$	$\cos B = \frac{3}{5}$	$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\cos B = \frac{5}{13}$

.4 CÁLCULO DE MEDIDAS DE ÁNGULOS POR MEDIO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Calcule la medida del ángulo *A*, hasta la unidad más cercana en grados, en cada inciso de la figura 8-3.

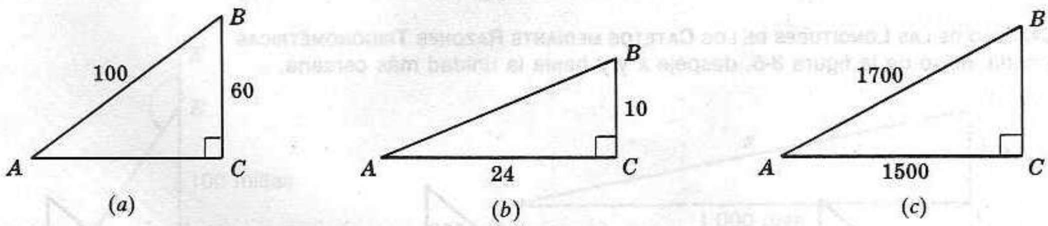


Fig. 8-3

Soluciones

(*a*) $\operatorname{sen} A = \frac{60}{100} = 0.6000$. Dado que $\operatorname{sen} 37° = 0.6018$, entonces si la precisión es hasta el grado más cercano, se tiene que $m\angle A = 37°$.

(*b*) $\tan A = \frac{10}{24} = 0.4167$. Dado que $\tan 23° = 0.4245$ y es el valor más cercano al de $\tan A$, entonces con un grado de precisión $m\angle A = 23°$.

(*c*) $\cos A = \frac{1500}{1700} = 0.8824$. Dado que $\cos 28° = 0.8829$ y es el valor más cercano al de $\cos A$, entonces con un grado de precisión $m\angle A = 28°$.

8.5 Razones Trigonométricas de 30° y 60°

Demuestre que:

(*a*) $\tan 30° = 0.577$ (*c*) $\cos 30° = 0.866$ (*e*) $\text{sen } 60° = 0.866$

(*b*) $\text{sen } 30° = 0.500$ (*d*) $\tan 60° = 1.732$ (*f*) $\cos 60° = 0.500$

Soluciones

Las razones trigonométricas para 30° y 60° pueden obtenerse usando un triángulo con ángulos 30°-60°-90° (Fig. 8-4); en un triángulo como éste, la razón de los lados es de $a{:}b{:}c = 1{:}\sqrt{3}{:}2$. Así:

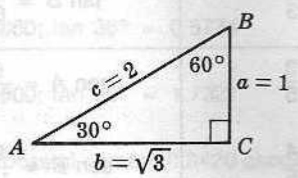


Fig. 8-4

(*a*) $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$ (*d*) $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1.732$

(*b*) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = 0.500$ (*e*) $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(*c*) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ (*f*) $\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.500$

8.6 Cálculo de las Longitudes de los Catetos mediante Razones Trigonométricas

En cada inciso de la figura 8-5, despeje x y y hasta la unidad más cercana.

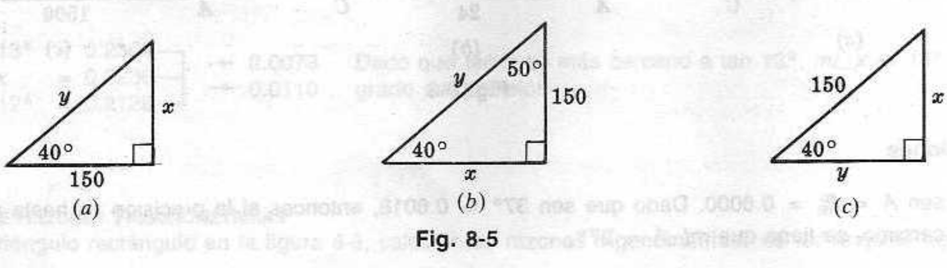


Fig. 8-5

Soluciones

(*a*) Dado que $\tan 40° = \dfrac{x}{150}$, $x = 150 \tan 40° = 150(0.8391) = 126.$

Dado que $\cos 40° = \dfrac{150}{y}$, $y = \dfrac{150}{\cos 40°} = \dfrac{150}{0.766} = 196.$

(*b*) Dado que $\tan 50° = \dfrac{x}{150}$, $x = 150 \tan 50° = 150(1.1198) = 179.$

Dado que $\operatorname{sen} 40° = \dfrac{150}{y}$, $y = \dfrac{150}{\operatorname{sen} 40°} = \dfrac{150}{0.6428} = 233.$

(*c*) Dado que $\operatorname{sen} 40° = \dfrac{x}{150}$, $x = 150 \operatorname{sen} 40° = 150(0.6428) = 96.$

Dado que $\cos 40° = \dfrac{y}{150}$, $y = 150 \cos 40° = 150(0.776) = 115.$

8.7 Resolución de Problemas Trigonométricos

(*a*) Un piloto voló 70 millas al este de *A* hasta *C*. De *C* voló 100 millas al norte hasta *B*. Calcule la medida del ángulo del cambio de curso (hasta la unidad más cercana en grados) que debe hacerse en *B* para regresar a *A*.

(*b*) Se va a construir una carretera de manera que se eleve 105 pies por cada 1 000 pies de distancia horizontal. Calcule la medida del ángulo de elevación, hasta la unidad más cercana en grados, y la longitud de la carretera, hasta la unidad más cercana en pies, por cada 1 000 pies de distancia horizontal.*

Soluciones

(*a*) El ángulo requerido es $\angle EBA$ de la figura 8-6(*a*). En el triángulo rectángulo *ABC*. $\tan B = \frac{70}{100} = 0.7000$; por lo tanto $m\angle B = 35°$ y $m\angle EBA = 180° - 35° = 145°$.

(*b*) Es necesario calcular $m\angle A$ y *x* de la figura 8-6(*b*). Dado que $\tan A = \frac{105}{1\,000} = 0.1050$, $m\angle A = 6°$. Entonces $\cos 6° = \dfrac{1\,000}{x}$, por lo que $x = \dfrac{1\,000}{\cos 6°} = \dfrac{1\,000}{0.9945} = 1\,006$ pies.

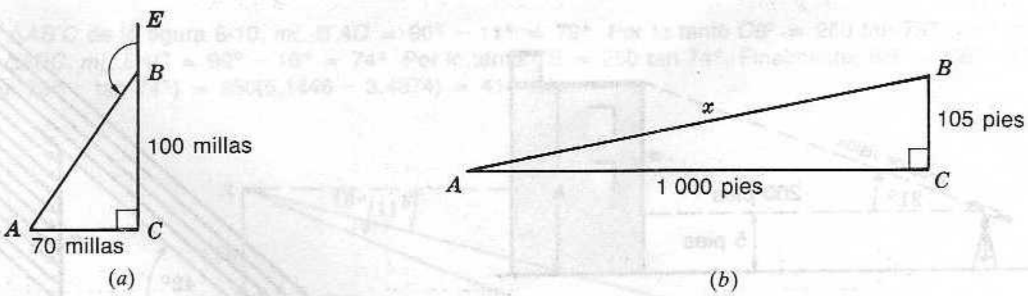


Fig. 8-6

*1 m = 3.281 pies; 1 milla = 1.6093 km.

8.2 ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN

A continuación se dan la definición y la terminología involucradas en problemas donde se determina experimentalmente un ángulo:

La *línea de visión* es la línea que va desde el ojo de un observador hasta el objeto de interés.

La *línea horizontal* es una línea paralela a la superficie del agua.

El *ángulo de elevación* (o de depresión) es un ángulo formado por la línea horizontal y la línea de visión localizada arriba (o abajo) de la línea horizontal, pero en el mismo plano vertical.

Así, en la figura 8-7 el observador divisa un aeroplano arriba de la horizontal y el ángulo formado por la horizontal y la línea de visión se denota como *ángulo de elevación*. Al apuntar al automóvil, el ángulo que forma la línea de visión con la horizontal es un *ángulo de depresión*.

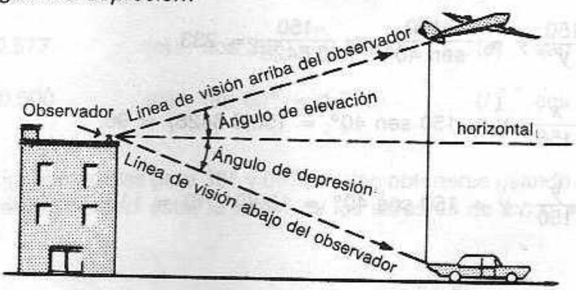


Fig. 8-7

PROBLEMAS RESUELTOS

8.8 PROBLEMAS CON ÁNGULOS DE ELEVACIÓN

(*a*) Al observar hacia el techo de un edificio, Enrique encuentra que el ángulo de elevación mide 21°. El piso está nivelado. El teodolito está 5 pies arriba del piso y a 200 pies del edificio. Calcule la altura del edificio con una precisión hasta la unidad más cercana en pies.

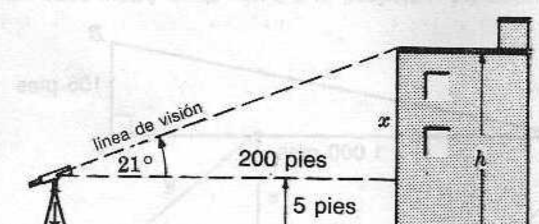
(*b*) Si el ángulo de elevación del Sol a una cierta hora es de 42°, calcule hasta la unidad más cercana en pies, la altura de un árbol cuya sombra mide 25 pies de longitud.

Soluciones

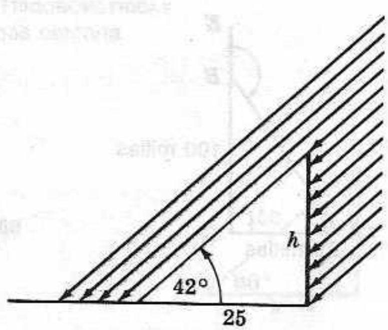
(*a*) Si x es la altura del edificio arriba del teodolito [Fig. 8-8(*a*)], entonces $\tan 21° = \frac{x}{200}$ y $x = 200 \tan 21°$, por lo tanto, $x = 200(0.3839) = 77$ pies.

Así, la altura del edificio es de $h = x + 5 = 77 + 5 = 82$ pies.

(*b*) Si h es la altura del árbol [Fig. 8-8(*b*)], entonces se tiene que $\tan 42° = \frac{h}{25}$, por lo que $h = 25 \tan 42° = 25(0.9004) = 23$ pies.



(*a*)



(*b*)

Fig. 8-8

8.9 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN TANTO EL ÁNGULO DE ELEVACIÓN COMO EL DE DEPRESIÓN

Al estar de pie en la cima de un faro de 200 pies de altura, el guardafaros observó un avión y un barco. El ángulo de elevación del avión es de 25°; el ángulo de depresión del barco mide 32°. Calcule: (*a*) la distancia *d* del barco al pie del faro hasta la decena más cercana en pies; (*b*) la altura del avión sobre el agua con la misma precisión que en el inciso (*a*).

Soluciones

(*a*) Vea la figura 8-9. En el $\triangle$III, $\tan 58° = \dfrac{d}{200}$, por lo que $d = 220 \tan 58° = 200(1.6003) = 320$ pies.

(*b*) En el $\triangle$I, $\tan 25° = \dfrac{x}{920}$ por lo que $x = 320(0.4663) = 150$ pies.

Como la altura del faro es de 200 pies, la altura del avión es de $200 + 150 = 350$ pies.

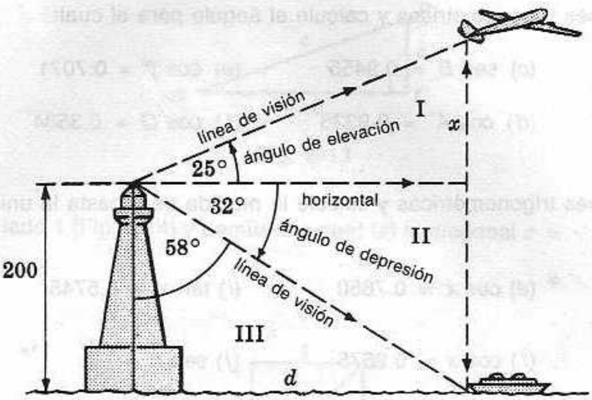


Fig. 8-9

8.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DOS ÁNGULOS DE DEPRESIÓN

Un observador en la cima de un montículo a 250 pies por encima de la superficie de un lago observa dos botes directamente en línea. Calcular, con una precisión de hasta las unidades en pies, la distancia entre los botes si los ángulos de depresión medidos por el observador son de 11° y 16° respectivamente.

Soluciones

En el $\triangle AB'C$ de la figura 8-10, $m\angle B'AC = 90° - 11° = 79°$. Por lo tanto $CB' = 250 \tan 79°$.
En el $\triangle ABC$, $m\angle BAC = 90° - 16° = 74°$. Por lo tanto $CB = 250 \tan 74°$. Finalmente, $BB' = CB' - CB = 250(\tan 79° - \tan 74°) = 250(5.1446 - 3.4874) = 414$ pies.

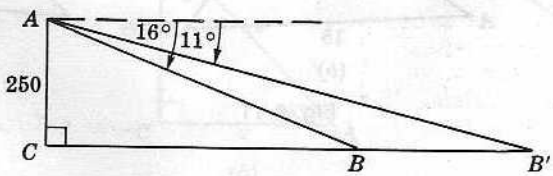


Fig. 8-10

Problemas complementarios

1. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule: (8.1)

   (*a*) sen 25°, sen 48°, sen 59° y sen 89°

   (*b*) cos 15°, cos 52°, cos 74° y cos 88°

   (*c*) tan 4°, tan 34°, tan 55° y tan 87°

   (*d*) ¿Qué razones trigonométricas son crecientes si la medida de un ángulo se incrementa de 0° a 90°?

   (*e*) ¿Qué razones trigonométricas son decrecientes si la medida de un ángulo se incrementa de 0° a 90°?

   (*f*) ¿Qué razón trigonométrica tiene valores mayores que 1?

2. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule el ángulo para el cual: (8.1)

   (*a*) sen $x = 0.3420$ (*c*) sen $B = 0.9455$ (*e*) cos $y = 0.7071$ (*g*) tan $W = 0.3443$

   (*b*) sen $A = 0.4848$ (*d*) cos $A' = 0.9336$ (*f*) cos $Q = 0.3584$ (*h*) tan $B' = 2.3559$

3. Utilice la tabla de funciones trigonométricas y calcule la medida de x hasta la unidad más cercana en grados si: (8.2)

   (*a*) sen $x = 0.4400$ (*e*) cos $x = 0.7650$ (*i*) tan $x = 5.5745$ (*m*) cos $x = \frac{3}{8}$

   (*b*) sen $x = 0.7280$ (*f*) cos $x = 0.2675$ (*j*) sen $x = \frac{11}{50}$ (*n*) cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (*c*) sen $x = 0.9365$ (*g*) tan $x = 0.1245$ (*k*) sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*o*) tan $x = \frac{2}{7}$

   (*d*) cos $x = 0.9900$ (*h*) tan $x = 0.5200$ (*l*) cos $x = \frac{13}{25}$ (*p*) tan $x = \frac{\sqrt{3}}{10}$

4. En cada triángulo de la figura 8-11, calcule sen *A*, cos *A*, tan *A*. (8.3)

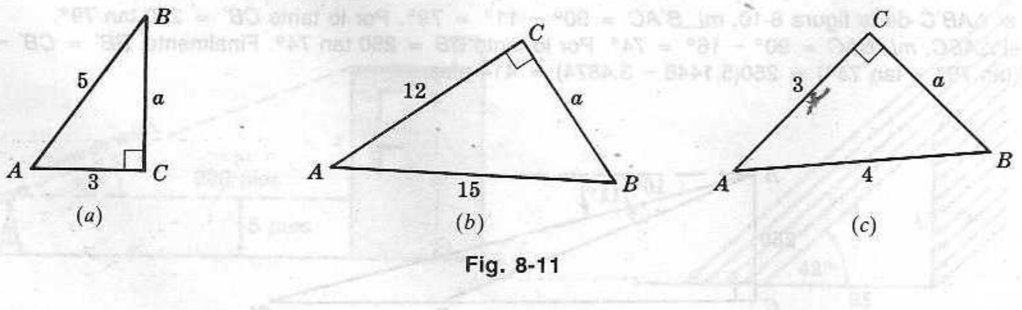


Fig. 8-11

5. En cada inciso de la figura 8-12, calcule $m\angle a$ hasta la unidad más próxima. (8.4)

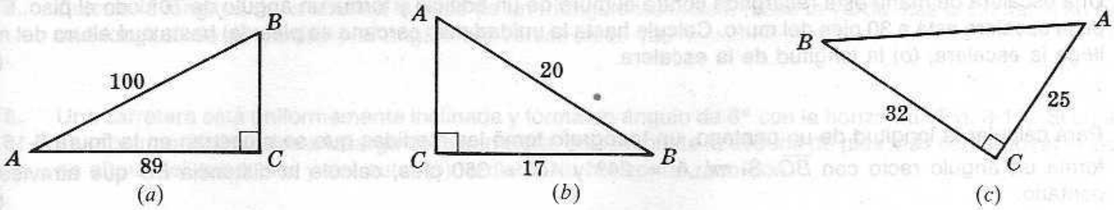


Fig. 8-12

6. En la figura 8-13, calcule $m\angle B$ hasta la unidad más próxima si (*a*) $b = 67$ y $c = 100$; (*b*) $a = 14$ y $c = 50$; (*c*) $a = 22$ y $b = 55$; (*d*) $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$ (8.4)

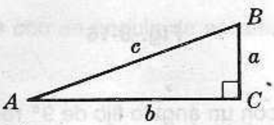


Fig. 8-13

7. Utilice un cuadrado de lado 1 (Fig. 8-14) y demuestre que: (*a*) la diagonal $c = \sqrt{2}$; (*b*) tan 45° = 1; (*c*) sen 45° = cos 45° = 0.707 (8.5)

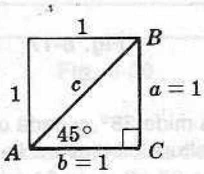


Fig. 8-14

8. Calcule todos los ángulos agudos de cualquiera de los triángulos rectángulos cuyos lados están en proporciones de: (*a*) 5:12:13; (*b*) 8:15:17; (*c*) 7:24:25; (*d*) 11:60:61; hasta la unidad más cercana en grados. (8.5)

9. En cada triángulo de la figura 8-15, despeje *x* y *y* hasta la unidad más cercana en grados. (8.5)

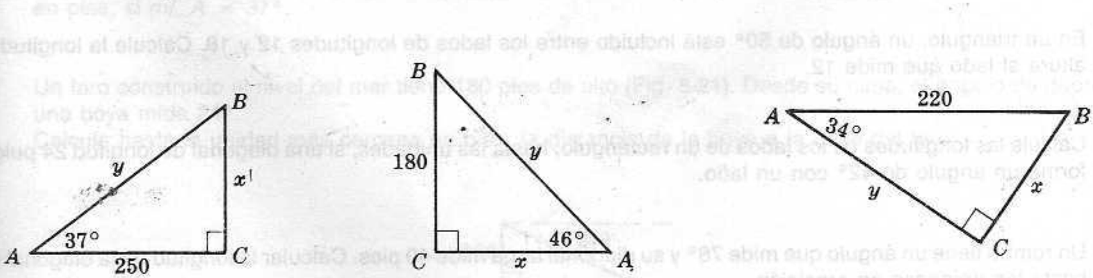


Fig. 8-15

10. Una escalera de mano está recargada contra el muro de un edificio y forma un ángulo de 70° con el piso. El pie de la escalera está a 30 pies del muro. Calcule hasta la unidad más cercana en pies: (*a*) hasta qué altura del muro llega la escalera; (*b*) la longitud de la escalera. (8.6)

11. Para calcular la longitud de un pantano, un topógrafo tomó las medidas que se muestran en la figura 8-16. $\overline{AC}$ forma un ángulo recto con $\overline{BC}$. Si $m\angle A = 24°$ y $AC = 350$ pies, calcule la distancia BC que atraviesa al pantano. (8.6)

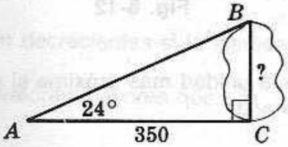


Fig. 8-16

12. Un avión se eleva al despegar y vuela con un ángulo fijo de 9° respecto al suelo (Fig. 8-17). Cuando ha llegado a 400 pies de altura, calcule hasta la primera decena: (*a*) la distancia horizontal que ha recorrido; (*b*) la distancia que efectivamente ha recorrido el avión. (8.6)

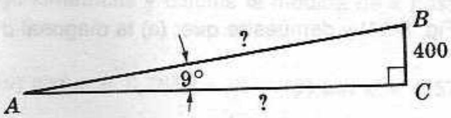


Fig. 8-17

13. El ángulo base de un triángulo isósceles mide 28°, y cada cateto mide 45 pulgadas* (Fig. 8-18). Calcule, hasta la primera unidad: (*a*) la longitud de la altura dibujada a la base; la longitud de la base. (8.6)

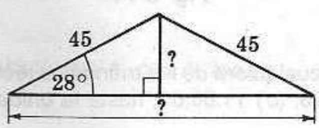


Fig. 8-18

14. En un triángulo, un ángulo de 50° está incluido entre los lados de longitudes 12 y 18. Calcule la longitud de la altura al lado que mide 12. (8.6)

15. Calcule las longitudes de los lados de un rectángulo, hasta las unidades, si una diagonal de longitud 24 pulgadas forma un ángulo de 42° con un lado. (8.6)

16. Un rombo tiene un ángulo que mide 76° y su diagonal larga mide 40 pies. Calcular la longitud de la diagonal corta hasta las unidades en precisión. (8.6)

---

*1 pulgada = 2.54 cm.

17. Calcule la longitud de la altura a la base de un triángulo isósceles, hasta la yarda más próxima, si su base tiene una longitud de 40 yardas y el ángulo del vértice mide 106°. (8.6)

18. Una carretera está uniformemente inclinada y forma un ángulo de 6° con la horizontal (Fig. 8-19). Si un automóvil ha recorrido 10 000 pies a lo largo de la carretera, calcule hasta la decena de pies más cercana: (*a*) el incremento en altura del conductor y del auto; (*b*) la distancia horizontal recorrida. (8.7)

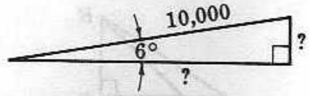


Fig. 8-19

19. Un avión viaja 15 000 pies en el aire con un ángulo de escalada uniforme, ganando así 19 000 pies de altura. Calcule el ángulo de escalada. (8.7)

20. Al divisar la cima de un monumento, Guillermo encontró que el ángulo de elevación era de 16° (Fig. 8-20). El piso está nivelado y el teodolito está 5 pies arriba del piso. Si el monumento tiene 86 pies de alto, calcule la distancia entre Guillermo y la base del monumento. (8.8)

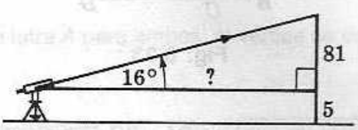


Fig. 8-20

21. Calcule hasta la unidad más cercana en grados, la medida del ángulo de elevación del Sol cuando un árbol de 60 pies de alto proyecta una sombra de: (*a*) 10 pies; (*b*) 60 pies. (8.8)

22. A cierta hora del día, el ángulo de elevación del Sol mide 34°. Calcule hasta la unidad más cercana en pies, la longitud de la sombra proyectada por: (*a*) un asta de 15 pies; (*b*) un edificio de 70 pies de alto. (8.8)

23. Una luz en *C* se proyecta verticalmente hasta una nube *B*. Un observador en *A*, a una distancia horizontal de *C* de 1 000 pies determina el ángulo de elevación de *B*. Calcule la altura de la nube, hasta la unidad más cercana en pies, si $m\angle A = 37°$. (8.8)

24. Un faro construido al nivel del mar tiene 180 pies de alto (Fig. 8-21). Desde su cima, el ángulo de depresión de una boya mide 24°.
Calcule hasta la unidad más cercana en pies, la distancia de la boya a la base del faro. (8.8)

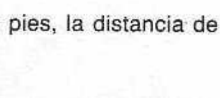


Fig. 8-21

25. Un observador en la cima de un monte a 300 pies sobre el nivel de un lago, divisa dos barcos directamente en línea. Calcule, hasta la unidad más cercana en pies, la distancia entre los barcos si los ángulos de depresión determinados por el observador son: (*a*) 20° y 15°; (*b*) 35° y 24°; (*c*) 9° y 6°. (8.10)

26. En la figura 8-22, $m\angle A = 43°$, $m\angle BDC = 54°$, $m\angle C = 90°$ y $DC = 170$ pies. (*a*) Calcule la longitud de BC; (*b*) del resultado del inciso (*a*) calcule la longitud de $\overline{AB}$. (8.10)

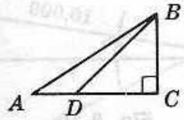


Fig. 8-22

27. En la figura 8-23, $m\angle B = 90°$, $m\angle ACB = 58°$, $m\angle D = 23°$ y $BC = 60$ pies. (*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$; (*b*) del resultado del inciso (*a*) calcule la longitud de $\overline{CD}$. (8.10)

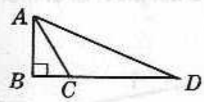


Fig. 8-23

28. Desde un punto externo P se dibujan las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a un círculo. $m\angle APB = 40°$ y $PA = 25$. (*a*) Calcule, hasta la décima más cercana, el radio del círculo. (*b*) Calcule, hasta la unidad más cercana, la longitud del arco menor $\widehat{AB}$.

9

Áreas

9.1 ÁREA DE UN RECTÁNGULO Y DE UN CUADRADO

Una *unidad cuadrada* es la superficie encerrada por un cuadrado cuyo lado es 1 unidad (Fig. 9-1).

El *área de una superficie cerrada*, tal como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie. Como un rectángulo con 5 unidades de largo y 4 unidades de ancho se puede dividir en 20 unidades cuadradas, su área es de 20 unidades cuadradas (Fig. 9-2).

El *área de un rectángulo es igual al producto de la longitud de su base y la longitud de su altura* (Fig. 9-3). Así, si $b = 8$ pulgadas y $h = 3$ pulgadas, entonces $A = 24$ pulg^2.

El *área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de un lado.* (Fig. 9-4). Si $s = 6$, entonces $A = s^2 = 36$.

Se deduce que el área de un cuadrado también es igual a la mitad del cuadrado de la longitud de su diagonal. Como $A = s^2$ y $s = d/\sqrt{2}$, $A = \frac{1}{2}d^2$.

Nótese que, en ocasiones, se utiliza la letra *A* para ambos; el vértice de una figura y su área. No se tendrá dificultad en determinar a cuál se refiere.

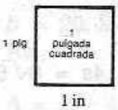


Fig. 9-1

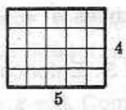
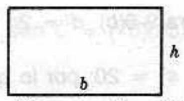
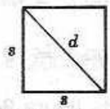


Fig. 9-2



Rectángulo: $A = bh$

Fig. 9-3



Cuadrado: $A = s^2$

$A = \frac{1}{2}d^2$

Fig. 9-4

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 Área de un Rectángulo

(*a*) Calcule el área de un rectángulo, si su base tiene longitud 15 y el perímetro es 50.

(*b*) Determine el área de un rectángulo, si su altura tiene longitud 10 y la diagonal tiene longitud 26.

(*c*) Calcule las longitudes de la base y altura de un rectángulo, si su área es 70 y su perímetro es 34.

Soluciones

Véase figura 9-5.

(*a*) Aquí, $p = 50$ y $b = 15$. Como $p = 2b + 2h$, se tiene $50 = 2(15) + 2h$, así $h = 10$.
Por lo que $A = bh = 15(10) = 150$.

(*b*) Aquí, $d = 26$ y $h = 10$. En el $\triangle$ rectángulo *ACD*, $d^2 = b^2 + h^2$, de modo que $26^2 = b^2 + 10^2$ o $b = 24$.
Por lo que $A = bh = 24(10) = 240$.

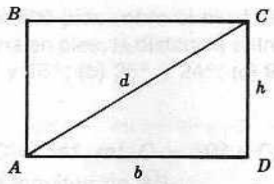


Fig. 9-5

(*c*) Aquí, $A = 70$ y $p = 34$. Como $p = 2b + 2h$, se tiene $34 = 2(b + h)$ ó $h = 17 - b$. Como $A = bh$, se tiene $70 = b(17 - b)$, así, $b^2 - 17b + 70 = 0$ y $b = 7$ ó 10. Entonces, como $h = 17 - b$, se obtiene $h = 10$ ó 7.
Resp. *10 y 7, ó 7 y 10.*

9.2 Área de un Cuadrado

(*a*) Encuentre el área de un cuadrado cuyo perímetro es 30.

(*b*) Calcule el área de un cuadrado si el radio del círculo circunscrito es 10.

(*c*) Determine el lado y el perímetro de un cuadrado cuya área es 20.

(*d*) Calcule el número de pulgadas cuadradas en un pie cuadrado.

Soluciones

(*a*) Como $p = 4s = 30$ en la figura 9-6(*a*), $s = 7\frac{1}{2}$. Entonces $A = s^2 = (7\frac{1}{2})^2 = 56\frac{1}{4}$

(*b*) Como $r = 10$ en la figura 9-6(*b*), $d = 2r = 20$. Entonces $A = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(20)^2 = 200$.

(*c*) En la figura 9-6(*a*), $A = s^2 = 20$; por lo que $s = 2\sqrt{5}$. Entonces el perímetro $= 4s = 8\sqrt{5}$.

(*d*) $A = s^2$. Como 1 pie = 12 pulgadas, 1 pie^2 = 1 pie × 1 pie = 12 pulgadas × 12 pulgadas = 144 pulgadas^2.

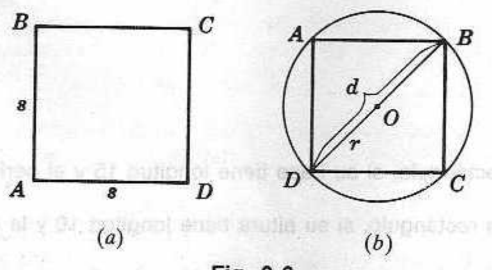
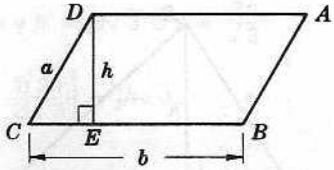


Fig. 9-6

9.2 ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

El *área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura sobre el mismo lado*. (Se da una demostración de este teorema en el capítulo 16.) Entonces, en el ▱ *ABCD* (Fig. 9-7), si $b = 10$ y $h = 2.7$, entonces $A = 10(2.7) = 27$.

El *área de un paralelogramo es igual al producto de las longitudes de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre ellos*. En el $\triangle DEC$, $h = a$ sen C; por lo que $A = bh = ab$ sen C.



Paralelogramo: $A = bh$
$A = ab$ sen C

Fig. 9-7

PROBLEMAS RESUELTOS

9.3 Área de un Paralelogramo

(*a*) Calcule el área de un paralelogramo si los lados de longitud 20 y 10 incluyen un ángulo que mide 59°. (Redondee la respuesta al entero más próximo).

(*b*) Determine el área de un paralelogramo si el área está representada por $x^2 + 4$, la longitud de un lado por $x + 4$, y la longitud de la altura sobre este lado por $x - 3$.

(*c*) En un paralelogramo, calcule la longitud de la altura si el área es 54 y la razón de la altura a la base es 2:3.

Soluciones

Véase figura 9-7

(*a*) $b = 20$, $a = 10$, $m\angle C = 59°$. Entonces $A = ab$ sen $C = (10)(20)$ sen $59° = 200(0.8572) = 171.44$. Así, $A = 171$, to the nearest integer.

(*b*) $A = x^2 - 4$, $b = x + 4$, $h = x - 3$. Como $A = bh$, $x^2 - 4 = (x + 4)(x - 3)$ o $x^2 - 4 = x^2 + x - 12$ y $x = 8$. Por lo que $A = x^2 - 4 = 64 - 4 = 60$.

(*c*) Sea $h = 2x$, $b = 3x$. Entonces $A = bh$ o $54 = (3x)(2x) = 6x^2$, así $9 = x^2$ y $x = 3$. Por lo que $h = 2x = 2(3) = 6$.

9.3 ÁREA DE UN TRIÁNGULO

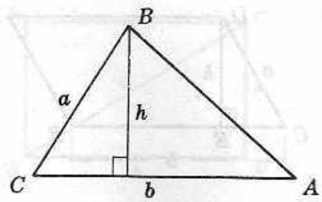
El *área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura sobre este lado.* (Este teorema se demuestra en el Capítulo 16.)

El *área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados adyacentes y el seno del ángulo que incluyen.* Así si $a = 25$, $b = 4$, y sen $C = 0.28$ en la figura 9-8, entonces $A = \frac{1}{2}(25)(4)(0.28) = 14$.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.4 Área de un Triángulo

Calcule, redondeando al entero más próximo, las áreas de los triángulos en la figura 9-9, donde (*a*) dos lados adyacentes de longitudes 15 y 8 incluyen un ángulo de 150°; (*b*) dos lados adyacentes de longitudes 16 y 5 incluyen un ángulo de 53°.



Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C$

Fig. 9-8

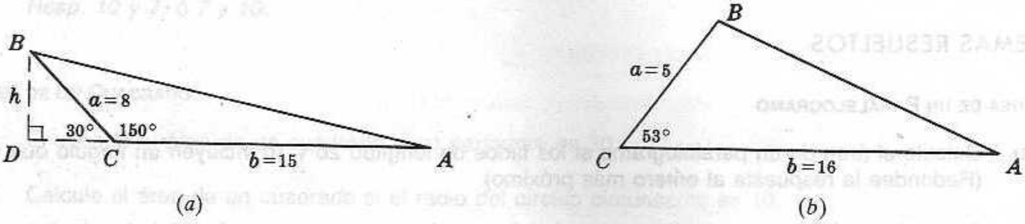


Fig. 9-9

Soluciones

(*a*) Aquí, $b = 15$ y $a = 8$. Como $m\angle BCA = 150°$, $m\angle BCD = 180° - 150° = 30°$.
En el $\triangle BCD$, h está opuesta al $\angle BCD$; por lo que $h = \frac{1}{2}a = 4$. Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(15)(4) = 30$.

(*b*) Aquí, $a = 5$, $b = 16$, y $m\angle C = 53°$. Entonces, $A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C = \frac{1}{2}(5)(16) \text{ sen } 53° = 40(0.7986) = 32$.

9.5 FÓRMULAS PARA EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Derive la fórmula para el área de un triángulo equilátero (*a*) cuyo lado tiene longitud *s*; (*b*) cuya altura tiene longitud *h*.

Soluciones

Véase figura 9-10.

Triángulo equilátero:

$A = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$

$A = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$

Fig. 9-10

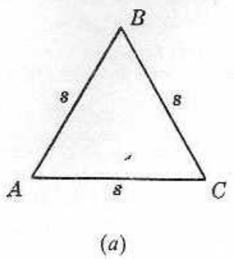
(*a*) Aquí, $A = \frac{1}{2}bh$, donde $b = s$ y $h^2 = s^2 - (\frac{1}{2}s)^2 = \frac{3}{4}s^2$ ó $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$.
Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s\sqrt{3}) = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$.

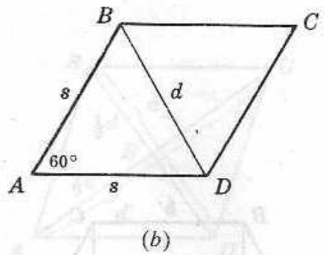
(*b*) Aquí, $A = \frac{1}{2}bh$, donde $b = s$ y $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$ ó $s = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}sh = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2h}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$.

9.6 Área de un Triángulo Equilátero

En la figura 9-11, calcule el área de (*a*) un triángulo equilátero cuyo perímetro es 24; (*b*) un rombo en el cual la diagonal menor tiene longitud 12 y un ángulo mide 60°; (*c*) un hexágono regular con un lado de longitud 6.





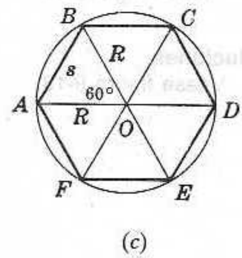


Fig. 9-11

Soluciones

(*a*) Como $p = 3s = 24$, $s = 8$. Entonces $A = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(64)\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

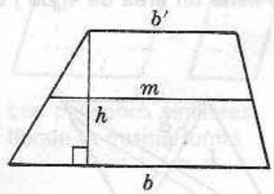
(*b*) Como $m\angle A = 60°$, $\triangle ABD$ es equilátero y $s = d = 12$. El área del rombo es dos veces el área del $\triangle ABD$. Por lo que $A = 2(\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}) = 2(\frac{1}{4})(144)\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.

(*c*) Un lado s de un hexágono inscrito produce un ángulo central que mide $\frac{1}{6}(360°) = 60°$. Entonces, como $OA = OB =$ radio R del círculo circunscrito, $m\angle OAB = m\angle OBA = 60°$. Así $\triangle AOB$ es equilátero. Área del hexágono $= 6$ (área de $\triangle AOB$) $= 6(\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}) = 6(\frac{1}{4})(36\sqrt{3}) = 54\sqrt{3}$.

9.4 ÁREA DE UN TRAPEZOIDE

El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases. (Este teorema se demuestra en el capítulo 16) Así, si $h = 20$, $b = 27$, y $b' = 23$ en la figura 9-12, entonces $A = \frac{1}{2}(20)(27 + 23) = 500$.

El área de un trapezoide es igual al producto de las longitudes de su altura y su mediana. Como $A = \frac{1}{2}h(b + b')$ y $m = \frac{1}{2}(b + b')$, $A = hm$.



Trapezoide: $A = \frac{1}{2}h(b + b')$

$A = hm$

Fig. 9-12

PROBLEMAS RESUELTOS

9.7 ÁREA DE UN TRAPEZOIDE

(*a*) Calcule el área de un trapezoide si las bases tienen longitudes 7.3 y 2.7 y la altura tiene longitud 3.8.

(*b*) Encuentre el área de un trapezoide isósceles si las bases tienen longitudes 22 y 10 y los lados tienen longitud 10.

(*c*) Calcule las bases de un trapezoide isósceles si el área es $52\sqrt{3}$, la altura tiene longitud $4\sqrt{3}$ y cada lado tiene longitud 8.

Soluciones
Véase figura 9-13.

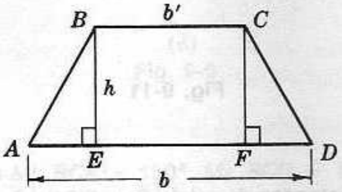


Fig. 9-13

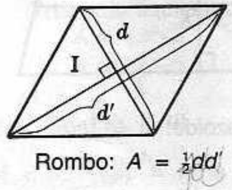
(*a*) Aquí, $b = 7.3$, $b' = 2.7$, $h = 3.8$. Entonces, $A = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(3.8)(7.3 + 2.7) = 19$.

(*b*) Aquí, $b = 22$, $b' = 10$, $AB = 10$. Además $EF = b' = 10$ y $AE = \frac{1}{2}(22 - 10) = 6$. En el $\triangle BEA$, $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ por lo que $h = 8$. Entonces, $A = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(8)(22 + 10) = 128$.

(*c*) $AE = \sqrt{(AB)^2 - h^2} = \sqrt{64 - 48}$. Además, $FD = AE = 4$, y $b' = b - (AE + FD) = b - 8$. Entonces, $A\ \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}h(2b - 8)$ o $52\sqrt{3} = \frac{1}{2}(4\sqrt{3})(2b - 8)$, de donde $26 = 2b - 8$ o $b = 17$. Entonces, $b' = b - 8 = 17 - 8 = 9$.

9.5 ÁREA DE UN ROMBO

El *área de un rombo es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales*. Como cada diagonal es mediatriz de la otra, el área del triángulo I en la figura 9-14 es $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}d)(\frac{1}{2}d') = \frac{1}{8}dd'$. De manera que el rombo, que está formado por cuatro triángulos congruentes con el $\triangle$I, tiene un área de $4(\frac{1}{8}dd')$ o $\frac{1}{2}dd'$.



Rombo: $A = \frac{1}{2}dd'$

Fig. 9-14

PROBLEMAS RESUELTOS

9.8 ÁREA DE UN ROMBO

(*a*) Calcule el área de un rombo si una diagonal tiene longitud 30 y un lado tiene longitud 17.

(*b*) Determine la longitud de una diagonal de un rombo si la otra diagonal tiene longitud 8 y el área del rombo es 52.

Soluciones

Véase figura 9-15

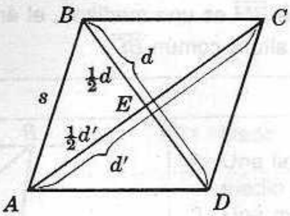


Fig. 9-15

(*a*) En el $\triangle$ rectángulo AEB, $s^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + (\frac{1}{2}d')^2$ ó $17^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + 15^2$. Entonces, $\frac{1}{2}d = 8$ y $d = 16$. Por lo que $A = \frac{1}{2}dd' = \frac{1}{2}(16)(30) = 240$.

(*b*) Se tiene $d' = 8$ y $A = 52$. Entonces $A = \frac{1}{2}dd'$ ó $52 = \frac{1}{2}(d)(8)$ y $d = 13$.

9.6 POLÍGONOS DEL MISMO TAMAÑO O FORMA

La figura 9-16 muestra lo que se quiere decir cuando se expresa que dos polígonos son de área igual, o que son similares o congruentes.

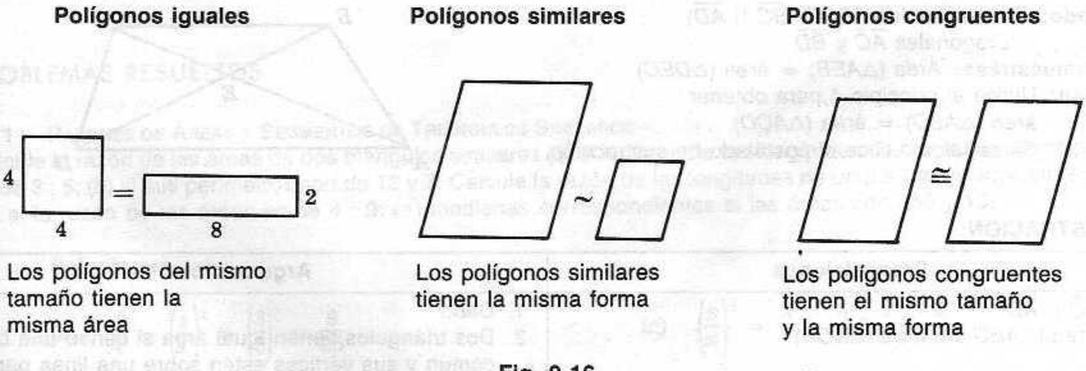


Fig. 9-16

PRINCIPIO 1: *dos paralelogramos tienen áreas iguales si tienen bases y alturas congruentes.* Los dos paralelogramos que se muestran en la figura 9-17 son iguales.

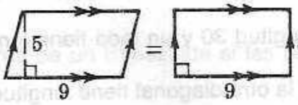


Fig. 9-17

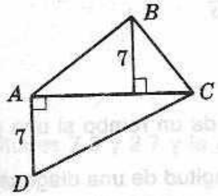


Fig. 9-18

Principio 2: *los triángulos tienen área igual si tienen bases y alturas congruentes.*
En la figura 9-18, el área del $\triangle CAB$ es igual al área del $\triangle CAD$.

Principio 3: *una mediana divide a un triángulo en dos triángulos de áreas iguales.*
De esta manera, en la figura 9-19, donde $\overline{BM}$ es una mediana, el área del $\triangle AMB$ es igual al área del $\triangle BMC$ ya que tienen bases congruentes ($\overline{AM} \cong \overline{MC}$) y altura común $\overline{BD}$.

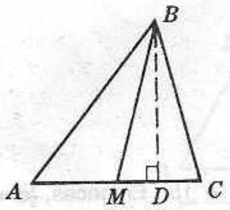


Fig. 9-19

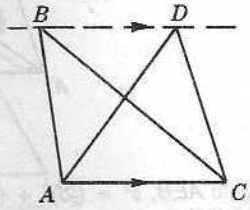


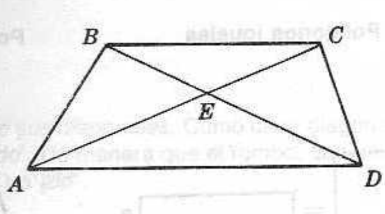
Fig. 9-20

Principio 4: *dos triángulos son iguales en área si tienen una base en común y sus vértices están sobre una línea paralela a la base.*
En la figura 9-20, el área del $\triangle ABC$ es igual al área del $\triangle ADC$.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.9 Resolución de un Problema Sobre Áreas Iguales

Dado: el trapezoide $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$)
Diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
Demuéstrese: Área ($\triangle AEB$) = área ($\triangle DEC$)
Plan: Utilice el principio 4 para obtener
área ($\triangle ABD$) = área ($\triangle ACD$).
En seguida, utilice el postulado de sustracción.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	1. Dado
2. Área ($\triangle ABD$) = área ($\triangle ACD$)	2. Dos triángulos tienen igual área si tienen una base común y sus vértices están sobre una línea paralela a su base.
3. Área ($\triangle AED$) = área ($\triangle AED$)	3. Postulado de identidad
4. Área ($\triangle AED$) = área ($\triangle DEC$)	4. Postulado de sustracción

9.10 Resolución de un Problema Sobre Áreas Iguales Expresado en Palabras

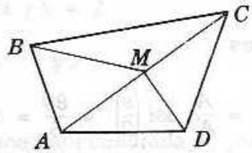
Demuestre que si M es el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$ en un cuadrilátero $ABCD$, y se trazan $\overline{BM}$ y $\overline{DM}$, entonces el área del cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.

Solución

Dado: cuadrilátero $ABCD$
M punto medio de la diagonal $\overline{AC}$

Demuéstrese: El área del cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.

Plan: utilice el principio 3 para obtener dos pares de triángulos que son iguales en área.
En seguida utilice el postulado de adición.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. M es el punto medio de $\overline{AC}$.	1. Dado
2. $\overline{BM}$ es una mediana del $\triangle ACB$.	2. Una línea desde el vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto es una mediana.
3. Área ($\triangle AMB$) = área ($\triangle BMC$). Área ($\triangle AMD$) = área ($\triangle DMC$)	3. Una mediana divide a un triángulo en dos triángulos de la misma área.
4. El área de cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.	4. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales

9.7 COMPARANDO ÁREAS DE POLÍGONOS SIMILARES

Las *áreas de polígonos similares son entre sí como los cuadrados de cualquiera de sus dos segmentos correspondientes.*

Así, si el $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y el área del $\triangle ABC$ es 25 veces el área del $\triangle A'B'C'$, entonces la razón de las longitudes de cualquiera de los lados correspondientes, medianas, alturas, radios de círculos inscritos o circunscritos y otros, es de 5:1.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.11 Razones de Áreas y Segmentos de Triángulos Similares

Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares (*a*) si la razón de las longitudes de dos lados correspondientes es de 3 : 5; (*b*) si sus perímetros son de 12 y 7. Calcule la razón de las longitudes de un par de (*c*) lados correspondientes si la razón de las áreas es de 4 : 9; (*d*) medianas correspondientes si las áreas son 250 y 10.

Soluciones

(*a*) $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$ (*c*) $\left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{4}{9}$ ó $\dfrac{s}{s'} = \dfrac{2}{3}$

(*b*) $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{p}{p'}\right)^2 = \left(\dfrac{12}{7}\right)^2 = \dfrac{144}{49}$ (*d*) $\left(\dfrac{m}{m'}\right)^2 = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{250}{10}$ ó $\dfrac{m}{m'} = 5$

9.12 Proporciones Derivadas de Polígonos Similares

(*a*) Las áreas de dos polígonos similares son 80 y 5. Si un lado del polígono menor tiene longitud 2, calcule la longitud del lado correspondiente en el polígono mayor.

(*b*) Las diagonales correspondientes de dos polígonos similares tienen longitud 4 y 5. Si el área del polígono mayor es 75, calcule el área del polígono menor.

Soluciones

(*a*) $\left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \frac{A}{A'}$, así $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{80}{5} = 16$. Entonces $\frac{s}{2} = 4$ y $s = 8$.

(*b*) $\frac{A}{A'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$, así $\frac{A}{75} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$. Entonces $A = 75\left(\frac{16}{25}\right) = 48$.

Problemas complementarios

1. Calcule el área de un rectángulo (9.1)

(*a*) Si la base tiene longitud 11 pulgadas y la altura tiene longitud 9 pulgadas.

(*b*) Si la base tiene longitud 2 pies y la altura tiene longitud 1 pie 6 pulgadas.

(*c*) Si la base tiene longitud 25 y el perímetro es 90.

(*d*) Si la base tiene longitud 15 y la diagonal tiene longitud 17.

(*e*) Si la diagonal tiene longitud 12 y el ángulo entre la diagonal y la base mide 60°.

(*f*) Si la diagonal tiene longitud 20 y el ángulo entre la diagonal y la base mide 30°.

(*g*) Si la diagonal tiene longitud 25 y las longitudes de los lados están en la razón de 3:4.

(*h*) Si el perímetro es 50 y las longitudes de los lados están en la razón de 2:3.

2. Calcule el área de un rectángulo inscrito en un círculo (9.1)

(*a*) Si el radio del círculo es 5 y la base tiene longitud 6.

(*b*) Si el radio del círculo es 15 y la altura tiene longitud 24.

(*c*) Si el radio y la altura tienen ambos longitud 5.

(*d*) Si el diámetro tiene longitud 26 y la base y la altura están en la razón de 5:12.

3. Calcule la base y la altura de un rectángulo (9.1)

(*a*) Si su área es 28 y la base tiene una longitud de 3 más que la altura.

(*b*) Si su área es 72 y la base es el doble de la altura.

(*c*) Si su área es 54 y la razón de la base con la altura es de 3:2.

(*d*) Si su área es 12 y el perímetro es 16.

(*e*) Si su área es 70 y la base y la altura están representadas por $2x$ y $x + 2$.

(*f*) Si su área es 160 y la base y altura están representadas por $3x - 4$ y x.

4. Calcule el área de (*a*) una yarda cuadrada en pulgadas cuadradas; (*b*) una bara cuadrada en yardas cuadradas (1 bara = $5\frac{1}{2}$ yardas); (*c*) un metro cuadrado en decímetros cuadrados (1 m = 10 dm). (9.2)

5. Calcule el área de un cuadrado si (*a*) un lado tiene longitud 15; (*b*) un lado tiene longitud $3\frac{1}{2}$; (*c*) un lado tiene longitud 1.8; (*d*) un lado tiene longitud $8a$; (*e*) el perímetro es 44; (*f*) el perímetro es 10; (*g*) el perímetro es $12b$; (*h*) la diagonal tiene longitud 8; (*i*) la diagonal tiene longitud 9; (*j*) la diagonal tiene longitud $8\sqrt{2}$ (9.2)

6. Encuentre el área de un cuadrado si (*a*) el radio del círculo circunscrito es 8; (*b*) el diámetro del círculo circunscrito es 12; (*c*) el diámetro del círculo circunscrito es $10\sqrt{2}$; (*d*) el radio del círculo inscrito es $3\frac{1}{2}$; (*e*) el diámetro del círculo inscrito es 20. (9.2)

7. Si un piso tiene 20 m de largo y 80 m de ancho, ¿cuántas losetas son necesarias para cubrirlo si (*a*) cada loseta mide 1 m^2; (*b*) cada loseta es un cuadrado de 2 m por lado; (*c*) cada loseta es un cuadrado de 4 m por lado? (9.2)

8. Si el área de un cuadrado es 81, calcule la longitud de (*a*) su lado; (*b*) su perímetro; (*c*) su diagonal; (*d*) el radio del círculo inscrito; (*e*) el radio del círculo circunscrito. (9.2)

9. (*a*) Determine la longitud del lado de un cuadrado cuya área es $6\frac{1}{4}$ (9.2)

(*b*) Calcule el perímetro de un cuadrado cuya área es 169.

(*c*) Encuentre la longitud de la diagonal de un cuadrado cuya área es 50.

(*d*) Calcule la longitud de la diagonal de un cuadrado cuya área es 25.

(*e*) Determine el radio del círculo inscrito en un cuadrado cuya área es 144.

(*f*) Calcule el radio del círculo circunscrito en un cuadrado cuya área es 32.

10. Calcule el área de un paralelogramo si la base y la altura tienen longitudes, respectivamente, de (*a*) 3 pies y $5\frac{1}{3}$ pies; (*b*) 4 pies y 1 pie 6 pulgadas; (*c*) 20 y 3.5; (*d*) 1.8 m y 0.9 m. (9.3)

11. Calcule el área de un paralelogramo si la base y la altura tienen longitudes, respectivamente, de (*a*) $3x$ y x; (*b*) $x + 3$ y x; (*c*) $x - 5$ y $x + 5$; (*d*) $4x + 1$ y $3x + 2$ (9.3)

12. Determine el área de un paralelogramo si dos lados adyacentes tienen longitudes de (*a*) 15 y 20 e incluyen un ángulo que mide 30°; (*b*) 9 y 12 e incluyen un ángulo que mide 45°; (*c*) 14 y 8 e incluyen un ángulo que mide 60°;

(*d*) 10 y 12 e incluyen un ángulo que mide 150°; (*e*) 6 y 4 e incluyen un ángulo que mide 28°; (*f*) 9 y 10 e incluyen un ángulo que mide 38°.

13. Calcule el área de un paralelogramo si (9.3)

(*a*) El área está representada por x^2, la base por $x + 3$, y la altura por $x - 2$.

(*b*) El área está representada por $x^2 - 10$, la base por x, y la altura por $x - 2$.

(*c*) El área está representada por $2x^2 - 34$, la base por $x + 3$, y la altura por $x - 3$.

14. En un paralelogramo, encuentre (9.3)

(*a*) La base si el área es 40 y la altura tiene longitud 15.

(*b*) La longitud de la altura si el área es 22 y la base tiene longitud 1.1.

(*c*) La longitud de la base si el área es 27 y la base es tres veces la altura.

(*d*) La longitud de la altura si el área es 21 y la base tiene longitud cuatro más que la altura.

(*e*) La base si el área es 90 y la razón de la base a la altura es de 5:2.

(*f*) La longitud de la altura sobre un lado de longitud 20 si la altura sobre un lado de longitud 15 es 16.

(*g*) La longitud de la base si el área es 48, la base está representada por $x + 3$, y la altura por $x + 1$.

(*h*) La longitud de la base si el área está representada por $x^2 + 17$, la base por $2x - 3$, y la altura por $x + 1$

15. Calcule el área de un triángulo si las longitudes de la base y altura son, respectivamente, (*a*) 6 pulgadas y $3\frac{2}{3}$ pulgadas; (*b*) 1 yarda y 2 pies; (*c*) 8 y $x - 7$; (*d*) $5x$ y $4x$; (*e*) $4x$ y $x + 9$; (*f*) $x + 4$ y $x - 4$; (*g*) $2x - 6$ y $x + 3$. (9.4)

16. Encuentre el área de un triángulo si dos lados adyacentes tienen longitudes de (*a*) 8 y 5 e incluyen un ángulo que mide 30°; (*b*) 5 y 4 e incluyen un ángulo que mide 45°; (*c*) 8 y 12 e incluyen un ángulo que mide 60°; (*d*) 25 y 10 e incluyen un ángulo que mide 150°; (*e*) 20 y 5 e incluyen un ángulo que mide 36°; (*f*) 16 y 9 e incluyen un ángulo que mide 140°. (9.4)

17. Determine el área de un triángulo rectángulo si (*a*) los catetos tienen longitudes 5 y 6; (*b*) los catetos son iguales y la hipotenusa es 16; (*c*) el cateto opuesto al ángulo de 30° es 6; (*d*) un ángulo agudo mide 60° y la hipotenusa es 8; (*e*) sus lados son 6, 8, y 10; (*f*) la altura sobre la hipotenusa corta segmentos de 2 y 8. (9.4)

18. Calcule el área de (9.4)

(*a*) Un triángulo si dos lados tienen longitudes 13 y 15 y la altura sobre el tercer lado tiene longitud 12.

(*b*) Un triángulo cuyos lados tienen longitudes 10, 10, y 16.

(*c*) Un triángulo cuyos lados tienen longitudes 5, 12, y 13.

(*d*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 30 y cuyos lados tienen longitud 17.

(*e*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 20 y cuyo ángulo en el vértice mide 68°.

(*f*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 30 y cuyos ángulos de la base miden 62°.

(*g*) Un triángulo inscrito en un círculo de radio 4 si un lado es un diámetro y otro lado forma un ángulo de 30° con el diámetro.

(*h*) Un triángulo resultado del corte de una línea paralela a la base de un triángulo si la base y altura del triángulo mayor tienen longitudes 10 y 5, respectivamente, y la línea paralela a la base es 6.

19. Determine la altura de un triángulo si (9.4)

(*a*) Su base tiene longitud 10 y el triángulo es igual en área a un paralelogramo cuya base y altura tiene longitudes 15 y 8.

(*b*) Su base tiene longitud 8 y el triángulo es igual en área a un cuadrado cuya diagonal tiene longitud 4.

(*c*) Su base tiene longitud 12 y el triángulo es igual en área a otro triángulo cuyos lados tienen longitudes 6, 8 y 10.

20. En un triángulo, calcule la longitud de (9.4)

(*a*) Un lado si el área es 40 y la altura sobre este lado tiene longitud 10.

(*b*) Una altura si el área es 25 y el lado sobre el cual se traza la altura tiene longitud 5.

(*c*) Un lado si el área es 24 y el lado tiene longitud 2 más que la altura.

(*d*) Un lado si el área es 108 y el lado y su altura están en la razón de 3:2.

(*e*) La altura sobre un lado de longitud 20, si los lados del triángulo tienen longitudes 12, 16 y 20.

(*f*) La altura sobre un lado de longitud 12 si otro lado y su altura tienen longitudes 10 y 15.

(*g*) Un lado representado por $4x$ si la altura sobre este lado está representada por $x + 7$ y el área es 60.

(*h*) Un lado si el área está representada por $x^2 = 55$, el lado por $2x - 2$, y su altura por $x - 5$.

21. Determine el área de un triángulo equilátero si (*a*) un lado tiene longitud 10; (*b*) el perímetro es 36; (*c*) una altura tiene longitud 6; (*d*) una altura tiene longitud $5\sqrt{3}$; (*e*) un lado tiene longitud $2b$; (*f*) el perímetro es $12x$; (*g*) una altura tiene longitud $3r$. (9.6)

22. Calcule el área de un rombo que tiene un ángulo de 60° si (*a*) un lado tiene longitud 2; (*b*) la diagonal menor tiene longitud 7; (*c*) la diagonal mayor tiene longitud 12; (*d*) la diagonal mayor tiene longitud $6\sqrt{3}$. (9.6)

23. Encuentre el área de un hexágono regular si (*a*) un lado es 4; (*b*) el radio del círculo circunscrito es 6; (*c*) el diámetro del círculo circunscrito es 20. (9.6)

24. Determine el lado de un triángulo equilátero cuya área es igual (9.6)

(*a*) La suma de las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes 9 y 12.

(*b*) La diferencia de las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes 17 y 15.

(*c*) El área de un trapezoide cuyas bases tienen longitudes 6 y 2 y cuya altura tiene longitud $9\sqrt{3}$.

(*d*) Dos veces el área de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa de longitud 5 y un ángulo agudo que mide 30°.

25. Calcule el área del trapezoide *ABCD* en la figura 9-21 si: (9.7)

(*a*) $b = 25$, $b' = 15$, y $h = 7$

(*b*) $m = 10$ y $h = 6.9$

(*c*) $AB = 30$, $m\angle A = 30°$, $b = 24$, y $b' = 6$

(*d*) $AB = 12$, $m\angle A = 45°$, $b = 13$, y $b' = 7$

(*e*) $AB = 10$, $m\angle A = 70°$, y $b + b' = 20$

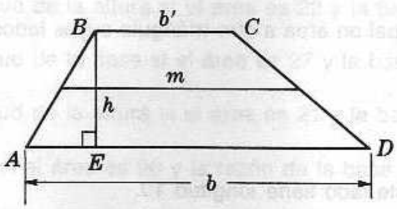


Fig. 9-21

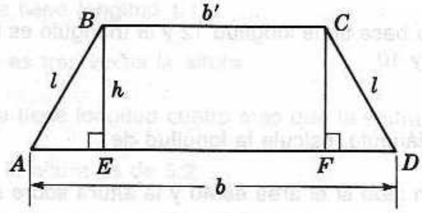


Fig. 9-22

26. Calcule el área del trapezoide isósceles en la figura 9-22 si: (9.7)

(*a*) $b' = 17$, $l = 10$, y $h = 6$

(*b*) $b = 22$, $b' = 12$, y $l = 13$

(*c*) $b = 16$, $b' = 10$, y $m\angle A = 45°$

(*d*) $b = 20$, $l = 8$, y $m\angle A = 60°$

(*e*) $b = 40$, $b' = 20$, y $m\angle A = 28°$

27. (*a*) Determine la longitud de la altura de un trapezoide si las bases tienen longitudes 13 y 7 y el área es 40 (9.7)

(*b*) Calcule la longitud de la altura de un trapezoide si la suma de las longitudes de las bases es el doble de la longitud de la altura y el área es 49.

(*c*) Encuentre la suma de las longitudes de las bases y la mediana de un trapeziode si el área es 63 y la altura tiene longitud 7.

(*d*) Determine las longitudes de las bases de un trapezoide si la base superior tiene longitud 3 menos que la base inferior, la altura tiene longitud 4 y el área es 30.

(*e*) Calcule las longitudes de las bases de un trapezoide si la base inferior tiene longitud el doble de la base superior, la altura tiene longitud 6, y el área es 45.

28. En un trapezoide isósceles: (9.7)

(*a*) Encuentre las longitudes de las bases si cada lado tiene longitud 5, la altura tiene longitud 3, y el área es 39.

(*b*) Encuentre las longitudes de las bases si la altura tiene longitud 5, cada ángulo de la base mide 45°, y el área es 90°.

(*c*) Calcule las longitudes de las bases si el área es $42\sqrt{3}$, la altura tiene longitud $3\sqrt{3}$, y cada ángulo de la base mide 60°.

(*d*) Encuentre la longitud de cada lado si las bases tienen longitudes 24 y 32 y el área es 84.

(*e*) Determine la longitud de cada lado si el área es 300, la mediana tiene longitud 25, y la base menor tiene longitud 30.

29. Calcule el área de un rombo si (9.8)

(*a*) Las diagonales tiene longitudes 8 y 9.

(*b*) Las diagonales tienen longitudes 11 y 7.

(*c*) Las diagonales tienen longitudes 4 y $6\sqrt{3}$.

(*d*) Las diagonales tienen longitudes $3x$ y $8x$.

(*e*) Una diagonal tiene longitud 10 y un lado tiene longitud 13.

(*f*) El perímetro es 40 y una diagonal tiene longitud 12.

(*g*) El lado tiene longitud 6 y un ángulo mide 30°.

(*h*) El perímetro es 28 y un ángulo mide 45°.

(*i*) El perímetro es 32 y la longitud de la diagonal menor es igual a la de un lado.

(*j*) Un lado tiene longitud 14 y un ángulo mide 120°.

30. Calcule el área de un rombo redondeando al entero más próximo si (*a*) el lado tiene longitud 30 y un ángulo mide 55°; (*b*) el perímetro es 20 y un ángulo mide 33°; (*c*) el lado tiene longitud 10 y un ángulo mide 130°. (9.8)

31. En un rombo, calcule la longitud de: (9.8)

(*a*) Una diagonal si la otra diagonal tiene longitud 7 y el área es 35.

(*b*) Las diagonales si su razón es de 4:3 y el área es 54.

(*c*) Las diagonales si la mayor es el doble de la menor y el área es 100.

(*d*) El lado si el área es 24 y una diagonal tiene longitud 6.

(*e*) El lado si el área es 6 y una diagonal tiene longitud 4 más que la otra.

32. Un rombo es igual a un trapezoide cuya base inferior tiene longitud 26 y cuyos otros tres lados tienen longitud 10. Calcule la longitud de la altura del rombo si su perímetro es 36. (9.8)

33. Demuestre lo que se pide en la figura 9-23. (9.9)

(*a*) **Dado:** $\triangle ABC$
$DB = \frac{1}{3}AB$
$EC = \frac{1}{3}AC$
Demuéstrese: Área ($\triangle DFB$) = área ($\triangle FEC$)

(*b*) **Dado:** Trapezoide *ABCD*
Extendiendo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se encuentran en *E*
Demuéstrese: (Área $\triangle ECA$) = área ($\triangle EBD$)

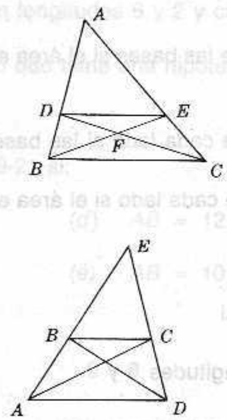


Fig. 9-23

34. Demuestre lo que se pide en la figura 9-24. (9.9)

(*a*) **Dado:** $\square ABCD$
E es el punto medio de $\overline{CD}$
Demuéstrese: Área ($\square ABCD$) = área (trapezoide *BFGA*)

(*b* **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BE}$ y $\overline{CF} \perp \overline{AF}$.
Demuéstrese: *BCFE* es un rectángulo y es igual al área del $\square ABCD$.

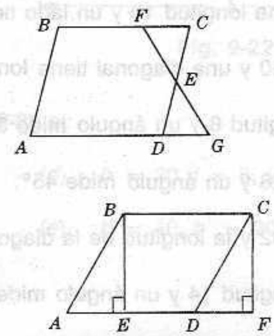


Fig. 9-24

35. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados: (9.10)

(*a*) Una mediana divide a un triángulo en dos triángulos que tienen áreas iguales.

(*b*) Dos triángulos son iguales en área si tienen una base común y sus vértices están sobre una línea paralela a su base.

(*c*) En un triángulo, si se trazan líneas desde un vértice a los puntos que trisectan el lado opuesto, el área del triángulo es trisectada.

(*d*) En el trapezoide *ABCD*, la base $\overline{AD}$ es el doble de la base $\overline{BC}$. Si *M* es el punto medio de $\overline{AD}$, entonces *ABCM* y *BCDM* son paralelogramos iguales en área.

36. (*a*) En el $\triangle ABC$, *E* es un punto sobre *BM*, la medianasobre *AC*.Demuestre que el área ($\triangle BEA$) = área ($\triangle BEC$).

(*b*) En el triángulo $\triangle ABC$, Q es un punto sobre $\overline{BC}$, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y P es el punto medio de $\overline{AC}$. Demuestre que el área ($\triangle BQM$) + área ($\triangle PQC$) = área (cuadrilátero $APQM$).

(*c*) En el cuadrilátero $ABCD$, la diagonal $\overline{AC}$ bisecta a la diagonal $\overline{BD}$. Demuestre que el área ($\triangle ABC$) = área ($\triangle ACD$).

(*d*) Demuestre que las diagonales de un paralelogramo dividen al paralelogramo en cuatro triángulos que son iguales en área. (9.10)

37. Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares si la razón de dos lados correspondientes es de (*a*) 1:7; (*b*) 7:2; (*c*) $1:\sqrt{3}$; (*d*) $a:5a$; (*e*) $9:x$; (*f*) $3:\sqrt{x}$; (*g*) $s:s\sqrt{2}$. (9.11)

38. Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares (9.11)

(*a*) Si la razón de las longitudes de dos medianas correspondientes es de 7:10.

(*b*) Si la longitud de una altura del primero es dos tercios de la altura correspondiente del segundo.

(*c*) Si dos bisectrices correspondientes tienen longitudes 10 y 12.

(*d*) Si la longitud de cada lado del primero es un tercio de la longitud de cada lado correspondiente del segundo.

(*e*) Si los radios de sus círculos circunscritos son $7\frac{1}{2}$ y 5.

(*f*) Si sus perímetros son 30 y $30\sqrt{2}$.

39. Calcule la razón de dos lados correspondientes cualesquiera de dos triángulos semejantes si la razón de su área es de (*a*) 100:1; (*b*) 1:49; (*c*) 400:81; (*d*) 25:121; (*e*) $4:y^2$; (*f*) $9x^2:1$; (*g*) 3:4; (*h*) 1:2; (*i*) $x^2:5$; (*j*) $x:16$. (9.11)

40. En dos triángulos similares, calcule la razón de las longitudes de (9.11)

(*a*) Los lados correspondientes si las áreas son 72 y 50.

(*b*) Las correspondientes medianas si la razón de sus áreas es de 9:49.

(*c*) Las alturas correspondientes si las áreas son 18 y 6.

(*d*) Los perímetros si las áreas son 50 y 40.

(*e*) Los radios de los círculos inscritos si la razón de las áreas es de 1:3.

41. Las áreas de dos triángulos similares están en la razón de 25:16. Calcule (9.11)

(*a*) La longitud de un lado del mayor si el lado correspondiente en el menor tiene longitud 80.

(*b*) La longitud de una mediana del mayor si la mediana correspondiente del menor tiene longitud 10.

(*c*) La longitud de una bisectriz del menor si la bisectriz correspondiente del mayor tiene longitud 15.

(*d*) El perímetro del menor si el perímetro del mayor es 125.

(*e*) La circunferencia del círculo inscrito al mayor si la circunferencia inscrita al menor es 84.

(*f*) El diámetro del círculo circunscrito al menor si el diámetro del círculo circunscrito al mayor es 22.5.

(*g*) La longitud de una altura si la altura correspondiente de menor tiene longitud $16\sqrt{3}$.

42. (*a*) Las áreas de dos triángulos similares son 36 y 25. Si una mediana del triángulo menor tiene longitud 10, calcule la longitud de la mediana correspondiente del mayor. (9.12)

(*b*) Las alturas correspondientes de dos triángulos similares tienen longitudes 3 y 4. Si el área del triángulo mayor es 112, calcule el área del menor.

(*c*) Dos polígonos similares tienen perímetros de 32 y 24. Si el área del menor es 27, calcule el área delmayor.

(*d*) Las áreas de dos pentágonos similares son 88 y 22. Si una diagonal del mayor tiene longitud 5, calcule la longitud de la diagonal correspondiente del menor.

(*e*) En dos polígonos similares, la razón de las longitudes de dos lados correspondientes es de $\sqrt{3}$:1. Si el área del menor es 15, calcule el área del mayor.

10

Polígonos regulares y el círculo

10.1 POLÍGONOS REGULARES

Un *polígono regular* es polígono equilateral y equiangular.

El *centro de un polígono regular* es un segmento que une su centro con cualquier vértice. El *radio de un polígono regular* también lo es de su círculo circunscrito. (Aquí, al igual que se hizo en el capítulo sobre círculos, se usará la palabra *radio* para denotar también al número que es "la longitud del radio").

Un *ángulo central de un polígono regular* es un ángulo incluido entre dos radios dibujados hacia dos vértices sucesivos.

Una *apotema de un polígono regular* es un segmento de línea que parte de su centro y es perpendicular a uno de sus lados. Una apotema también es un radio del círculo inscrito en el polígono .

Así, para el polígono regular mostrado en la figura 10-1, $AB = BC = CD = DE = EA$ y $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = m\angle E$. También, su centro es O, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son sus radios; el $\angle AOB$ es un ángulo central; $\overline{OG}$ y $\overline{OF}$ son apotemas.

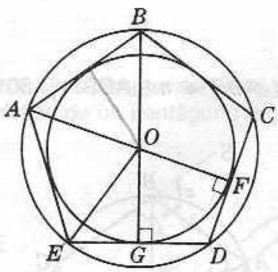


Fig. 10-1

10.1A Principios sobre polígonos regulares

PRINCIPIO 1: *sea un polígono regular de* n *lados, si uno de sus lados tiene longitud* s, *entonces su perímetro es* $p = ns$.

PRINCIPIO 2: *un círculo puede circunscribir a cualquier polígono regular.*

PRINCIPIO 3: *un círculo puede inscribirse en cualquier polígono regular.*

PRINCIPIO 4: *el centro de un círculo circunscrito a un polígono regular también es el centro de su círculo inscrito.*

PRINCIPIO 5: *un polígono equilátero inscrito en un círculo es un polígono regular.*

Principio 6: *los radios de un polígono regular son congruentes.*

Principio 7: *un radio de un polígono regular bisecta al ángulo hacia el cual está dibujado.*

Así, en la figura 10-1, $\overline{OB}$ bisecta al $\angle ABC$.

Principio 8: *las apotemas de un polígono regular son congruentes.*

Principio 9: *una apotema de un polígono regular bisecta al lado hacia el cual es dibujada.*

Así, en la figura 10-1, $\overline{OF}$ bisecta a $\overline{CD}$ y $\overline{OG}$ bisecta a $\overline{ED}$.

Principio 10: *para un polígono regular de* n *lados:*

1. *Todo ángulo central c mide* $\dfrac{360^\circ}{n}$.
2. *Todo ángulo interno i mide* $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$.
3. *Todo ángulo externo e mide* $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Así, para el pentágono regular *ABCDE* de la figura 10-2,

$$m\angle AOB = m\angle ABS = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \qquad m\angle ABC = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$$

y

$$m\angle ABC + m\angle ABS = 180^\circ$$

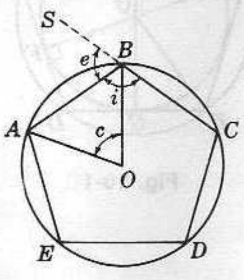


Fig. 10-2

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1 Cálculo de Medidas de Líneas y Ángulos en un Polígono Regular

(*a*) Calcule la longitud *s* de un pentágono regular si el perímetro *p* es 35.

(*b*) Calcule la apotema *a* de un pentágono regular si el radio del círculo inscrito es 21.

(*c*) En un polígono regular de cinco lados, calcule las medidas del ángulo central *c*, el ángulo externo *e*, y el ángulo interno *i*.

(*d*) Si un ángulo interno de un polígono regular mide 108°, calcule las medidas de un ángulo externo y el número de sus lados.

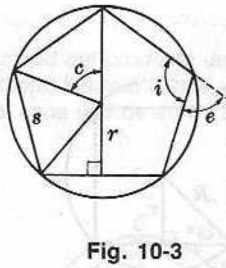


Fig. 10-3

Soluciones

(*a*) $p = 35$. Dado que $p = 5s$, se tiene que $35 = 5s$ y $s = 7$.

(*b*) Dado que una apotema *r* es un radio del círculo inscrito, su longitud es $a = 21$.

(*c*) $n = 5$. Entonces $m\angle c = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{360°}{5} = 72°$; $m\angle e = \dfrac{360°}{n} = 72°$; $m\angle i = 180° - m\angle e = 108°$

(*d*) $m\angle i = 108°$. Entonces $m\angle c = 180° - m\angle i = 72°$. Ya que $m\angle c = \dfrac{360°}{n}$, $n = 5$.

10.2 Demostración de un Problema de Polígonos Regulares Formulado en Palabras

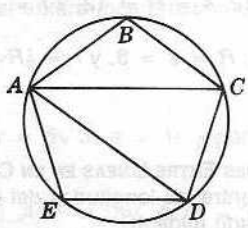
Demostrar que el ángulo en cualquier vértice de un pentágono regular es trisectado por las diagonales dibujadas desde ese vértice.

Solución

Dados: El pentágono regular *ABCDE*
Diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$

Demuéstrese: $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ trisectan a $\angle A$.

Plan: circunscribir un círculo y probar que los ángulos *BAC*, *CAD* y *DAE* son congruentes.

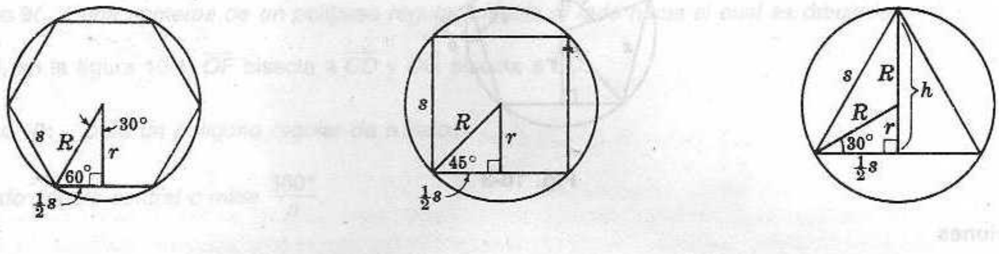


DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. *ABCDE* es un pentágono regular.	1. Dado
2. Circunscribir un círculo alrededor de *ABCDE*.	2. Un círculo puede circunscribir cualquier polígono regular.
3. $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$	3. Un polígono regular es equilátero.
4. $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$	4. En un círculo, cuerdas iguales tienen arcos iguales.
5. $\angle BAC \cong \angle CAD \cong \angle DAE$	5. En un círculo, ángulos inscritos con arcos iguales son congruentes.
6. $\angle A$ es trisectado	6. Dividir en tres partes congruentes es trisectar.

10.2 RELACIONES ENTRE SEGMENTOS EN POLÍGONOS REGULARES DE 3, 4 Y 6 LADOS

En el hexágono y cuadrado regulares, al igual que en el triángulo equilátero, se forman triángulos rectos especiales cuando la apotema r y un radio R, al dibujarse, terminan sobre el mismo lado. En el caso de un cuadrado se obtiene un triángulo con ángulos de 45°-45°-90°, mientras que en los otros dos casos se obtienen triángulos con ángulos de 30°-60°-90°. Las fórmulas en la figura 10-4 relacionan los lados y radios de estos polígonos regulares.



Hexágono regular
$s = R$
$r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Cuadrado
$s = R\sqrt{2}$
$r = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Triángulo equilátero
$s = R\sqrt{3}$, $h = r + R$
$r = \frac{1}{3}h$, $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{2}R$

Fig. 10-4

PROBLEMAS RESUELTOS

10.3 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Hexágono Regular

En un hexágono regular: (*a*) calcule las longitudes del lado y la apotema si el radio es 12; (*b*) Encuentre el radio y la longitud de la apotema si el lado tiene longitud 8.

Soluciones

(*a*) Dado que $R = 12$, $s = R = 12$, y $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(*b*) Dado que $s = 8$, $R = s = 8$, y $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

10.4 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Cuadrado

En un cuadrado: (*a*) encuentre las longitudes del lado y la apotema si el radio mide 16; (*b*) calcular el radio y la longitud de la apotema si un lado mide 10.

Soluciones

(*a*) Dado que $R = 16$, $s = R\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$, y $r = \frac{1}{2}s = 8\sqrt{2}$.

(*b*) Dado que $s = 10$, $r = \frac{1}{2}s = 5$, y $R = s/\sqrt{2} = \frac{1}{2}s\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

10.5 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Triángulo Equilátero

En un triángulo equilátero: (*a*) calcule las longitudes del radio, apotema y lado, si la altura mide 6; (*b*) calcule las longitudes del lado, apotema y altura si el radio es 9.

Soluciones

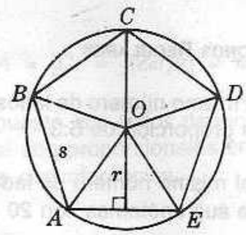
(*a*) Dado que $h = 6$, tenemos que $r = \frac{1}{3}h = 2$; $R = \frac{2}{3}h = 4$; y $s = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

(*b*) Dado que $R = 9$, $s = R\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2}$; y $h = \frac{3}{2}R = 13\frac{1}{2}$.

10.3 ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

El *área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la longitud de su apotema.*

Como se muestra en la figura 10-5, al dibujar los radios que van hasta los vértices de un polígono de n lados y perímetro $p = ns$, se le divide en n triángulos, cada uno de área $\frac{1}{2}rs$. Como el área de un polígono regular es $n(\frac{1}{2}rs) = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$.



Polígono regular
$A = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$

Fig. 10-5

PROBLEMAS RESUELTOS

10.6 CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

(*a*) Calcule el área de un hexágono regular si la longitud de su apotema es de $5\sqrt{3}$.

(*b*) Calcule el área de un pentágono regular hasta el entero más próximo si la longitud de su apotema es de 20.

Soluciones

(*a*) En un hexágono regular, $r = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$. Dado que $r = 5\sqrt{3}$, $s = 10$ y por lo tanto $p = 6(10) = 60$. Finalmente, $A = \frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}(60)(5\sqrt{3}) = 150\sqrt{3}$.

(*b*) En la figura 10-6, $m\angle AOE = 360°/5 = 72°$ y $m\angle AOF = \frac{1}{2}m\angle AOE = 36°$. Entonces, $\tan 36° = \frac{1}{2}s/20 = s/40$ ó $s = 40 \tan 36°$. Por lo tanto, $s = 40 \tan 36°$. Finalmente, $A = \frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}nsr$ por lo que $A = \frac{1}{2}(5)(40 \tan 36°)(20) = 1453$.

$6(5) = 60$

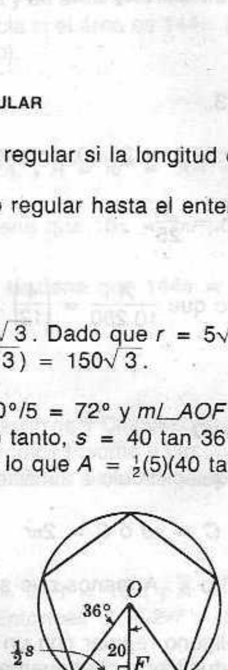


Fig. 10-6

10.4 RAZONES DE SEGMENTOS Y DE ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

Principio 1: *los polígonos regulares con el mismo número de lados son similares.*

Principio 2: *los segmentos correspondientes de polígonos regulares con el mismo número de lados son proporcionales entre sí.*

Aquí, la palabra "segmento" incluye lados, perímetros, radios o circunferencias de círculos inscritos o tos, etcétera.

Principio 3: *Las áreas de polígonos regulares con el mismo número de lados están relacionados entre sí como los cuadrados de las longitudes de cualesquiera dos segmentos correspondientes.*

PROBLEMAS RESUELTOS

10.7 Razones de Líneas y de Áreas de Polígonos Regulares

(*a*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la razón de las longitudes de sus apotemas si sus perímetros están en proporción de 5:3.

(*b*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la longitud de uno de los lados del más pequeño si las longitudes de sus apotemas son 20 y 50, y un lado del mayor tiene longitud 32.5.

(*c*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la razón entre sus áreas si la longitud entre sus lados está en proporción de 1:5.

(*d*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule el área del más pequeño si sus lados tienen longitudes de 4 y 12 y el área del mayor es de 10 260.

Soluciones

(*a*) Por el principio 2, $r:r' = p:p' = 5:3$.

(*b*) Por el principio 2, $s:s' = r:r'$; así $s:32.5 = 20:50$, entonces $s = 13$.

(*c*) Por el principio 3, $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$.

(*d*) Por el principio 3, $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2$. Por lo que $\dfrac{A}{10\,260} = \left(\dfrac{4}{12}\right)^2$. Finalmente $A = 1\,140$.

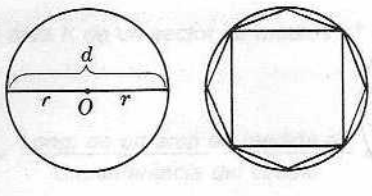
10.5 CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DE UN CÍRCULO

π (pi) es la razón de la circunferencia C de cualquier círculo a su diámetro d; esto es $= C/d$. Por lo tanto:

$$C = \pi d \text{ ó } C = 2\pi r$$

Los valores aproximados para π son 3.1416 o $\frac{22}{7}$. A menos que se diga lo contrario, el valor de π que se usará aquí para resolver problemas es de 3.14.

Un círculo puede considerarse como un polígono regular con un número infinito de lados. Si un cuadrado está inscrito en un círculo y el número de lados es duplicado continuamente (para formar un octágono, un polígono de 16 lados, etc.), los perímetros de los polígonos resultantes se acercarán cada vez más al valor de la circunferencia del círculo (Fig. 10-7).



Círculo: $C = 2\pi r$
$A = \pi r^2$

Fig. 10-7

De esta manera, para encontrar el área de un círculo se puede usar la fórmula $A = \frac{1}{2}pr$ pero sustituyendo C por p, así:

$$A = \tfrac{1}{2}Cr = \tfrac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2$$

Todos los círculos son figuras similares puesto que todos tienen la misma forma. Ya que son figuras similares, (1) los segmentos correspondientes de círculos son proporcionales entre sí, y (2) las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios o de sus circunferencias.

PROBLEMAS RESUELTOS

10.8 Cálculo de la Circunferencia y Área de un Círculo

En un círculo: (*a*) calcule su circunferencia y su área si el radio es 6; (*b*) calcule su área y su radio si la circunferencia es 18π; (*c*) calcule el radio y la circunferencia si el área es 144π. (Dé la respuesta tanto en múltiplos de π como con una precisión de hasta el entero más cercano).

Soluciones

(*a*) $r = 6$. Entonces $C = 2\pi r = 12\pi$, y $A = \pi r^2 = 36\pi = 36(3.14) = 113$

(*b*) $C = 18\pi$. Como $C = 2\pi r$, se tiene que $18\pi = 2\pi r$ por lo que $r = 9$. También $A = \pi r^2 = 81\pi = 254$.

(*c*) $A = 144\pi$. Dado que $A = \pi r^2$, se tiene que $144\pi = \pi r^2$ por lo que $r = 12$. También $C = 2\pi r = 24\pi = 75$.

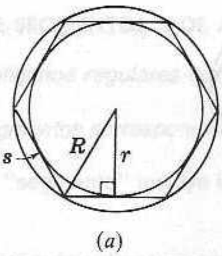
10.9 Circunferencia y Área de Círculos Inscritos y Circunscritos

Calcule la circunferencia y área de los círculos inscrito y circunscrito: (*a*) de un hexágono regular cuyo lado tiene longitud 8; (*b*) de un triángulo equilátero cuya altura tiene longitud $9\sqrt{3}$ (Fig. 10-8).

Soluciones

(*a*) Aquí $R = s = 8$. Entonces $C = 2\pi R = 16\pi$, y $A = \pi R^2 = 64\pi$.
También $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi r = 8\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi r^2 = 48\pi$.

(*b*) Aquí $R = \frac{2}{3}h = 6\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi R = 12\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi R^2 = 108\pi$.
También $r = \frac{1}{3}h = 3\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi r = 6\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi r^2 = 27\pi$.



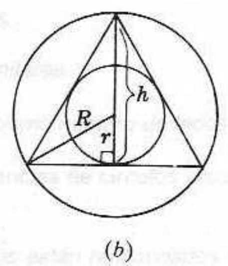


Fig. 10-8

10.10 Razones de Segmentos y Áreas en Círculos

(*a*) Si las circunferencias de dos círculos están en proporción de 2:3, calcule la razón de sus diámetros y la razón de sus áreas.

(*b*) Si las áreas de dos círculos están en proporción de 1:25, calcule la razón de sus diámetros y la razón de las circunferencias.

Soluciones

(*a*) $\frac{d}{d'} = \frac{C}{C'} = \frac{2}{3}$ y $\frac{A}{A'} = \left(\frac{C}{C'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

(*b*) Dado que $\frac{A}{A'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2, \frac{1}{25} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$ por lo que $\frac{1}{5} = \frac{d}{d'}$. También $\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} = \frac{1}{5}$.

10.6 LONGITUD DE UN ARCO; ÁREAS DE UN SECTOR Y DE UN SEGMENTO

Un sector de un círculo es una parte de un círculo acotada por dos radios y su arco interceptado. Así, en la figura 10-9, la sección sombreada del círculo *O* es el sector *OAB*.

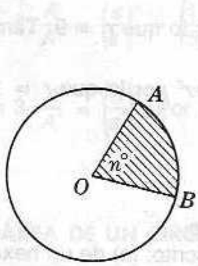
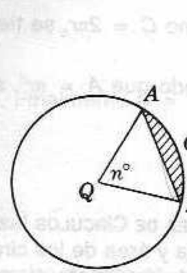


Fig. 10-9



10-10

Un *segmento de un círculo* es una parte de un círculo acotada por una cuerda y su arco. Un *segmento menor* de un círculo es el más pequeño de los dos segmentos así formados. Así, en la figura 10-10, la sección sombreada del círculo *Q* es el segmento menor *ACB*.

Principio 1: *En un círculo de radio r, la longitud l de un arco de medida n° es igual a* $\frac{n}{360}$ *de la circunferencia del círculo, esto es* $l = \frac{n}{360}2\pi r = \frac{\pi n r}{180}$.

Principio 2: *en un círculo de radio r, el área K de un sector de medida n° es igual a* $\frac{n}{360}$ *del área del círculo, esto es* $K = \frac{n}{360}\pi r^2$.

Principio 3: $\dfrac{\textit{Área de un sector de } n°}{\textit{Área del círculo}} = \dfrac{\textit{Long. de un arco de medida } n°}{\textit{Circunferencia del círculo}} = \dfrac{n}{360}.$

Principio 4: *el área de un segmento menor de un círculo es igual al área de su sector menos el área del triángulo formado por sus radios y la cuerda.*

Principio 5: *si un polígono regular está inscrito en un círculo, cada segmento cortado por el polígono tiene un área igual a la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono dividida por el número de sus lados.*

PROBLEMAS RESUELTOS

10.11 Longitud de un Arco

(*a*) Calcule la longitud de un arco de 36° en un círculo cuya circunferencia es de 45π.

(*b*) Calcule el radio de un círculo si un arco de 40° tiene una longitud de 4π.

Soluciones

(*a*) Aquí $n° = 36°$ y $C = 2\pi r = 45\pi$. Por lo tanto $l = \frac{n}{360}2\pi r = \frac{36}{360}45\pi = \frac{9}{2}\pi$.

(*b*) Ahora $l = 4\pi$ y $n° = 40°$. Si $l = \frac{n}{360}2\pi r$ se tiene que $4\pi = \frac{40}{360}2\pi r$, por lo que $r = 18$

10.12 Área de un Sector

(*a*) Calcule el área K de un sector de 300° de un círculo cuyo radio es 12.

(*b*) Calcule la medida del ángulo central del sector cuya área es 6π, si el área del círculo es 9π.

(*c*) *Calcule el radio del círculo si un arco de longitud* 2π tiene un sector de área 10π.

Soluciones

(*a*) $n° = 300°$, y $r = 12$. Entonces $K = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{300}{360}144\pi = 120\pi$.

(*b*) $\dfrac{\text{Área del sector}}{\text{Área del círculo}} = \dfrac{n}{360}$, por lo tanto $\dfrac{6\pi}{9\pi} = \dfrac{n}{360}$ por lo que $n = 240$. Por lo que el ángulo central mide 240°.

(*c*) $\dfrac{\text{Longitud de arco}}{\text{Circunferencia}} = \dfrac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}}$, por lo tanto $\dfrac{2\pi}{2\pi r} = \dfrac{10\pi}{\pi r^2}$ y $r = 10$.

10.13 Área de un Segmento de un Círculo

(*a*) Calcule el área de un segmento si su ángulo central mide 60° y el radio del círculo mide 12.

(*b*) Calcule el área de un segmento si su ángulo central mide 90° y el radio del círculo mide 8.

(*c*) Calcule cada segmento formado por un triángulo equilátero inscrito, si el radio del círculo es de 8.

Soluciones

Véase la Fig. 10-11

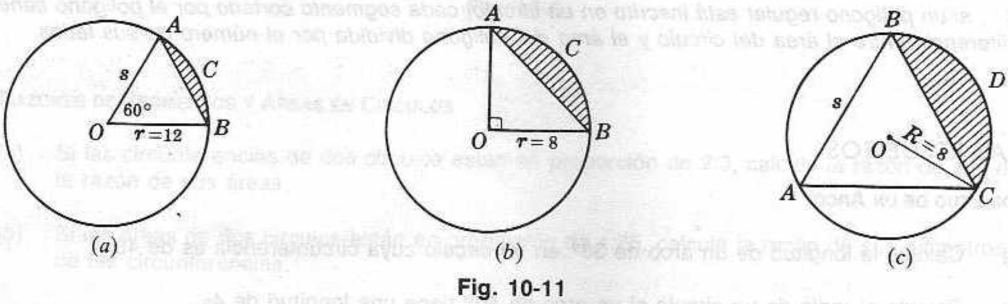


Fig. 10-11

(*a*) $n° = 60°$ y $r = 12$. Entonces el área del sector $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{60}{360}144\pi = 24\pi$.
También el área del triángulo equilátero $\triangle OAB = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(144)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.
Por lo tanto el área del segmento $ACB = 24\pi - 36\sqrt{3}$.

(*b*) $n° = 90°$ y $r = 8$. Entonces el área del sector $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{90}{360}64\pi = 16\pi$.

También el área del triángulo rectángulo $\triangle OAB = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(8)(8) = 32$. Por lo tanto el área del segmento $ACB = 16\pi - 32$.

(*c*) $R = 8$. Dado que $s = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$; al área del $\triangle ABC$ es de $\frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$. También, el área del círculo $O = \pi R^2 = 64\pi$.
Por lo tanto el área del segmento $BDC = \frac{1}{3}(64\pi - 48\sqrt{3})$.

10.14 Área de un Segmento Formado por un Polígono Regular Inscrito

Calcule el área de cada segmento formado por un polígono regular inscrito de 12 lados (dodecágono) si el radio del círculo es de 12. (Fig. 10-12).

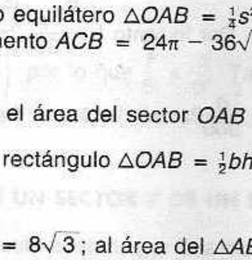


Fig. 10-12

Solución

Área $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{30}{360}144\pi = 12\pi.$

Para encontrar el área del $\triangle OAB$ sea $\overline{AD}$ la altura a la base $\overline{OB}$. Dado que $m\angle AOB = 30°$, $h = AD = \frac{1}{2}r = 6$. Ahora, el área del $\triangle OAB$ es $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(12)(6) = 36$.

Por lo tanto, el área del segmento $\widehat{ACB}$ es $12\pi - 36$.

10.7 ÁREAS DE FIGURAS COMBINADAS

Las áreas de figuras combinadas como la de la figura 10-13 pueden calcularse mediante la determinación de las áreas individuales seguida de la suma o la resta de ellas, según resulte conveniente. Así, el área sombreada en la figura es igual a la suma del área del cuadrado y la del semicírculo: $A = 8^2 + \frac{1}{2}(16\pi) = 64 + 8\pi$.

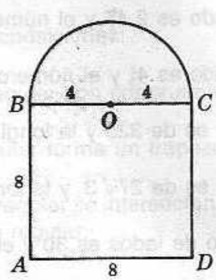


Fig. 10-13

PROBLEMAS RESUELTOS

10.15 CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS COMBINADAS

Calcular el área sombreada en cada inciso de la figura 10-14. En (*a*), los círculos *A*, *B* y *C* son externamente tangentes y cada uno tiene radio 3. En (*b*), cada arco es parte de un círculo de radio 9.

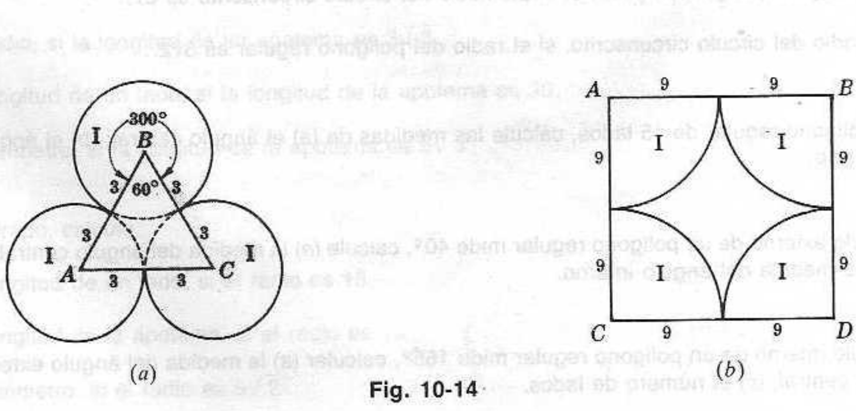


Fig. 10-14

Soluciones

(*a*) El área del $\triangle ABC = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(6^2)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Área del sector I $= \dfrac{n°}{360°}\pi r^2 = \dfrac{300}{360}\pi 3^2 = \dfrac{15}{2}\pi$.

Área sombreada $= 9\sqrt{3} + 3(\frac{15}{2}\pi) = 9\sqrt{3} + \frac{45}{2}\pi$.

(*b*) Área del cuadrado $= 18^2 = 324$. Área del sector I $= \dfrac{n°}{360°}(\pi r^2) = \dfrac{90}{360}(81\pi) = \dfrac{81}{4}\pi$.

Área sombreada $= 324 - 4(\frac{81}{4}\pi) = 324 - 81\pi$.

Problemas complementarios

1. Para un polígono regular, calcule: (10.1)

   (*a*) El perímetro, si la longitud de un lado es 8 y el número de lados es 25.

   (*b*) El perímetro, si la longitud de un lado es 2.45 y el número de lados es 10.

   (*c*) El perímetro, si la longitud de un lado es $4\frac{2}{3}$ y el número de lados es 24.

   (*d*) El número de lados, si el perímetro es de 325 y la longitud de un lado es 25.

   (*e*) El número de lados, si el perímetro es de $27\sqrt{3}$ y la longitud de un lado es $3\sqrt{3}$.

   (*f*) La longitud de un lado, si el número de lados es 30 y el perímetro es 100.

   (*g*) La longitud de un lado, si el perímetro es 67.5 y el número de lados es 15.

2. Para un polígono regular, calcule: (10.1)

   (*a*) La longitud de la apotema, si el diámetro de un círculo inscrito es 25.

   (*b*) La longitud de la apotema, si el radio del círculo inscrito es 23.47.

   (*c*) El radio del círculo inscrito, si la longitud de la apotema es $7\sqrt{3}$.

   (*d*) El radio del polígono regular, si el diámetro del círculo circunscrito es 37.

   (*e*) El radio del círculo circunscrito, si el radio del polígono regular es $3\sqrt{2}$.

3. Para un polígono regular de 15 lados, calcule las medidas de (*a*) el ángulo central; (*b*) el ángulo externo; (*c*) el ángulo interno. (10.1)

4. Si un ángulo externo de un polígono regular mide 40°, calcule (*a*) la medida del ángulo central; (*b*) el número de lados; (*c*) la medida del ángulo interno. (10.1)

5. Si un ángulo interno de un polígono regular mide 165°, calcular (*a*) la medida del ángulo externo; (*b*) la medida del ángulo central; (*c*) el número de lados. (10.1)

6. Si un ángulo central de un polígono regular mide 5°, calcule: (*a*) la medida del ángulo externo; (*b*) el número de lados; (*c*) la medida del ángulo interno. (10.1)

7. Identifique el polígono regular tal que: (10.1)

(*a*) Su ángulo central mide 45°.

(*b*) Su ángulo central mide 60°.

(*c*) Su ángulo externo mide 120°.

(*d*) Su ángulo externo mide 36°.

(*e*) Su ángulo interno es congruente con su ángulo central.

(*f*) Su ángulo interno mide 150°.

8. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones: (10.2)

(*a*) Las diagonales de un pentágono regular son congruentes.

(*b*) Una diagonal de un pentágono regular forma un trapezoide isósceles con tres de sus lados.

(*c*) Si dos diagonales de un pentágono regular se intersectan, el segmento más largo de cada diagonal es congruente con un lado del pentágono regular.

9. En un hexágono regular calcule: (10.3)

(*a*) La longitud de un lado, si su radio es 9.

(*b*) El perímetro, si su radio es 5.

(*c*) La longitud de su apotema, si su radio es 12.

(*d*) Su radio, si la longitud de un lado es 6.

(*e*) La longitud de la apotema, si la longitud de un lado es 26.

(*f*) Su radio, si la longitud de su apotema es $3\sqrt{3}$.

(*g*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es 30.

(*h*) El perímetro, si la longitud de la apotema es $5\sqrt{3}$.

10. En un cuadrado, calcule. (10.4)

(*a*) La longitud de un lado, si el radio es 18.

(*b*) La longitud de la apotema, si el radio es 14.

(*c*) El perímetro, si el radio es $5\sqrt{2}$.

(*d*) El radio, si la longitud de un lado es 16.

(*e*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es 1.7.

(*f*) El perímetro, si la longitud de la apotema es $3\frac{1}{2}$.

(*g*) El radio, si el perímetro es 40.

(*h*) La longitud de la apotema, si el perímetro es $16\sqrt{2}$.

11. Para un triángulo equilátero, calcule: (10.5)

(*a*) La longitud de un lado, si su radio es 30.

(*b*) La longitud de la apotema, si su radio es 28.

(*c*) La longitud de una altura, si su radio es 18.

(*d*) El perímetro, si su radio es $2\sqrt{3}$.

(*e*) Su radio, si la longitud de un lado es 24.

(*f*) La longitud de la apotema, si la longitud de un lado es 24.

(*g*) La longitud de su altura, si la longitud de un lado es 96.

(*h*) Su radio, si la longitud de la apotema es 21.

(*i*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es $\sqrt{3}$.

(*j*) La longitud de la altura, si la longitud de la apotema es $3\frac{1}{3}$.

(*k*) La longitud de la altura, si el perímetro es 15.

(*l*) La longitud de la apotema, si el perímetro es 54.

12. (*a*) Calcule el área de un pentágono regular hasta el entero más cercano, si la longitud de la apotema es 15.

(*b*) Calcule el área de un decágono regular hasta el entero más cercano, si la longitud de lado es 20. (10.6)

13. Calcule el área de un hexágono regular, en forma de un radical, si (*a*) la longitud de un lado es 6; (*b*) su radio es 8; (*c*) la longitud de la apotema es $10\sqrt{3}$. (10.6)

14. Calcule el área de un cuadrado si (*a*) la longitud de la apotema es 12; (*b*) su radio es $9\sqrt{2}$; (*c*) su perímetro es 40. (10.6)

15. Calcule el área de un triángulo equilátero, en términos de un radical, si: (10.6)

(*a*) La longitud de la apotema es $2\sqrt{3}$.

(*b*) Su radio es 6.

(*c*) La longitud de la altura es 4.

(*d*) La longitud de la altura es $12\sqrt{3}$.

(*e*) El perímetro es $6\sqrt{3}$.

(*f*) La longitud de la apotema es 4.

16. Si el área de un hexágono regular es $150\sqrt{3}$ calcular (*a*) la longitud de un lado; (*b*) su radio; (*c*) la longitud de la apotema. (10.6)

17. Si el área de un triángulo equilátero es $81\sqrt{3}$, calcule (*a*) la longitud de un lado; (*b*) la longitud de la altura; (*c*) su radio; (*d*) la longitud de la apotema. (10.6)

18. Calcule la proporción en que están los perímetros de dos polígonos regulares con el mismo número de lados si: (10.7)

(*a*) Sus lados están en proporción de 1:8.

(*b*) Sus radios están en proporción de 4:9.

(*c*) Sus radios son 18 y 20.

(*d*) Sus apotemas tienen longitudes 16 y 22.

(*e*) La longitud del lado del mayor es tres veces la del menor.

(*f*) La longitud de la apotema más corta es dos quintos la longitud de la más larga.

(*g*) Las longitudes de las apotemas son $20\sqrt{2}$ y 15.

(*h*) La circunferencia del círculo circunscrito mayor es $2\frac{1}{2}$ veces la del menor.

19. Calcule la razón de los perímetros de dos triángulos equiláteros si:(*a*) los lados tienen longitudes 20 y 8; (*b*) sus radios son 12 y 60; (*c*) sus apotemas tienen longitudes $2\sqrt{3}$ y $6\sqrt{3}$; (*d*) las circunferencias de sus círculos inscritos son 120 y 160; (e) sus alturas tienen longitudes $5x$ y x. (10.7)

20. Calcule la razón entre las longitudes de los lados de dos polígonos regulares con el mismo número de lados si sus áreas están en proporción de: (*a*) 25:1; (*b*) 16:49; (*c*) x^2:4; (*d*) 2:1; (*e*) 3:y^2; (*f*) x:18. (10.7

21. Calcule la razón entre las áreas de dos hexágonos regulares, si: (*a*) sus lados tienen longitudes 14 y 28; (*b*) sus apotemas tienen longitudes 3 y 15; (*c*) sus radios son $6\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$; (*d*) sus perímetros son 75 y 250; (*e*) las circunferencias de los círculos circunscritos son 28 y 20. (10.7)

22. Calcule la circunferencia de un círculo en términos de π, si: (*a*) el radio es 6; (*b*) el diámetro es 14; (*c*) el área es 25π; (*d*) el área es 3π. (10.8)

23. Calcule el área de un círculo en términos de π, si: (*a*) el radio es 3; (*b*) el diámetro es 10; (*c*) la circunferencia es 16π; (*d*) la circunferencia es π; (*e*) la circunferencia es $6\pi\sqrt{2}$. (10.8)

24. En un círculo: (*a*) calcule la circunferencia y el área, si el radio es 5; (*b*) calcule el área y el radio, si la circunferencia es 16π; (*c*) calcule el radio y la circunferencia, si el área es 16π. (10.8)

25. En un hexágono regular, calcule la circunferencia del círculo circunscrito, si: (*a*) la longitud de la apotema es $3\sqrt{3}$; (*b*) el perímetro es 12; (*c*) la longitud de un lado es $3\frac{1}{2}$. Asimismo, calcular la circunferencia del círculo inscrito, si (*d*) la longitud de la apotema es 13; (*e*) la longitud de un lado es 8; (*f*) el perímetro es $6\sqrt{3}$. (10.9)

26. Para un cuadrado, calcule el área en términos de π del: (10.9)

(*a*) círculo circunscrito, si la longitud de la apotema es 7.

(*b*) círculo circunscrito, si el perímetro es 24.

(*c*) círculo circunscrito, si la longitud de un lado es 8.

(*d*) círculo inscrito, si la longitud de la apotema es 5.

(*e*) círculo inscrito, si la longitud de un lado es $12\sqrt{2}$.

(*f*) círculo inscrito, si el perímetro es 80.

27. Calcule la circunferencia y el área del: (1) círculo circunscrito y (2) círculo inscrito de: (10.9)

(*a*) Un hexágono regular, si la longitud de un lado es 4.

(*b*) Un hexágono regular, si la longitud de la apotema es $4\sqrt{3}$.

(*c*) Un triángulo equilátero, si la longitud de la altura es 9.

(*d*) Un triángulo equilátero, si la longitud de la apotema es 4.

(*e*) Un cuadrado, si la longitud de un lado es 20.

(*f*) Un cuadrado, si la longitud de la apotema es 3.

28. Calcule el radio de un tubo que tiene la misma capacidad que otros dos tubos juntos cuyos radios son: (*a*) 6 pies y 8 pies; (*b*) 8 pies y 15 pies; (*c*) 3 pies y 6 pies. (*Sugerencia*: calcule las áreas de sus secciones circulares transversales.) (10.10)

29. En un círculo, calcule la longitud de un arco de 90°, si: (10.11)

(*a*) El radio es 4.

(*b*) El diámetro es 40.

(*c*) La circunferencia es 32.

(*d*) La circunferencia es 44π.

(*e*) Un hexágono inscrito tiene un lado de longitud 12.

(*f*) Un triángulo equilátero inscrito tiene una altura de longitud 30.

30. Calcule la longitud de: (10.11)

(*a*) Un arco de 90°, si el radio del círculo es 6.

(*b*) Un arco de 180°, si la circunferencia es 25.

(*c*) Un arco de 30°, si la circunferencia es 60π.

(*d*) Un arco de 40°, si el diámetro es 18.

(*e*) Un arco interceptado por el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 3.

(*f*) Un arco interceptado por una cuerda de longitud 12 en un círculo de radio 12.

31. En un círculo, calcule el área de un sector de 60°, si: (10.12)

(*a*) El radio es 6.

(*b*) El diámetro es 2.

(*c*) La circunferencia es 10π.

(*d*) El área del círculo es 150π.

(*e*) El área del círculo es 27.

(*f*) El área de un sector de 240° es 52.

(*g*) Un hexágono inscrito tiene un lado de longitud 12.

(*h*) Un hexágono inscrito tiene un área de $24\sqrt{3}$.

32. Calcule el área de un: (10.12)

(*a*) Sector de 60°, si el radio del círculo es 6.

(*b*) Sector de 240°, si el área del círculo es 30.

(*c*) Sector de 15°, si el área del círculo es 72π.

(*d*) Sector de 90°, si la longitud de su arco es 4π.

33. Calcule la medida de un ángulo central de un arco cuya longitud es: (10.12)

(*a*) 3 m, si la circunferencia es 9 m.

(*b*) 2 pies, si la circunferencia es 1 yd.

(*c*) 25, si la circunferencia es 250.

(*d*) 6π, si la circunferencia es 12π.

(*e*) Tres octavos de la circunferencia.

(*f*) Igual al radio.

34. Calcule la medida del ángulo central de un sector cuya área es: (10.12)

(*a*) 10, si el área del círculo es 50.

(*b*) 15 cm^2, si el área del círculo es 20 cm^2

(*c*) 1 pie^2, si el área del círculo es 1 yd^2.

(*d*) 5π, si el área del círculo es 12π.

(*e*) Ocho novenos del área de un círculo.

35. Calcule la medida del ángulo central de: (10.11), (10.12)

(*a*) Un arco cuya longitud es 5π, si el área de su sector es 25π.

(*b*) Un arco cuya longitud es 12π, si el área de su sector es 48π.

(*c*) Un sector cuya área es 2π, si la longitud de su arco es π.

(*d*) Un sector cuya área es 10π, si la longitud de su arco es 2π.

36. Calcule el radio de un círculo si: (10.11), (10.12)

(*a*) Un arco de 120° tiene una longitud de 8π.

(*b*) Un arco de 40° tiene una longitud de 2π.

(*c*) Un arco de 270° tiene una longitud de 15π.

(*d*) Un sector de 30° tiene un área de 3π.

(*e*) Un sector de 36° tiene un área de $2\frac{1}{2}\pi$.

(*f*) Un sector de 120° tiene un área de 6π.

37. Calcule el radio de un círculo si: (10.12)

(*a*) Un sector de área 12π tiene un arco de longitud 6π.

(*b*) Un sector de área 10π tiene un arco de longitud 2π.

(*c*) Un sector de área 25 cm^2 tiene un arco de longitud 5 cm.

(*d*) Un sector de área 162 tiene un arco de longitud 36.

38. Calcule el área de un segmento si su ángulo central es 60° y el radio del círculo es (*a*) 6; (*b*) 12; (*c*) 3; (*d*) r; (*e*) $2r$. (10.13)

39. Calcule el área de un segmento de un círculo si:

(*a*) El radio del círculo es 4 y el ángulo central mide 90°.

(*b*) El radio del círculo es 30 y el ángulo central mide 60°.

(*c*) El radio del círculo y la cuerda del segmento ambas miden 12.

(*d*) El ángulo central es 90° y la longitud del arco es 4π.

(*e*) Su cuerda de longitud 20 unidades está a 10 unidades del centro del círculo.

40. Calcule el área de un segmento de un círculo si el radio del círculo es 8 y el ángulo central mide: (*a*) 120°; (*b*) 135°; (*c*) 150°. (10.13)

41. Si el radio de un círculo es 4, calcular el área de cada segmento formado por: (*a*) un triángulo equilátero inscrito; (*b*) un hexágono regular inscrito; (*c*) un cuadrado inscrito. (10.13)

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10\sqrt{3}}{4}$

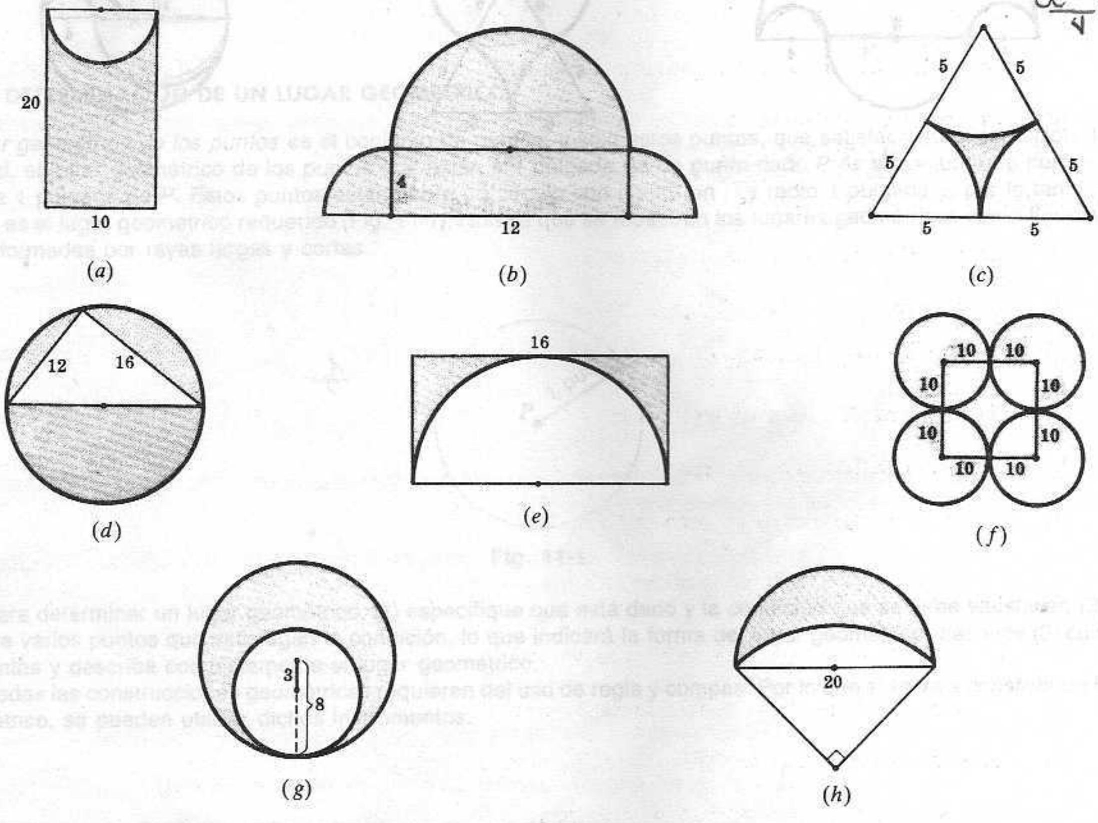


Fig. 10-15

42. Calcule el área de cada segmento de un círculo, si los segmentos están formados por: (10.13)

(*a*) Un triángulo equilátero inscrito y el radio del círculo es 6.

(*b*) Un hexágono regular inscrito y el radio del círculo es 3.

(*c*) Un cuadrado inscrito y el radio del círculo es 6.

43. Calcule el área sombreada en cada inciso de la figura 10-15. Cada punto marcado representa el centro de un arco o de un círculo. (10.15)

44. Calcule el área sombreada en cada inciso de la figura 10-16. Cada punto marcado representa el centro de un arco o de un círculo. (10.15)

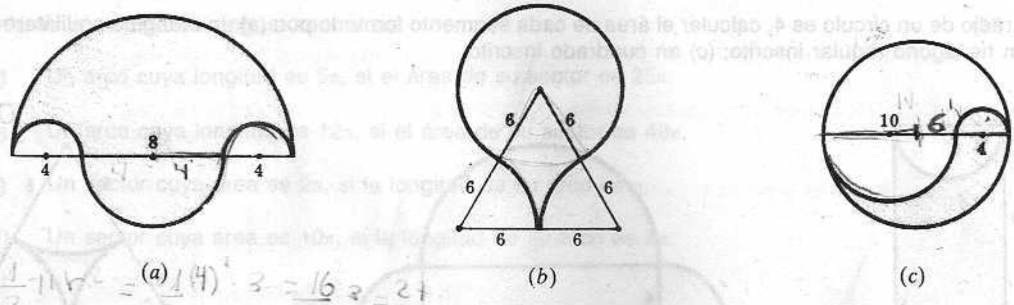


Fig. 10-16

11

Lugar geométrico

11.1 DETERMINACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

El *lugar geométrico de los puntos* es el conjunto de puntos, y sólo estos puntos, que satisfacen una condición dada.

Así, el lugar geométrico de los puntos que están a 1 pulgada de un punto dado P es el conjunto de puntos que están a 1 pulgada de P. Estos puntos están sobre un círculo con centro en P y radio 1 pulgada y, por lo tanto, este círculo es el lugar geométrico requerido (Fig. 11-1). Nótese que se muestran los lugares geométricos como figuras con líneas formadas por rayas largas y cortas.

Fig. 11-1

Para determinar un lugar geométrico, (1) especifique que está dado y la condición que se debe satisfacer; (2) encuentre varios puntos que satisfagan la condición, lo que indicará la forma del lugar geométrico; después (3) conecte los puntos y describa completamente el lugar geométrico.

Todas las construcciones geométricas requieren del uso de regla y compás. Por lo que si se va a *construir* un lugar geométrico, se pueden utilizar dichos instrumentos.

11.1A Teoremas fundamentales sobre lugares geométricos

Principio 1: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados, es la mediatriz del segmento de línea que une estos puntos* (Fig. 11-2).

Fig. 11-2

Fig. 11-3

PRINCIPIO 2: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos paralelas dadas, es una línea paralela a las dos líneas y en medio de ellas* (Fig. 11-3).

PRINCIPIO 3: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo dado, es la bisectriz del ángulo* (Fig. 11-4).

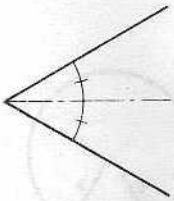


Fig. 11-4

PRINCIPIO 4: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos líneas dadas que se intersectan, está formado por las bisectrices de los ángulos formados por las líneas* (Fig. 11-5).

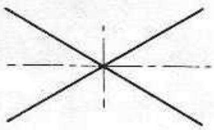


Fig. 11-5

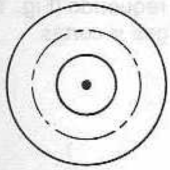


Fig. 11-6

PRINCIPIO 5: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos círculos concéntricos, es el círculo concéntrico a los círculos dados y a la mitad del camino entre ellos* (Fig. 11-6).

PRINCIPIO 6: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado, es un círculo cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada* (Fig. 11-7).

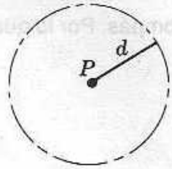


Fig. 11-7

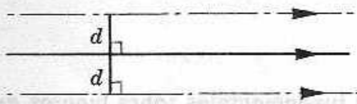


Fig. 11-8

PRINCIPIO 7: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una línea dada, es un par de líneas paralelas a la línea dada y a la distancia dada de la línea dada* (Fig. 11-8).

PRINCIPIO 8: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es mayor que la distancia, es un par de círculos concéntricos, uno a cada lado del círculo dado y a la distancia dada de éste* (Fig. 11-9).

PRINCIPIO 9: *el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es menor que la distancia, es un círculo, fuera del círculo dado y concéntrico a éste* (Fig. 11-10). (Si $r = d$, el lugar geométrico incluye también al centro del círculo dado.)

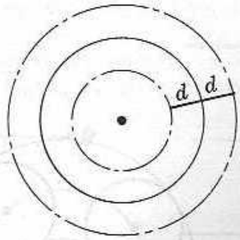


Fig. 11-9

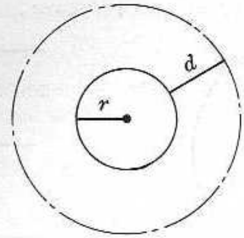


Fig. 11-10

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1 DETERMINACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Determine el lugar geométrico de (*a*) un corredor que se mueve equidistantemente a los lados de una pista recta; (*b*) un avión que vuela equidistantemente a dos baterías antiaéreas separadas; (*c*) un satélite a 100 millas de la superficie de la Tierra; (*d*) el punto de máximo alcance de un cañón con un rango de 10 millas.

Soluciones

Véase Fig. 11-11

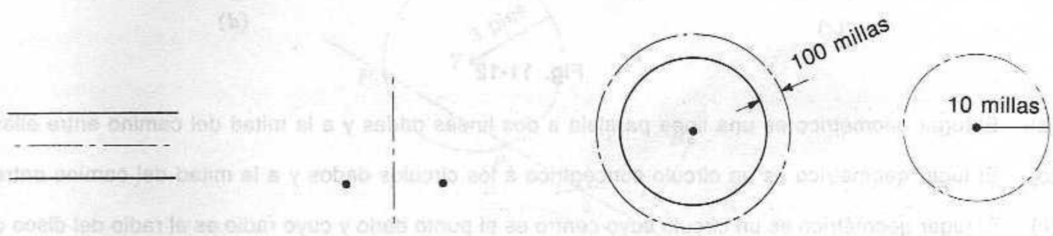


Fig. 11-11

(*a*) El lugar geométrico es una línea paralela a las dos líneas dadas y a medio camino entre ellas.

(*b*) El lugar geométrico es la mediatriz de la línea que une los dos puntos.

(*c*) El lugar geométrico es un círculo concéntrico con la Tierra y de radio 100 millas mayor que el de la Tierra.

(*d*) El lugar geométrico es un círculo de radio 10 millas con centro en el cañón.

11.2 DETERMINACIÓN DEL LUGAR GEOMÉTRICO DEL CENTRO DE UN CÍRCULO

Determine el lugar geométrico del centro de un disco circular (*a*) que se mueve de tal manera que toca a cada una de dos líneas paralelas; (*b*) que se mueve en forma tangencial a dos círculos concéntricos; (*c*) que se mueve de tal manera que su canto pasa por un punto fijo; (*d*) que rueda a lo largo de un aro circular fijo.

Soluciones

Véase Fig. 11-12.

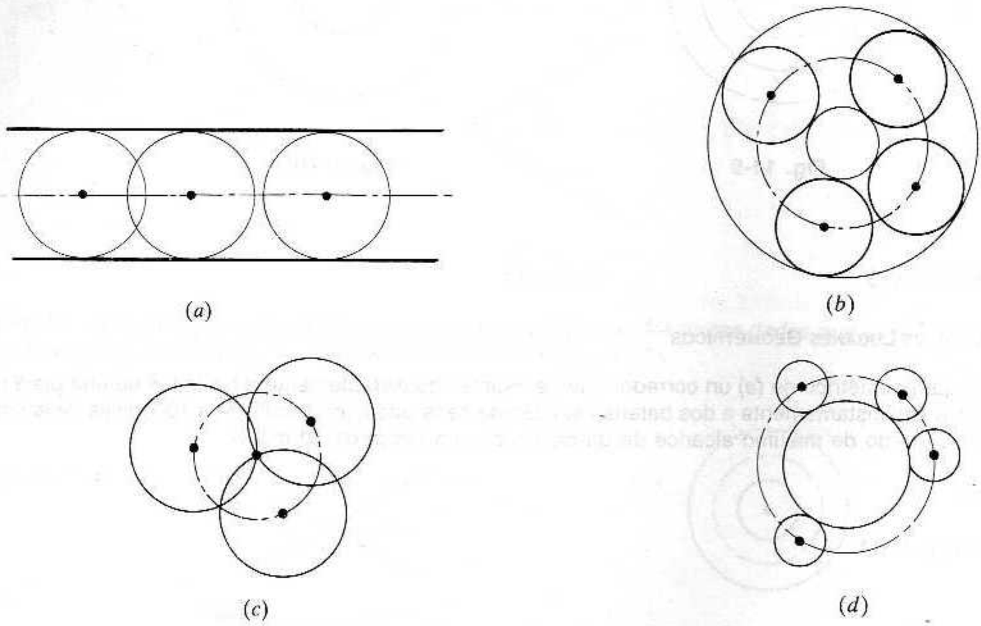


Fig. 11-12

(*a*) El lugar geométrico es una línea paralela a dos líneas dadas y a la mitad del camino entre ellas.

(*b*) El lugar geométrico es un círculo concéntrico a los círculos dados y a la mitad del camino entre ellos.

(*c*) El lugar geométrico es un círculo cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es el radio del disco circular.

(*d*) El lugar geométrico es un círculo fuera del círculo dado y concéntrico a éste.

11.3 Construcción de un Lugar Geométrico

Construya (*a*) el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados; (*b*) el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos líneas paralelas dadas; (*c*) el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un círculo dado cuyo radio es menor que esa distancia.

Soluciones

Véase Fig. 11-13

11.2 LOCALIZACIÓN DE PUNTOS POR MEDIO DE LA INTERSECCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS

El punto o puntos que satisfaga dos condiciones puede localizarse trazando el lugar geométrico para cada condición. Los puntos buscados son los puntos de intersección de los dos lugares geométricos.

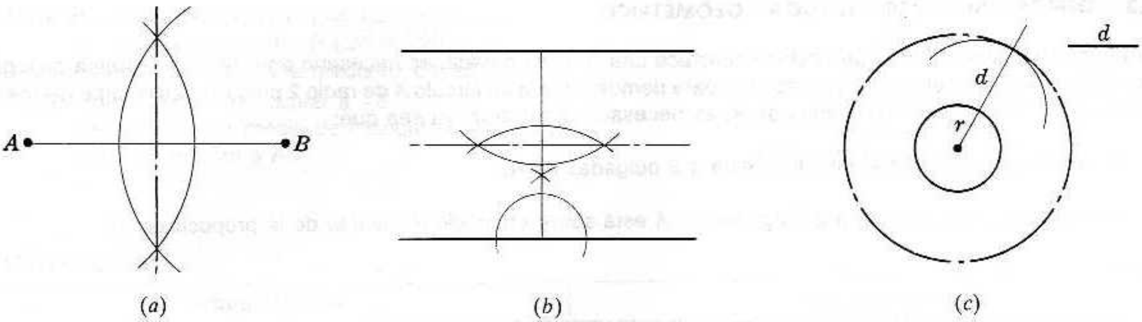


Fig. 11-13

PROBLEMAS RESUELTOS

11.4 Localización de Puntos que Satisfacen dos Condiciones

En un mapa localice un tesoro enterrado que está a 3 pies de un árbol (T) que equidista de dos puntos (A y B) en la figura 11-14.

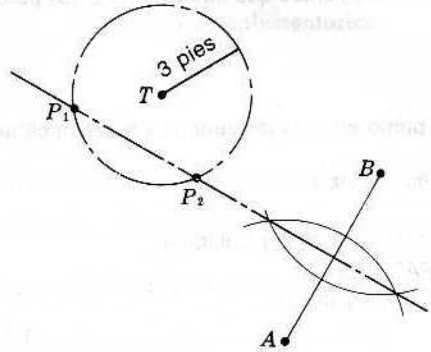


Fig. 11-14

Solución

Los lugares geométricos requeridos son (1) la mediatriz de $\overline{AB}$ y (2) un círculo con centro en T y radio 3 pies. Como se muestra, éstos se intersectan en P_1 y P_2, que son los puntos de ubicación del tesoro.

Nota: El diagrama muestra los dos lugares geométricos que se intersectan en P_1 y P_2. Sin embargo, hay tres posibles clases de soluciones, dependiendo de la localización de T con respecto a A y B:

1. La solución consiste en dos puntos, si los lugares geométricos se intersectan.
2. La solución es de un punto, si la mediatriz es tangente al círculo.
3. La solución no existe, si la mediatriz no intersecta al círculo

11.3 DEMOSTRACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

Para demostrar que un lugar geométrico satisface una condición dada, es necesario demostrar el teorema de lugares geométricos y su converso o su inverso. Así, para demostrar que un círculo A de radio 2 pulgadas es el lugar geométrico de los puntos que distan 2 pulgadas de A, es necesario demostrar, ya sea que:

1. Cualquier punto sobre el círculo A está a 2 pulgadas de A.
2. Cualquier punto que está a 2 pulgadas de A está sobre el círculo (converso de la proposición 1).

o que:

1. Cualquier punto sobre el círculo A está a 2 pulgadas de A.
2. Cualquier punto que no está sobre el círculo A no está a 2 pulgadas de A (inverso de la proposición 1).

Estas proposiciones se demuestran fácilmente utilizando el principio de que un punto está fuera, sobre, o dentro de un círculo de acuerdo a si su distancia desde el centro es mayor que, igual a, o menor que el radio del círculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

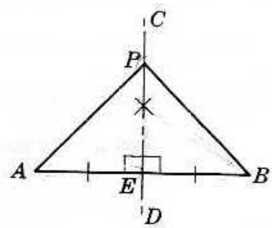
11.5 DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS

Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados es la mediatriz del segmento que une los dos puntos.

Solución

Primero demuestre que cualquier punto en el lugar geométrico satisface la condición:

Dados: puntos A y B. $\overline{CD}$ es la mediatriz $\perp$ de $\overline{AB}$.
Demuéstrese: cualquier punto P sobre $\overline{CD}$ es equidistante a A y B; esto es, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.
Plan: demuéstrese $\triangle PEA \cong \triangle PEB$ para obtener $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.



DEMOSTRACIÓN:

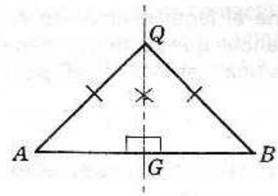
Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{CD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.	1. Dado.
2. $\angle PEA \cong \angle PEB$	2. Las perpendiculares forman ángulos rectos; todos los ángulos rectos son congruentes.
3. $\overline{AE} \cong \overline{EB}$	3. Bisectar es dividir en partes congruentes
4. $\overline{PE} \cong \overline{PE}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle PEA \cong \triangle PEB$	5. s.a.s. $\cong$ s.a.s.
6. $\overline{PA} \cong PB$	6. Partes correspondientes de triángulos $\cong$ son $\cong$.

Después, demuestre que cualquier punto que satisface la condición está en el lugar geométrico:

Dados: cualquier punto Q que equidista de los puntos A y B ($\overline{QA} \cong \overline{QB}$).

Demuéstrese: Q está en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Plan: Trace $\overline{QG}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y demuestre, por medio de triángulos congruentes, que $\overline{QG}$ bisecta a $\overline{AB}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{QG} \perp \overline{AB}$	1. Por un punto externo se puede trazar una línea perpendicular a una línea dada.
2. $\overline{QA} \cong \overline{QB}$	2. Dado
3. $\angle QGA$ y $\angle QGB$ son $\angle$s rectos; $\triangle QGA$ y $\triangle QGB$ son triángulos rectángulos	3. Las perpendiculares forman ángulos rectos; $\triangle$s con un $\angle$ recto son $\triangle$s rectángulos.
4. $\overline{QG} \cong \overline{QG}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle QGA \cong \triangle QGB$	5. hip.c. $\cong$ hip.c.
6. $\overline{AG} \cong \overline{GB}$	6. Partes correspondientes de triángulos $\cong$ son $\cong$.
7. $\overline{QG}$ bisecta $\overline{AB}$	7. Bisectar es dividir en dos partes congruentes
8. $\overline{QG}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.	8. Una línea perpendicular a un segmento y que lo bisecta es una mediatriz.

Problemas complementarios

1. Determine el lugar geométrico de (11.1)

(*a*) Los puntos medios de las cuerdas de un círculo dado.

(*b*) Los puntos medios de las cuerdas de un círculo dado paralelas a una línea dada.

(*c*) Los puntos medios de las cuerdas de longitud fija en un círculo dado.

(*d*) El vértice de un ángulo recto de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa dada.

(*e*) El vértice de un triángulo isósceles, que tiene una base dada.

(*f*) El centro de un círculo, que pasa por dos puntos dados.

(*g*) El centro de un círculo tangente a una línea dada en un punto dado sobre esa línea.

(*h*) El centro de un círculo tangente a los lados de un ángulo dado.

2. Determine el lugar geométrico de (11.1)

(*a*) Una lancha que se mueve equidistante a los márgenes paralelos de un arroyo.

(*b*) Un nadador que se mantiene a la misma distancia de dos flotadores.

(*c*) Un helicóptero policiaco en persecución de un coche, el cual acaba de pasar por la unión de dos caminos rectos, y que puede encontrarse en cualquiera de ellos.

(*d*) Un tesoro enterrado a la misma distancia de dos caminos rectos que se intersectan.

3. Determine el lugar geométrico de (*a*) un planeta que se mueve manteniéndose a una distancia fija del Sol; (*b*) una lancha que se mueve manteniéndose a una distancia fija de la costa de una isla circular; (*c*) plantas sembradas a una distancia de 20 pies de una fila recta de otras plantas; (*d*) el extremo exterior de la manecilla de un reloj. (11.1)

4. Si se excluyen los puntos en el exterior del rectángulo *ABCD* en la figura 11-15, identifique el lugar geométrico de los puntos que: (11.1)

(*a*) Equidistan de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

(*b*) Equidistan de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

(*c*) Equidistan de *A* y *B*

(*d*) Equidistan de *B* y *C*

(*e*) Están a 5 unidades de $\overline{BC}$

(*f*) Están a 10 unidades de $\overline{AB}$

(*g*) Están a 20 unidades de $\overline{CD}$

(*h*) Están a 10 unidades de *B*

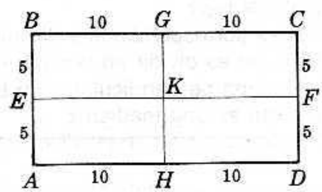


Fig. 11-15

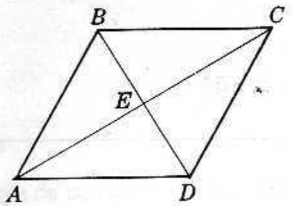


Fig. 11-16

5. Identifique el lugar geométrico de los puntos en el rombo *ABCD* en la figura 11-16 que equidistan de (*a*) $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$; (*b*) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; (*c*) *A* y *C*; (*d*) *B* y *D*; (*e*) cada uno de los cuatro lados.

6. En la figura 11-17, identifíquese el lugar geométrico de los puntos que están sobre o dentro del círculo *C* y (11.1,11.2)

(*a*) A 5 unidades de *O*

(*b*) A 15 unidades de *O*

(*c*) Equidistan de los círculos *A* y *C*

(*d*) A 10 unidades del círculo *C*

(*e*) A 10 unidades del círculo *A*

(*f*) A 5 unidades del círculo *B*

(*g*) El centro de un círculo tangente a los círculos *A* y *C*

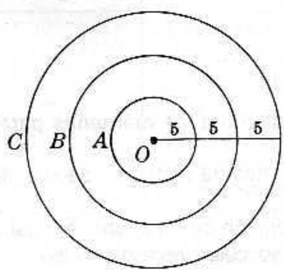


Fig. 11-17

7. Determine el lugar geométrico del centro de (*a*) una moneda que gira y alrededor y está en contacto con una moneda menor; (*b*) una moneda que gira alrededor y está en contacto con una moneda mayor; (*c*) una rueda que se mueve entre dos barras paralelas y está en contacto con ambas; (*d*) Una rueda que se mueve a lo largo de una barra recta de metal y está en contacto con ésta. (11.2)

8. Identifique el lugar geométrico de los puntos que están en el rectángulo *ABCD* de la figura 11-18 y el centro de un círculo (11.2)

(*a*) Tangente a $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

(*b*) Tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

(*c*) Tangente a $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$

(*d*) De radio 10, tangente a $\overline{BC}$

(*e*) De radio 20, tangente a $\overline{AD}$

(*f*) Tangente a $\overline{BC}$ en *G*

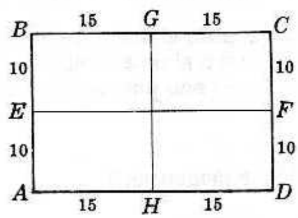


Fig. 11-18

9. Localice cada uno de los siguientes: (11.4)

(*a*) Un tesoro que está enterrado a 5 pies de una cerca recta y es equidistante de dos puntos dados donde la cerca hace contacto con el suelo

(*b*) Los puntos que están a 3 pies de un círculo cuyo radio es 2 pies y que equidistan de dos líneas paralelas entre sí y tangentes al círculo

(*c*) Un punto que equidista de los tres vértices de un triángulo dado

(*d*) Un punto que equidista de dos puntos dados y que equidista de dos paralelas dadas

(*e*) Los puntos que equidistan de dos líneas dadas que se intersectan y están a 5 pies de la intersección

(*f*) Un punto que equidista de los lados de un ángulo y está a $\frac{1}{2}$ de la intersección

10. Localice el punto o puntos que satisfacen las siguientes condiciones con respecto al $\triangle ABC$ en la figura 11-19: (11.4)

(*a*) Equidistan de sus lados

(*b*) Equidistan de sus vértices

(*c*) Equidistan de *A* y *B* y de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

(*d*) Equidistan de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y están a 5 unidades de *C*

(*e*) Están a 5 unidades de *B* y a 10 unidades de *A*

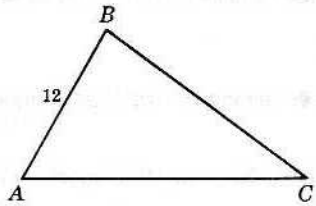


Fig. 11-19

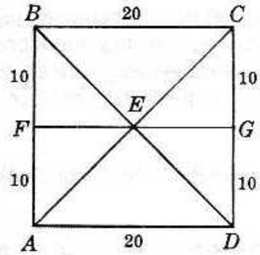


Fig. 11-20

11. Si se excluyen los puntos que están fuera del cuadrado *ABCD* en la figura 11-20, ¿cuántos puntos existen (11.4)

(*a*) equidistantes de sus vértices?

(*b*) equidistantes de sus lados?

(*c*) a 5 unidades de *E* y sobre una de las diagonales?

(*d*) a 5 unidades de *E* y equidistantes de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$?

(*e*) a 5 unidades de $\overline{FG}$ y equidistantes de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

(*f*) a 20 unidades de *A* y a 10 unidades de *B*?

12. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo, es la bisectriz del ángulo. (11.5)

12

Geometría analítica

12.1 GRÁFICAS

Una *escala numérica* es una línea en la cual se marca la distancia entre puntos en términos de unidades iguales. Las unidades son positivas en una dirección y negativas en la dirección opuesta. El *origen* es el punto cero desde el cual se miden las distancias. En la figura 12-1 se muestra una escala numérica horizontal.

Escala numérica horizontal

Fig. 12-1

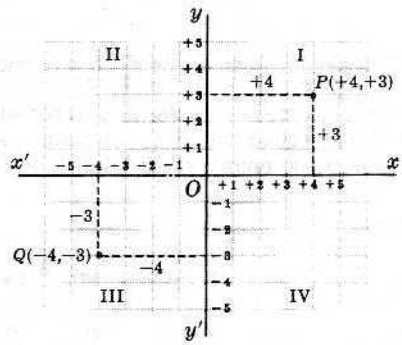


Fig. 12-2

La *gráfica* mostrada en la figura 12-2 se construye mediante la combinación de dos escalas numéricas colocadas en ángulo recto y de tal manera que coincidan sus ceros. La escala numérica horizontal se denota como el *eje x*, mientras que la vertical es el eje y. El punto de intersección de las dos escalas se denota como el *origen*.

Un *punto se localiza en una gráfica mediante sus coordenadas*, que son las distancias de ese punto a los ejes. La *abscisa* o *coordenada x* es la distancia del punto al eje *y*. La *ordenada* o *coordenada y* de un punto es la distancia del punto al eje *x*.

Cuando se escriben las coordenadas de un punto, la coordenada *x* precede a la coordenada *y*. Así, las coordenadas de un punto *P* en la figura 12-2 se escriben como (4,3); las de *Q* como (−4,−3). Nótese el uso de paréntesis.

Los *cuadrantes* de una gráfica son las cuatro partes delimitadas por los ejes. Los cuadrantes se enumeran como I, II, III, IV en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1 Localización de Puntos en una Gráfica

En la figura 12-3, determine las coordenadas de los puntos siguientes:

(*a*) *B* (*c*) *O* (*e*) *N* (*g*) *P* (*i*) *R*

(*b*) *M* (*d*) *L* (*f*) *G* (*h*) *Q* (*j*) *S*

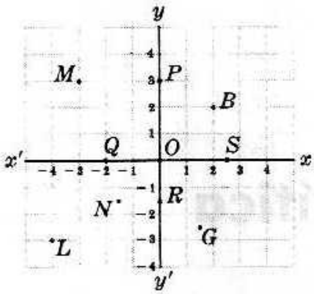


Fig. 12-3

Soluciones

(*a*)	(2,2)	(*c*)	(0,0)	(*e*)	$(-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{2})$	(*g*)	(0,3)	(*i*)	$(0,-1\frac{1}{2})$
(*b*)	(−3,3)	(*d*)	(−4,−3)	(*f*)	$(1\frac{1}{2},-2\frac{1}{2})$	(*h*)	(−2,0)	(*j*)	$(2\frac{1}{2},0)$

12.2 Coordenadas de Puntos en los Cuatro Cuadrantes

¿Cuáles son los signos de las coordenadas de: (*a*) un punto en el cuadrante I; (*b*) un punto en el cuadrante II; (*c*) un punto en el cuadrante III; (*d*) un punto en el cuadrante IV?. Indique cuál coordenada tiene signo y cuál tiene valor cero para un punto entre los cuadrantes: (*e*) IV y I; (*f*) I y II; (*g*) II y III; (*h*) III y IV.

Soluciones

(*a*)	(+,+)	(*c*)	(−,−)	(*e*)	(+,0)	(*g*)	(−,0)
(*b*)	(−,+)	(*d*)	(+,−)	(*f*)	(0,+)	(*h*)	(0,−)

12.3 Gráfica de un Cuadrilátero

Si los vértices de un rectángulo tienen las coordenadas $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-5,-3)$, $D(3,-3)$ calcule su perímetro y su área.

Solución

La base y la altura del rectángulo son 8 y 4 (Fig. 12-4).

Por lo tanto, el perímetro es $2b + 2h = 2(8) + 2(4) = 24$, mientras que el área es $bh = (8)(4) = 32$.

12.4 Gráfica de un Triángulo

Si los vértices de un triángulo tienen las coordenadas $A(4\frac{1}{2},-2)$, $B(-2\frac{1}{2},-2)$ y $C(1,5)$, calcule su área.

Solución

La longitud de la base es $BA = 7$ (Ver la Fig. 12-5). La altura es $CD = 7$. Entonces $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(7)(7) = 24\frac{1}{2}$.

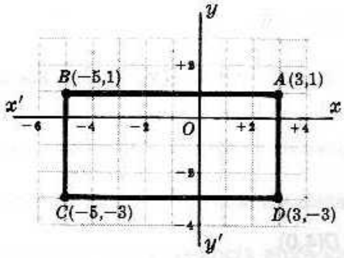


Fig. 12-4

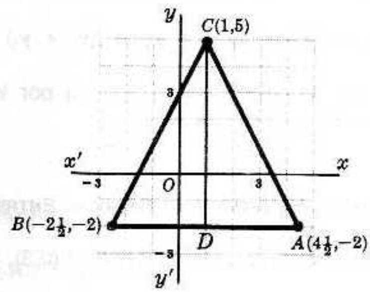


Fig. 12-5

12.2 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas (x_m, y_m) del punto medio M de un segmento de línea que une los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ son:

$$x_m = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad \text{y} \qquad y_m = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

En la figura 12-6, el segmento y_m es la mediana del trapezoide $CPQD$ cuyas bases son y_1, y_2. Dado que la longitud de una mediana es la mitad de la suma de las bases, $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. De manera similar el segmento x_m es la mediana del trapezoide $ABQP$ cuyas bases son x_1,x_2; por lo tanto $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

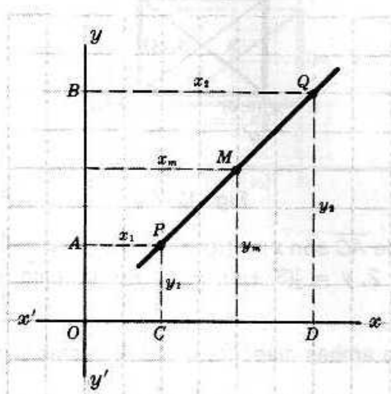


Fig. 12-6

PROBLEMAS RESUELTOS

12.5 Aplicación de la Fórmula del Punto Medio

Si M es el punto medio $\overline{PQ}$, calcule las coordenadas de (*a*) M si las coordenadas de P y Q son $P(3,4)$ y $Q(5,8)$; (*b*) Q si las coordenadas de P y M son $P(1,5)$ y $M(3,4)$.

Soluciones

(*a*) $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4$; $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(4 + 8) = 6$.

(*b*) $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, así que $3 = \frac{1}{2}(1 + x_2)$ por lo tanto $x_2 = 5$; $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, así que $4 = \frac{1}{2}(5 + y_2)$ por lo que $y_2 = 3$.

12.6 Determinar si dos Segmentos se Bisectan Entre sí

Los vértices de un cuadrilátero son $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(4,3)$ y $D(4,0)$.

(*a*) Demuestre que $ABCD$ es un rectángulo.

(*b*) Demuestre que el punto medio de $\overline{AC}$ también es el punto medio de $\overline{BD}$.

(*c*) ¿Se bisectan las diagonales entre sí? ¿Por qué?

Soluciones

(*a*) De la figura 12-7, $AB = CD = 3$, también $BC = AD = 4$; por lo tanto, $ABCD$ es un paralelogramo. Dado que $\angle BAD$ es un ángulo recto, $ABCD$ es un rectángulo.

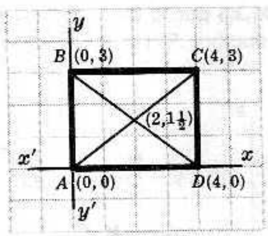


Fig. 12-7

(*b*) Las coordenadas del punto medio de $\overline{AC}$ son $x = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$, $y = \frac{1}{2}(0 + 3) = 1\frac{1}{2}$. Las coordenadas del punto medio de $\overline{BD}$ son $x = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2$, $y = \frac{1}{2}(3 + 0) = 1\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el punto $(2, 1\frac{1}{2})$ es el punto medio tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{BD}$.

(*c*) Sí, dado que los puntos medios de ambas diagonales son el mismo punto.

12.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Principio 1: *la distancia entre dos puntos con la misma ordenada (o valor de y) es el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.* (Por lo tanto, la distancia entre dos puntos debe ser *positiva*.)

Así, la distancia entre los puntos $P(6,1)$ y $Q(9,1)$ es $9 - 6 = 3$.

Principio 2: *la distancia entre dos puntos con la misma abscisa (o valor de x) es el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.*

Así, la distancia entre los puntos $P(2,1)$ y $Q(2,4)$ es $4 - 1 = 3$.

Principio 3: *la distancia d entre los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{o} \quad d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

La diferencia $x_2 - x_1$ se denota por el símbolo Δx; la diferencia $y_2 - y_1$ por el símbolo Δy. Delta (Δ) es la cuarta letra del alfabeto griego y que corresponde a la *d* latina. Las diferencias Δx y Δy pueden ser positivas o negativas.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.7 Demostración y uso de la Fórmula de Distancia

(*a*) Demuestre algebraicamente la fórmula de distancia (principio 3).

(*b*) Utilice ésta para encontrar la distancia entre los puntos $A(2,5)$ y $B(6,8)$.

Soluciones

(*a*) Observe la figura 12-8. Por el principio 1, $P_1S = x_2 - x_1 = \Delta x$. Por el principio 2, $P_2S = y_2 - y_1 = \Delta y$. También, en el triángulo rectángulo $P_1S\ P_2$:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1S)^2 + (P_2S)^2$$
$$\text{o} \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\text{y} \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

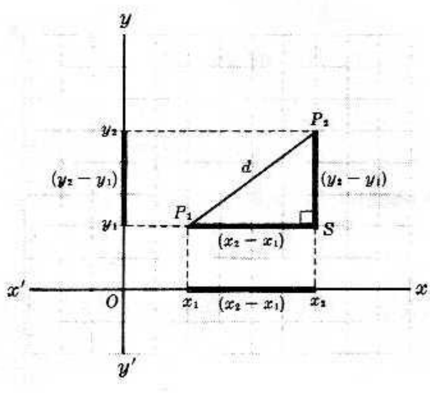


Fig. 12-8

(*b*) La distancia de $A(2,5)$ a $B(6,8)$ se encuentra como sigue:

$\underline{(x, y)}$

$B(6,8) \rightarrow x_2 = 6,\ y_2 = 8$

$A(2,5) \rightarrow x_1 = 2,\ y_1 = 5$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d^2 = (6 - 2)^2 + (8 - 5)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, y $d = 5$

12.8 Cálculo de la Distancia Entre dos Puntos

Calcule la distancia entre los puntos: (*a*) $(-3,5)$ y $(1,5)$; (*b*) $(3,-2)$ y $(3,4)$; (*c*) $(3,4)$ y $(6,8)$; $(-3,2)$ y $(9,-3)$.

Soluciones

(*a*) Dado que ambos puntos tienen la misma ordenada (o valor de y), $d = x_2 - x_1 = 1 - (-3) = 4$.

(*b*) Dado que ambos puntos tienen la misma abscisa (o valor de x), $d = y_2 - y_1 = 4 - (-2) = 6$.

(*c*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(*d*) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[9-(-3)]^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

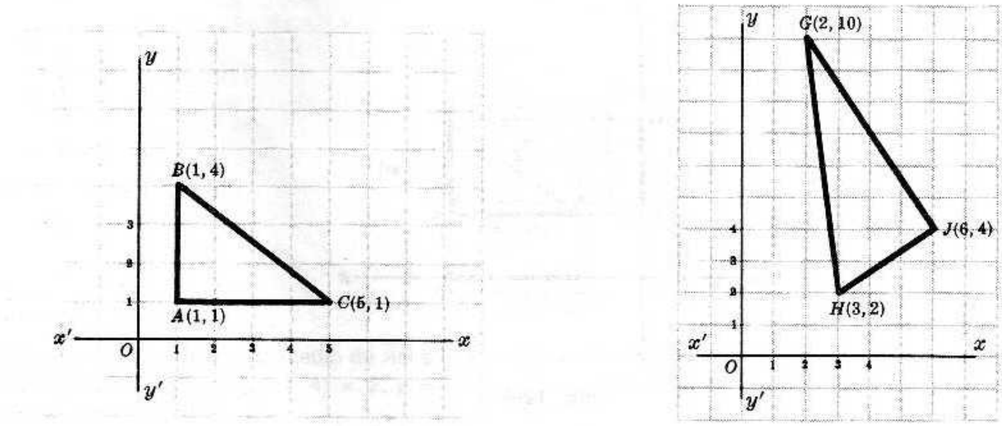
12.9 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Triángulo

(*a*) Calcule las longitudes de los lados de un triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$, $B(1,4)$ y $C(5,1)$.

(*b*) Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $G(2,10)$, $H(3,2)$, y $J(6,4)$ es un triángulo rectángulo.

Soluciones

Observe la figura 12-9.



(*a*) (*b*)

Fig. 12-9

(*a*) $AC = 5 - 1 = 4$; $AB = 4 - 1 = 3$; $BC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

(*b*) $(GJ)^2 = (6-2)^2 + (4-10)^2 = 52$; $(HJ)^2 = (6-3)^2 + (4-2)^2 = 13$; $(GH)^2 = (2-3)^2 + (10-2)^2 = 65$. Dado que $(GJ)^2 + (HJ)^2 = (GH)^2$, el $\triangle GHJ$ es un triángulo rectángulo.

12.10 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Paralelogramo

Las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son $A(2,2)$, $B(3,5)$, $C(6,7)$ y $D(5,4)$. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución

De la figura 12-10, se tiene:

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(3-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\\
CD &= \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\\
BC &= \sqrt{(6-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\\
AD &= \sqrt{(5-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Así, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. Como los lados opuestos son congruentes $ABCD$ es un paralelogramo.

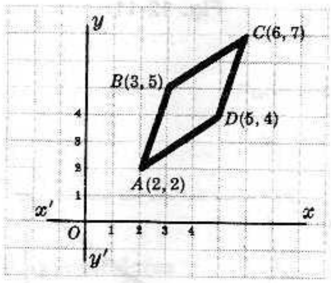


Fig. 12-10

12.11 Aplicación de la Fórmula de Distancia a un Círculo

Un círculo es tangente al eje x y tiene su centro en el punto (6,4). ¿En dónde está el punto (9,7) respecto al círculo?

Solución

Dado que el círculo es tangente al eje x, $\overline{AQ}$ en la figura 12-11 es un radio. Por el principio 2, $AQ = 4$. Por el principio 3, $BQ = \sqrt{(9-6)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$. Dado que $\sqrt{18}$ es mayor que 4, se tiene que $\overline{BQ}$ es mayor que un radio por lo tanto B está afuera del círculo.

12.4 PENDIENTE DE UNA LÍNEA

Principio 1: *si una línea pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces*

$$\text{la pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Principio 2: *la línea cuya ecuación es $y = mx + b$ tiene pendiente m.*

Principio 3: *la pendiente de una línea es igual a la tangente de su inclinación.*

La inclinación i de una línea es el ángulo por arriba del eje x que está incluido entre la línea y la dirección positiva del eje x (Fig. 12-12). En la figura,

$$\text{Pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = m = \tan i$$

El valor de la pendiente es independiente del orden como se tomen los extremos. Esto es:

$$\text{Pendiente de } \overleftrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \text{Pendiente de } P_2P_1$$

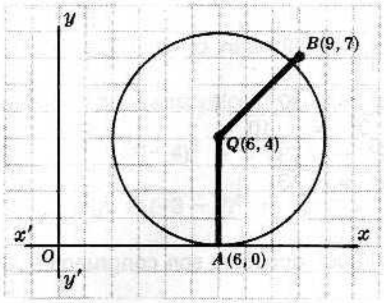


Fig. 12-11

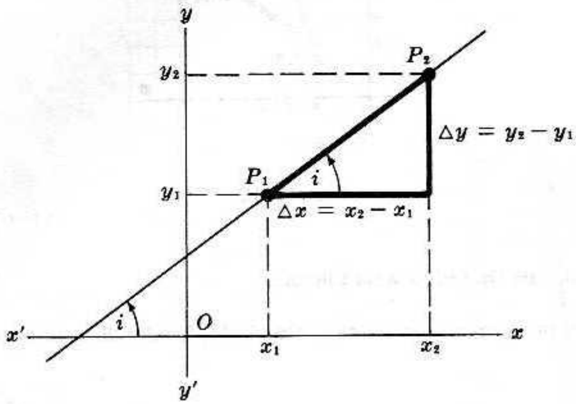
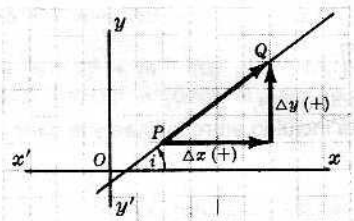


Fig. 12-12

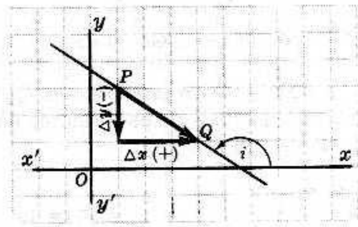
12.4A Pendientes positivas y negativas

Principio 4: *si una línea se inclina hacia arriba de izquierda a derecha, entonces su inclinación i es un ángulo agudo y su pendiente es positiva* (Fig. 12-13).



Pendiente de $PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+}{+} = +$

Fig. 12-13



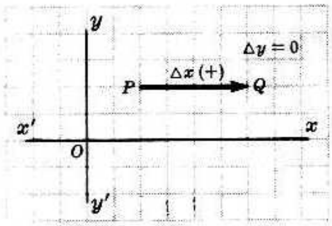
Pendiente de $PQ \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-}{+} = -$

Fig. 12-14

Principio 5: *si una línea se inclina hacia abajo de izquierda a derecha, entonces su inclinación es un ángulo obtuso y su pendiente es negativa* (Fig. 12-14).

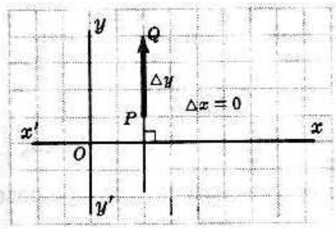
Principio 6: *si una línea es paralela al eje x entonces su inclinación es de 0° y su pendiente es 0 (Fig. 12-15).*

Principio 7: *si una línea es perpendicular al eje x entonces su inclinación es de 90° y no tiene pendiente* (Fig. 12-16).



Pendiente de $PQ = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{+} = 0$

Fig. 12-15



Pendiente de $PQ = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+}{0}$ (sin sentido)

Fig. 12-16

12.4B Pendiente de líneas paralelas y perpendiculares

Principio 8: *las líneas paralelas tienen la misma pendiente.*

En la figura 12-17, $l \parallel l'$; por lo tanto los ángulos correspondientes i, i' son iguales por lo que $\tan i = \tan i'$ o $m = m'$; donde m, m' son las pendientes de l y l' respectivamente.

Principio 9: *las líneas que tienen la misma pendiente son paralelas entre sí.* (Éste es el converso del principio 8.)

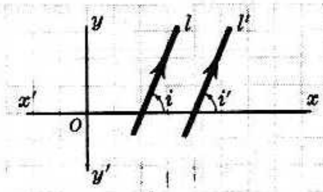


Fig. 12-17

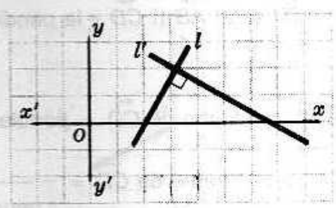


Fig. 12-18

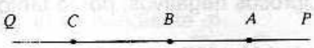
Principio 10: *las líneas perpendiculares entre sí tienen pendientes cuyos valores son recíprocos negativos entre sí.* (Los recíprocos negativos son números como 2/5 y −5/2, es decir, números cuyo producto es −1).

Así, en la figura 12-18, si $l \perp l'$, entonces $m = -1/m$ o $mm' = -1$ donde m, m' son las pendientes respectivas de l, l'.

Principio 11: *las líneas cuyas pendientes son recíprocas negativas entre sí son perpendiculares una respecto de la otra* (esto es el converso del principio 10).

12.4C Puntos Colineales

Los *puntos colineales* son aquéllos que están sobre la misma recta. Así, A, B, y C son puntos colineales:



Principio 12: *la pendiente de una línea recta es constante a lo largo de esa línea.*

Así, si $\overleftrightarrow{PQ}$ en la figura de arriba es una línea recta, la pendiente del segmento de A a B es igual a la pendiente del segmento de C a Q.

Principio 13: *si la pendiente de un segmento entre un primer punto y un segundo punto es igual a la pendiente del segmento entre cualesquiera de los puntos mencionados y otro tercero, entonces los puntos son colineales.*

PROBLEMAS RESUELTOS

2.12 Pendiente e Inclinación de una Línea

(*a*) Calcule la pendiente de la línea que pasa por (−2,−1) y (4,3).

(*b*) Calcule la pendiente de la línea cuya ecuación es $3y - 4x = 15$.

(*c*) Calcule la inclinación de la línea cuya ecuación es $y = x + 4$.

Soluciones

(*a*) Del principio 1, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

(*b*) Se puede escribir $3y - 4x = 15$ como $y = \frac{4}{3}x + 5$, *por lo que* $m = \frac{4}{3}$

(*c*) Dado que $y = x + 4$, se tiene que $m = 1$; por lo que $\tan i = 1$; finalmente $i = 45°$.

12.13 Pendientes de Rectas Paralelas y Perpendiculares

Calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{CD}$ si (*a*) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $\frac{2}{3}$; (*b*) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ es $\frac{3}{4}$.

Soluciones

(*a*) Por el principio 8, la pendiente de $\overleftrightarrow{CD}$ = pendiente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$

b) Por el principio 10, la pendiente de $\overleftrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{\text{pendiente de } AB} = -\dfrac{1}{\frac{3}{4}} = -\dfrac{4}{3}$.

12.14 Aplicación de los Principios 9 y 11 a Triángulos y Cuadriláteros

Complete cada una de las siguientes proposiciones:

(*a*) En el cuadrilátero *ABCD*, si las pendientes de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ son $\frac{1}{2}$, −2, $\frac{1}{2}$, y −2, respectivamente, el cuadrilátero es un __?__.

(*b*) En el triángulo *LMP*, si las pendientes de $\overleftrightarrow{LM}$ y $\overleftrightarrow{MP}$ son 5 y $-\frac{1}{5}$ entonces *LMP* es un triángulo __?__.

Soluciones

(*a*) Dado que las pendientes de lados opuestos son iguales *ABCD* es un paralelogramo. Además, los valores de las pendientes de lados adyacentes son recíprocos negativos, por lo tanto estos lados son perpendiculares y *ABCD* es un rectángulo.

(*b*) Dado que los valores de las pendientes de $\overleftrightarrow{LM}$ y $\overleftrightarrow{MP}$ son recíprocos negativos, $\overline{LM} \perp \overline{MP}$ y el triángulo es recto.

12.15 Aplicación del Principio 12

(*a*) $\overleftrightarrow{AB}$ tiene pendiente 2 y los puntos A, B y C son colineales. ¿Cuáles son los valores de las pendientes de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$?

(*b*) Calcule y, si $G(1,4)$, $H(3,2)$ y $J(9,y)$ son colineales.

Soluciones

(*a*) Por el principio 12, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tienen pendiente 2.

(*b*) Por el principio 12, la pendiente de $\overleftrightarrow{GJ}$ = pendiente de $\overleftrightarrow{GH}$.
Por lo tanto $\frac{y-4}{9-1} = \frac{2-4}{3-1}$, por lo que $\frac{y-4}{8} = \frac{-2}{2} = -1$, $y = -4$.

12.5 LUGARES GEOMÉTRICOS EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Un lugar geométrico de puntos es el conjunto de puntos, y sólo esos puntos, que satisfacen una condición determinada. En geometría, una recta o curva (o el conjunto de rectas o curvas) en una gráfica es el lugar geométrico de puntos analíticos que satisfacen la ecuación de la recta o curva.

Es posible visualizar el lugar geométrico como la trayectoria de un punto que se mueve de acuerdo con la condición dada o como el conjunto de puntos que satisfacen dicha condición.

Principio 1: *el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa es una constante k, es una línea paralela al eje y; su ecuación es* $x = k$. (Fig. 12-19).

Principio 2: *el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es una constante k es una línea paralela al eje x; su ecuación es* $y = k$. (Fig. 12-19).

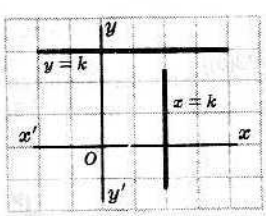


Fig. 12-19

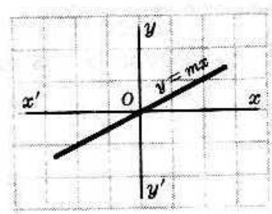


Fig. 12-20

Principio 3: *el lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es igual al producto de una constante m por su abscisa, es una línea recta que pasa por el origen; su ecuación es* $y = mx$.

La constante m es la pendiente de la recta (Fig. 12-20).

Principio 4: *el lugar geométrico de puntos cuyas ordenadas y abscisas están relacionadas por alguna de las siguientes ecuaciones:*

$$y = mx + b \quad \text{o} \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

donde m y b son constantes, es una línea recta (Fig. 12-21).

En la ecuación $y = mx + b$, m es la pendiente y b es la ordenada al origen. La ecuación $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ indica que la recta pasa por el punto dado (x_1,y_1) y tiene pendiente m.

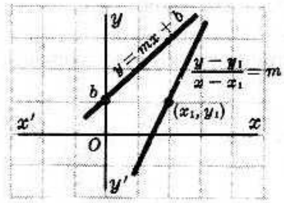


Fig. 12-21

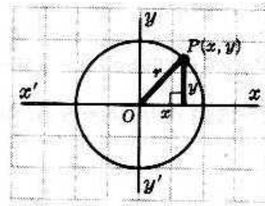


Fig. 12-22

Principio 5: *el lugar geométrico de puntos tales que la suma de los cuadrados de las coordenadas es una constante, es un círculo cuyo centro es el origen.*

La constante es el cuadrado del radio y la ecuación del círculo es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Observe la figura 12-22). Nótese que para cualquier punto $P(x,y)$ sobre el círculo, $x^2 + y^2 = r^2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.16 Aplicación de los Principios 1 y 2

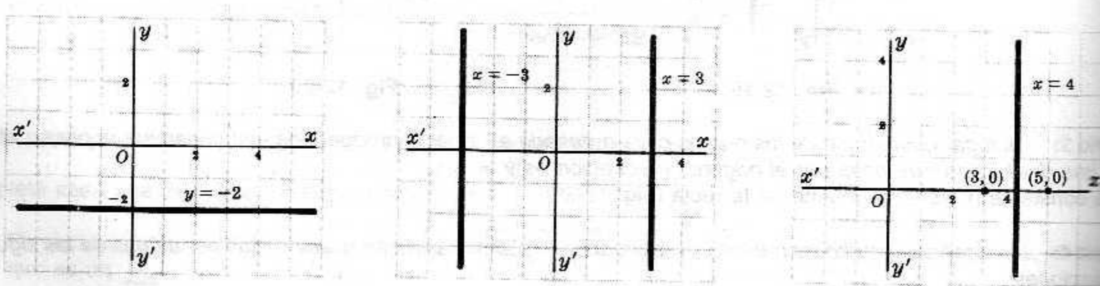
Graficar y determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (*a*) cuya ordenada es -2; (*b*) que están a 3 unidades del eje *y*; (*c*) que son equidistantes de los puntos (3,0) y (5,0).

Soluciones

(*a*) Del principio 2, la ecuación es $y = -2$; [Fig. 12-23(*a*)]

(*b*) Del principio 1, las ecuaciones son $x = 3$ y $x = -3$; [Fig. 12-23(*b*)].

(*c*) La ecuación es $x = 4$; [Fig. 12-23(*c*)].



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 12-23

12.17 Aplicación de los Principios 3 y 4

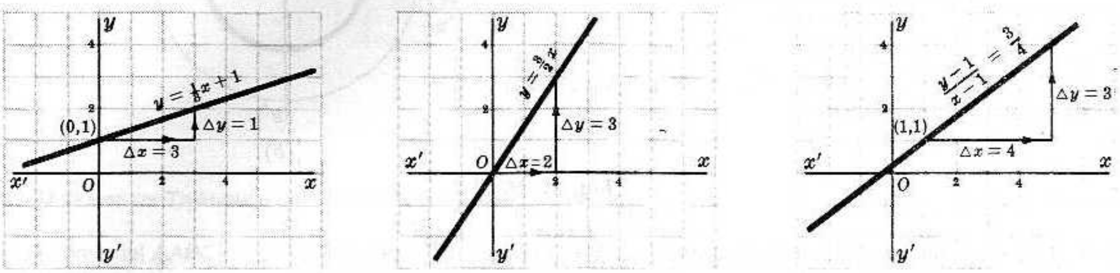
Grafique y describa los lugares geométricos cuyas ecuaciones son: (*a*) $y = \frac{1}{3}x + 1$; (*b*) $y = \frac{3}{2}x$; (*c*) $\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{4}$

Soluciones

(*a*) El lugar geométrico es una recta cuya ordenada al origen es 1 y cuya pendiente es $\frac{1}{3}$. [Fig. 12-24(*a*)].

(*b*) El lugar geométrico es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente igual a $\frac{3}{2}$. [Fig. 12-24(*b*)].

(*c*) El lugar geométrico es un recta que pasa por el punto (1,1) y tiene pendiente $\frac{3}{4}$ [Fig. 12-24(*c*)].



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 12-24

12.18 Aplicación del Principio 5

Graficar y obtener la ecuación del lugar geométrico de los puntos (*a*) que están a dos unidades del origen; (*b*) que están a 2 unidades del lugar geométrico de $x^2 + y^2 = 9$.

Soluciones

(*a*) El lugar geométrico es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 4$ [Fig. 12-25(*a*)].

(*b*) El lugar geométrico es un par de círculos cada uno a 2 unidades del círculo con centro en *O* y radio 3. Sus ecuaciones son $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 1$. [Fig. 12-25(*b*)].

12.6 ÁREAS EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

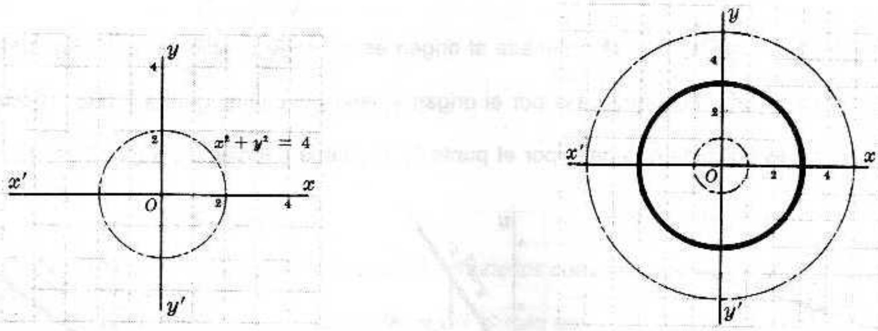
12.6A Área de un Triángulo

Si un lado de un triángulo es paralelo a cualquier eje coordenado entonces la longitud de ese lado, lo mismo que la longitud de la altura a ese lado, pueden determinarse rápidamente. En este caso la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ puede usarse directamente. Si ningún lado es paralelo a algún eje coordenado entonces, ya sea que:

1. El triángulo puede encerrarse en un rectángulo cuyos lados sí son paralelos a los ejes coordenados (Fig. 12-26), o:
2. Se pueden construir trapezoides cuyas bases sean paralelas al eje y al bajar perpendiculares al eje *x* (Fig. 12-27).

El área del triángulo puede calcularse ahora a partir de las áreas de las figuras así construidas:

1. En la figura 12-26, área($\triangle ABC$) = área(rectángulo *ADEF*) − [área($\triangle ABD$) + área($\triangle BCE$) + área($\triangle ACF$)].
2. En la figura 12-27, área($\triangle ABC$) = área(trapezoide *ABED*) + área(trapezoide *BEFC*) − área(trapezoide *DFCA*).



(a) (b)

Fig. 12-25

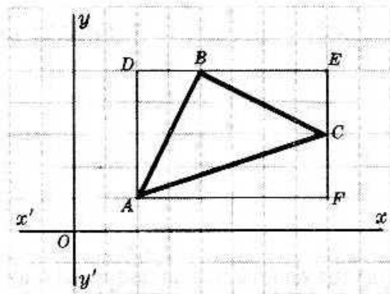


Fig. 12-26

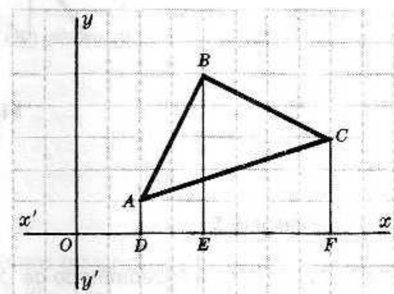


Fig. 12-27

12.6B Área de un cuadrilátero

El método del trapezoide descrito arriba puede extenderse para calcular el área de un cuadrilátero, si se conocen los vértices.

PROBLEMAS RESUELTOS

12.19 Área de un Triángulo con un Lado Paralelo a uno de los Ejes

Calcular el área de un triángulo cuyos vértices son $A(1,2)$, $B(7,2)$, $C(5,4)$.

Solución

De la gráfica del triángulo (Fig. 12-28), se tiene que $b = 7 - 1 = 6$ y que $h = 4 - 2 = 2$. Entonces $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(6)(2) = 6$.

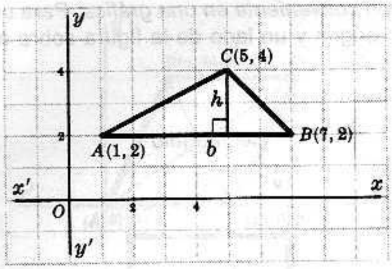


Fig. 12-28

12.20 Área de un Triángulo sin Lados Paralelos a Algún Eje

Calcule el área del $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(2,4)$, $B(5,8)$, $C(8,2)$, usando: (*a*) el método del rectángulo; (*b*) el método del trapezoide.

Soluciones

Observe la figura 12-29.

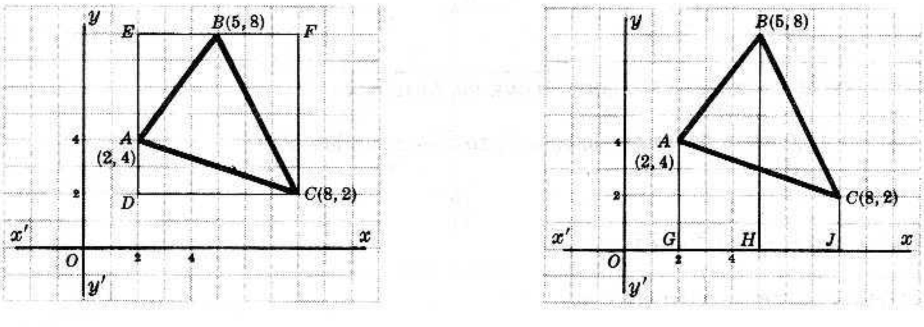


Fig. 12-29

(*a*) Área del rectángulo $DEFC = bh = 6(6) = 36$. Entonces:
Área del $\triangle DAC = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2)(6) = 6$
Área del $\triangle ABE = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(3)(4) = 6$
Área del $\triangle BCF = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(3)(6) = 9$
Por lo tanto: área($\triangle ABC$) = área($DEFC$) + área($\triangle DAC + \triangle ABE + \triangle BCF$) $= 36 - (6 + 6 + 9) = 15$.

(*b*) Área del trapezoide $ABHG = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(3)(4 + 8) = 18$.
Área del trapezoide $BCJH = \frac{1}{2}(3)(2 + 8) = 15$.
Área del trapezoide $ACJG = \frac{1}{2}(6)(2 + 4) = 18$.
Entonces: área($\triangle ABC$) = área($ABHG$) + área($BCJH$) − área($ACJG$) $= 18 + 15 - 18 = 15$.

12.7 DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS USANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA

Muchos teoremas de geometría plana pueden demostrarse con geometría analítica. El procedimiento para probar un teorema sigue dos pasos principales:

1. *Colocación de cada figura en posición conveniente en una gráfica*. Para un triángulo, un rectángulo o un paralelogramo, colóquense un vértice en el origen y un lado de la figura sobre el eje x. Indíquense las coordenadas de cada vértice (Fig. 12-30).

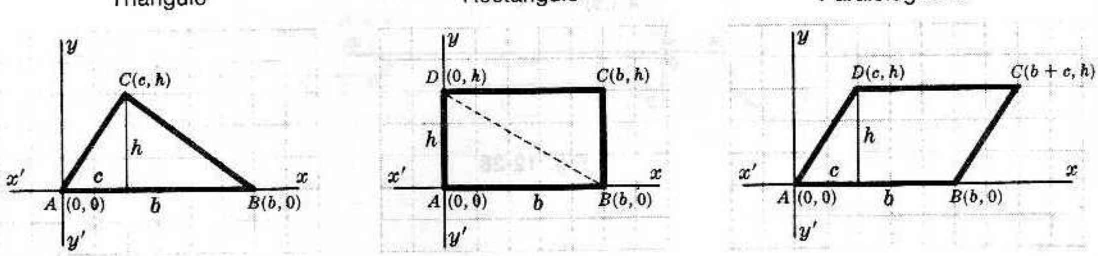


Fig. 12-30

2. *Aplicación de los principios de geometría analítica*. Por ejemplo, demuéstrese que las rectas son paralelas probando que sus pendientes son iguales; o que dos rectas son perpendiculares mediante la demostración de que sus pendientes son recíprocas negativas entre sí. Utilícese la fórmula del punto medio cuando se involucre en la demostración el punto medio de un segmento, y úsese la fórmula de distancia para evaluar la longitud de segmentos.

PROBLEMA RESUELTO

12.21 Demostración de un Teorema Mediante Geometría Analítica

Demuéstrese que las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.

Solución

Dados: $\square ABCD$, diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Demuéstrese: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan entre sí.

Plan: Úsese la fórmula del punto medio para obtener las coordenadas de los puntos medios de las diagonales.

Colóquese el $\square ABCD$ con el vértice A en el origen y el lado $\overline{AD}$ a lo largo del eje x (Fig. 12-31). Por lo tanto los vértices tienen coordenadas $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+c,b)$, $D(c,0)$.

Por la fórmula del punto medio, el punto medio de $\overline{AC}$ tiene las coordenadas $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ mientras las del punto medio de $\overline{BD}$ son $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Por lo tanto, se bisectan las diagonales ya que ambos puntos medios tienen las mismas coordenadas. En consecuencia, son un solo punto.

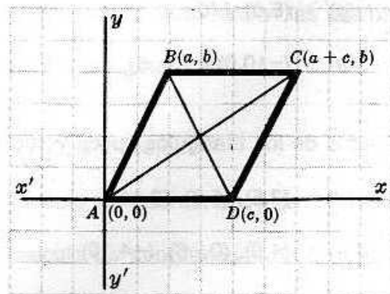


Fig. 12-31

Problemas complementarios

1. Determine las coordenadas de cada punto indicado por una letra en la figura 12-32. (12.1)

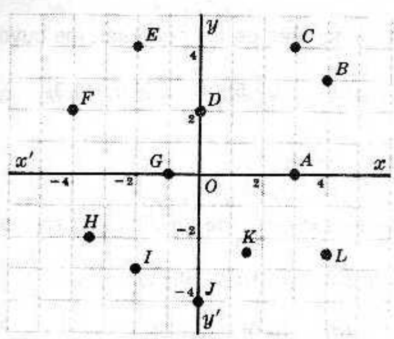


Fig. 12-32

2. Grafique cada uno de los puntos siguientes: (12.2)

$A(-2,-3)$	$C(0,-1)$	$E(3,-4)$	$G(0,3)$
$B(-3,2)$	$D(-3,0)$	$F(1\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$	$H(3\frac{1}{2},0)$

3. Grafique los siguientes puntos: $A(2,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-2)$ y $D(2,-2)$. En seguida, calcule el perímetro y el área del cuadrado $ABCD$. (12.3)

4. Grafique los puntos siguientes: $A(4,3)$, $B(-1,3)$, $C(-3,-3)$, $D(2,-3)$. En seguida, calcule el área del paralelogramo $ABCD$ y del triángulo BCD. (12.3, 12.4)

5. Calcule el punto medio del segmento que une los puntos: (12.5)

(*a*) (0,0) y (8,6)	(*e*) (−20,−5) y (0,0)	(*i*) (3,4) y (7,6)
(*b*) (0,0) y (5,7)	(*f*) (0,4) y (0,16)	(*j*) (−2,−8) y (−4,−12)

(*c*) (0,0) y (−8,12) (*g*) (8,0) y (0,−2) (*k*) (7,9) y (3,3)

(*d*) (14,10) y (0,0) (*h*) (−10,0) y (0,−5) (*l*) (2,−1) y (−2,−5)

6. Calcule los puntos medios de los lados de los triángulos cuyos vértices son: (12.5)

(*a*) (0,0), (8,0), (0,6) (*d*) (3,5), (5,7), (3,11)

(*b*) (−6,0), (0,0), (0,10) (*e*) (4,0), (0,−6), (−4,10)

(*c*) (12,0), (0,−4), (0,0) (*f*) (−1,−2), (0,2), (1,−1)

7. Calcule los puntos medios de los lados de los cuadriláteros cuyos vértices sucesivos son: (12.5)

(*a*) (0,0), (0,4), (2,10), (6,0) (*c*) (−2,0), (0,4), (6,2), (0,−10)

(*b*) (−3,5), (−1,9), (7,3), (5,−1) (*d*) (−3,−7), (−1,5), (9,0), (5,−8)

8. Calcule los puntos medios de las diagonales de los cuadriláteros cuyos vértices sucesivos son: (12.5)

(*a*) (0,0), (0,5), (4,12), (8,1) (*c*) (0,−5), (0,1), (4,9), (4,3)

(*b*) (−4,−1), (−2,3), (6,1), (2,−8)

9. Calcule el centro de un círculo si los extremos de un diámetro son los puntos: (12.5)

(*a*) (0,0) y (−4,6) (*c*) (−3,1) y (0,−5) (*e*) (a,b) y (3a,5b)

(*b*) (−1,0) y (−5,−12) (*d*) (0,0) y (2a,2b) (*f*) (a,2b) y (a,2c)

10. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, calcule las coordenadas de: (12.5)

(*a*) M si las coordenadas de A y B son A(2,5), B(6,11)

(*b*) A si las coordenadas de M y B son M(1,3), B(3,6)

(*c*) B si las coordenadas de A y M son A(−2,1), M(2,−1)

11. Los puntos de trisección de $\overline{AD}$ son B y C. Calcule las coordenadas de: (12.5)

(*a*) B si las coordenadas de A y C son A(1,2), C(3,5)

(*b*) D si las coordenadas de B y C son B(0,5), C($1\frac{1}{2}$,4)

(*c*) A si las coordenadas de B y C son B(0,6), C(2,3)

12. A(0,0), B(0,5), C(6,5), D(6,0) son los vértices del cuadrilátero $ABCD$: (12.6)

(*a*) Demostrar que $ABCD$ es un rectángulo.

(*b*) Demostrar que los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen las mismas coordenadas.

(*c*) ¿Se bisectan entre sí las diagonales? ¿Por qué?

13. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(0,0)$, $B(0,4)$ y $C(6,0)$. (12.6)

(*a*) Si $\overline{AD}$ es la mediana a $\overline{BC}$, calcule las coordenadas de D y las del punto medio de $\overline{AD}$.

(*b*) Si $\overline{CE}$ es la mediana a $\overline{AB}$, calcule las coordenadas de E y las del punto medio de $\overline{CE}$.

(*c*) ¿Se bisectan las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$? ¿Por qué?

14. Calcule la distancia entre cada una de las siguientes parejas de puntos. (12.8)

(*a*) (0,0) y (0,5) (*d*) (−6,−1) y (−6,11) (*g*) $(-3,-4\frac{1}{2})$ y $(-3,-4\frac{1}{2})$

(*b*) (4,0) y (−2,0) (*e*) (5,3) y (5,8.4) (*h*) (a,b) y $(2a,b)$

(*c*) (0,−3) y (0,7) (*f*) (−1.5,7) y (6,7)

15. Calcule las distancias, por parejas, que separan a los siguientes puntos colineales. (12.8)

(*a*) (5,−2), (5,1), (5,4) (*c*) (−4,2), (−3,2), (0,2)

(*b*) (0,−6), (0,−2), (0,12) (*d*) $(0,b)$, (a,b), $(3a,b)$

16. Calcule la distancia entre cada una de las siguientes parejas de puntos. (12.8)

(*a*) (0,0) y (5,12) (*e*) (−3,−6) y (3,2) (*i*) (3,4) y (4,7)

(*b*) (−3,−4) y (0,0) (*f*) (2,3) y (−10,12) (*j*) (−1,−1) y (1,3)

(*c*) (0,−6) y (9,6) (*g*) (2,2) y (5,5) (*k*) $(-3,0)$ y $(0,\sqrt{7})$

(*d*) (4,1) y (7,5) (*h*) (0,5) y (−5,0) (*l*) (a,0) y (0,a)

17. Demuestre que los triángulos con los vértices que se enlistan a continuación, son isósceles. (12.9)

(*a*) $A(3,5)$, $B(6,9)$, $C(2,6)$ (*c*) $G(5,-5)$, $H(-2,-2)$, $J(8,2)$

(*b*) $D(2,0)$, $E(6,0)$, $F(4,4)$ (*d*) $K(7,0)$, $L(3,4)$, $M(2,-1)$

18. ¿Cuáles de los triángulos cuyos vértices se enlistan abajo son triángulos rectángulos? (12.9)

(*a*) $A(7,0)$, $B(6,3)$, $C(12,5)$ (*c*) $G(1,-1)$, $H(5,0)$, $J(3,8)$

(*b*) $D(2,0)$, $E(5,2)$, $F(1,8)$ (*d*) $K(-4,0)$, $L(-2,4)$, $M(4,-1)$

19. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(-2,2)$, $B(4,4)$ y $C(8,2)$. Calcule la longitud de la mediana a: (*a*) $\overline{AB}$; (*b*) $\overline{AC}$; (*c*) $\overline{BC}$. (12.9)

20. (*a*) Los vértices del cuadrilátero *ABCD* son *A*(0,0), *B*(3,2), *C*(7,7), y *D*(4,5). Demuestre que *ABCD* es un paralelogramo. (12.10)

(*b*) Los vértices del cuadrilátero *DEFG* son *D*(3,5), *E*(1,1), *F*(5,3), y *G*(7,7). Demuestre que *DEFG* es un rombo.

(*c*) Los vértices del cuadrilátero *HJKL* son *H*(0,0), *J*(4,4), *K*(0,8), y *L*(−4,4). Demuestre que *HJKL* es un cuadrado.

21. Calcule el radio de un círculo cuyo centro está en: (12.11)

(*a*) (0,0) y pasa por (−6,8)
(*b*) (0,0) y pasa por (3,−4)
(*c*) (0,0) y pasa por (−5,5)
(*d*) (2,0) y pasa por (7,−12)
(*e*) (4,3) y es tangente al eje *y*
(*f*) (−1,7) y es tangente a la recta $x = -4$

22. Un círculo tiene su centro en el origen y su radio mide 10. Determine si cada uno de los puntos que se enlistan a continuación está sobre, dentro o afuera del círculo: (*a*) (6,8); (*b*) (−6,8); (*c*) (0,11); (*d*) (−10,0); (*e*) (7,7); (*f*) (−9,4); (*g*) $(9,\sqrt{19})$. (12.11)

23. Calcule la pendiente de la recta que pasa por cada una de las siguientes parejas de puntos: (12.12)

(*a*) (0,0) y (5,9)
(*b*) (0,0) y (9,5)
(*c*) (0,0) y (6,15)
(*d*) (2,3) y (6,15)
(*e*) (−2,−3) y (7,15)
(*f*) (−2,−3) y (2,1)
(*g*) (3,−4) y (5,6)
(*h*) (0,0) y (−4,8)
(*i*) (3,−9) y (0,0)
(*j*) (0,−2) y (8,10)
(*k*) (−1,−5) y (1,−7)
(*l*) (−3,−4) y (−1,−2)

24. Calcule la pendiente de la recta cuya ecuación es: (12.12)

(*a*) $y = 3x - 4$
(*b*) $y = 4x - 3$
(*c*) $y = -\frac{1}{2}x + 5$
(*d*) $y = 8 - 7x$
(*e*) $y = 5x$
(*f*) $y = 5$
(*g*) $2y = 6x - 10$
(*h*) $2y = 10x - 6$
(*i*) $3y = -12x + 6$
(*j*) $3y = 12 - 2x$
(*k*) $y + x = 21$
(*l*) $2x = 12 - y$
(*m*) $\frac{1}{5}y = x - 3$
(*n*) $\frac{1}{3}y = 2x - 6$
(*o*) $\frac{1}{4}y = 7 - x$
(*p*) $\frac{1}{4}y + 2x = 1$

25. Calcule la inclinación, hasta la última unidad en grados, de cada una de las rectas siguientes: (12.12)

(*a*) $y = 3x - 1$
(*b*) $y = \frac{1}{3}x - 1$
(*c*) $2y = 5x + 10$
(*d*) $y = \frac{2}{5}x + 5$
(*e*) $5y = 5x - 3$
(*f*) $y = -3$

26. Calcule la pendiente de una recta cuya inclinación es: (*a*) 5°; (*b*) 17°; (*c*) 20°; (*d*) 35°; (*e*) 45°; (*f*) 73°; (*g*) 85°. (12.12)

27. Calcule la inclinación, hasta las unidades en grados, de una recta cuya pendiente es (*a*) 0; (*b*) 0.4663; (*c*) 1; (*d*) 1.4281; (*e*) $\frac{1}{8}$; (*f*) $\frac{1}{2}$; (*g*) $\frac{3}{4}$; (*h*) $1\frac{1}{3}$; (*i*) $2\frac{1}{5}$. (12.12)

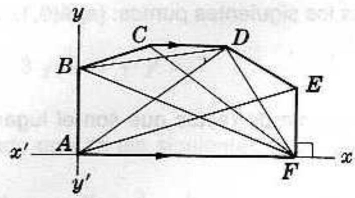


Fig. 12-33

28. En el hexágono de la figura 12-33, $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$. ¿Qué lados o diagonales tienen: (*a*) pendiente positiva; (*b*) pendiente negativa; (*c*) pendiente cero; (*d*) no tiene pendiente?

29. Calcule la pendiente de una recta que es paralela a otra cuya pendiente es: (*a*) 0; (*b*) no tiene pendiente; (*c*) 5; (*d*) −5; (*e*) 0.5; (*f*) −0.0005. (12.13)

30. Calcule la pendiente de una recta paralela a otra cuya ecuación es: (12.13)

(*a*) $y = 0$	(*c*) $x = 7$	(*e*) $y = 5x - 2$	(*g*) $3y - 6x = 12$
(*b*) $x = 0$	(*d*) $y = 7$	(*f*) $x + y = 5$	

31. Calcule la pendiente de una recta paralela a otra que pasa por (*a*) (0,0) y (2,3); (*b*) (2,−1) y (5,6); (*c*) (3,4) y (5,2); (*d*) (1,2) y (0,−4) (12.13)

32. Calcule la pendiente de una recta perpendicular a otra cuya pendiente es: (12.13)

(*a*) $\frac{1}{2}$	(*c*) 3	(*e*) 0.1	(*g*) $-\frac{4}{5}$	(*i*) 0
(*b*) 1	(*d*) $2\frac{1}{2}$	(*f*) −1	(*h*) $-3\frac{1}{4}$	(*j*) no tiene pendiente

33. Calcule la pendiente de una recta perpendicular a otra que pasa por: (*a*) (0,0) y (0,5); (*b*) (0,0) y (2,1); (*c*) (0,0) y (3,−1); (*d*) (1,1) y (3,3) (12.13)

34. En el rectángulo *DEFG*, la pendiente de $\overline{DE}$ es $\frac{2}{3}$. Calcule la pendiente de (*a*) $\overline{EF}$; (*b*) $\overline{FG}$; (*c*) $\overline{DG}$. (12.14)

35. En el ▱ *ABCD* la pendiente de $\overline{AB}$ es 1, mientras que la pendiente de $\overline{BC}$ es de $-\frac{1}{2}$. Calcule la pendiente de (*a*) $\overline{AD}$; (*b*) $\overline{CD}$; (*c*) la altura de $\overline{AD}$; (*d*) la altura de $\overline{CD}$. (12.14)

36. Los vértices del △*ABC* son *A*(0,5), *B*(3,7), *C*(5,−1). ¿Cuál es la pendiente de la altura de: (*a*) $\overline{AB}$; (*b*) $\overline{BC}$; (*c*) $\overline{AC}$? (12.14)

37. ¿En cuál de los siguientes conjuntos, los puntos son colineales: (*a*) (2,1), (4,4), (8,10); (*b*) (−1,1), (2,4), (6,8); (*c*) (1,−1), (3,4), (5,8)? (12.15)

38. ¿Para qué valores de k son colineales los siguientes puntos: (*a*) $A(0,1)$, $B(2,7)$, $C(6,k)$; (*b*) $D(-1,5)$, $E(3,k)$, $F(5,11)$; (*c*) $G(0,k)$, $H(1,1)$, $I(3,-1)$? (12.15)

39. Determine la ecuación de la recta o pareja de rectas que son el lugar geométrico de puntos tales que: (12.16)

(*a*) su abscisa es −5

(*b*) su ordenada es $3\frac{1}{2}$

(*c*) están a 3 unidades del eje x

(*d*) están a 5 unidades abajo del eje x

(*e*) están a 4 unidades del eje y

(*f*) están a 3 unidades de la recta $x = 2$

(*g*) están a 6 unidades arriba de la recta $y = -2$

(*h*) están a 1 unidad a la derecha del eje y

(*i*) son equidistantes de las rectas $x = 5$, $x = 13$

40. Determine la ecuación del lugar geométrico del centro de un círculo que: (12.18)

(*a*) es tangente al eje x en (6,0)

(*b*) es tangente al eje y en (0,5)

(*c*) es tangente a las rectas $x = 4$, $x = 8$

(*d*) pasa por el origen y por (10,0)

(*e*) pasa por (3,7) y por (9,7)

(*f*) pasa por (3,−2) y por (3,8)

41. Determine la ecuación de la recta o parejas de rectas que son el lugar geométrico de puntos tales que: (12.16)

(*a*) sus coordenadas son iguales

(*b*) su ordenada es cinco veces mayor que su abscisa

(*c*) su abscisa es cuatro veces menor que su ordenada

(*d*) su ordenada excede a su abscisa por 10 (*e*) la suma de sus coordenadas es 12

(*f*) la diferencia de sus coordenadas es 2

(*g*) son equidistantes del eje x y del eje y

(*h*) son equidistantes de $x + y = 3$ y de $x + y = 7$

42. Describa el lugar geométrico de cada una de las siguientes ecuaciones: (12.17)

(*a*) $y = 2x + 5$ (*c*) $\dfrac{y+3}{x+2} = \dfrac{5}{4}$ (*e*) $x + y = 7$

(*b*) $\dfrac{y-3}{x-2} = 4$ (*d*) $y = \frac{1}{2}x$ (*f*) $3y = x$

43. Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente de: (*a*) 4; (*b*) -2; (*c*) $\frac{3}{2}$; (*d*) $-\frac{2}{5}$; (*e*) 0 (12.17)

44. Determine la ecuación de una recta con ordenada al origen de: (12.17)

(*a*) 5 y pendiente 4.

(*b*) 2 y pendiente -3

(*c*) -1 y pendiente $\frac{1}{3}$

(*d*) 8 y es paralela a $y = 3x - 2$

(*e*) -3 y es paralela a $y = 7 - 4x$

(*f*) 0 y es paralela a $y - 2x = 8$

45. Determine la ecuación de una recta con pendiente 2 y que pasa por (*a*) (1,4); (*b*) (−2,3); (*c*) (−4,0); (*d*) (0,−7)

46. Determine la ecuación de la recta que: (12.17)

(*a*) pasa por el origen y tiene pendiente 4

(*b*) pasa por (0,3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$

(*c*) pasa por (1,2) y tiene pendiente 3.

(*d*) pasa por (−1,−2) y tiene pendiente $\frac{1}{3}$

(*e*) pasa por el origen y es paralela a una recta con pendiente 2

47. (*a*) Describa el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 = 49$ (12.18)

(*b*) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos que están a 4 unidades del origen.

(*c*) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos a 3 unidades del lugar geométrico de $x^2 + y^2 = 25$.

48. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos a 5 unidades de: (*a*) el origen; (*b*) el círculo $x^2 + y^2 = 16$; (*c*) el círculo $x^2 + y^2 = 49$. (12.18)

49. ¿Cuál es el radio de un círculo cuya ecuación es: (*a*) $x^2 + y^2 = 9$; (*b*) $x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$; (*c*) $9x^2 + 9y^2 = 36$; (*d*) $x^2 + y^2 = 3$? (12.18)

50. Determine la ecuación del círculo con centro en el origen y cuyo radio es: (*a*) 4; (*b*) 11; (*c*) $\frac{2}{9}$; (*d*) $1\frac{1}{2}$; (*e*) $\sqrt{5}$; (*f*) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. (12.18)

51. Calcule el área del $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(0,0)$ y: (12.19)

(*a*) $B(0,5)$ y $C(4,5)$ (*c*) $B(0,8)$ y $C(-5,8)$ (*e*) $B(6,2)$ y $C(7,0)$

(*b*) $B(0,5)$ y $C(4,2)$ (*d*) $B(0,8)$ y $C(-5,12)$ (*f*) $B(6,-5)$ y $C(10,0)$

52. Calcule el área de: (12.19)

(*a*) un triángulo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(3,4)$ y $C(8,0)$

(*b*) un triángulo cuyos vértices son $D(1,1)$, $E(5,6)$ y $F(1,7)$

(*c*) un rectángulo con vértices adicionales $H(2,2)$, $J(2,6)$ y $K(7,2)$

(*d*) un paralelogramo con vértices adicionales $L(3,1)$, $M(9,1)$ y $P(5,5)$.

53. Calcule el área del $\triangle DEF$ cuyos vértices son $D(0,0)$ y: (*a*) $E(6,4)$, $F(8,2)$; (*b*) $E(3,2)$ y $F(6,-4)$; (*c*) $E(-2,3)$ y $F(10,7)$ (12.20)

54. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son: (*a*) (0,0), (2,3) y (4,1); (*b*) (1,1), (7,3) y (3,6); (*c*) (−1,2),(0,−2) y (3,1). (12.20)

55. Los vértices del $\triangle ABC$ son $A(2,1)$, $B(8,9)$ y $C(5,7)$. (*a*) Calcule el área del $\triangle ABC$. (*b*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$. (*c*) Calcule la longitud de la altura a $\overline{AB}$. (12.20)

56. Calcule el área del cuadrilátero cuyos vértices son: (*a*) (3,3), (10,4), (8,7) y (5,6); (*b*) (0,4), (5,8), (10,6) y (14,0); (*c*) (0,1), (2,4), (8,10) y (12,2) (12.20)

57. Calcule el área del cuadrilátero formado por las rectas: (12.19)

(*a*) $x = 0, x = 5, y = 0, y = 6$

(*b*) $x = 0, x = 7, y = -2, y = 5$

(*c*) $x = -3, x = 5, y = 3, y = -8$

(*d*) $x = 0, x = 6, y = 0, y = x + 1$

(*e*) $y = 0, y = 4, y = x, y = x + 4$

(*f*) $y = 0, y = 2x, y = 2x + 6$

58. Demuestre cada uno de los incisos siguientes mediante el uso de los principios de geometría analítica:(12.21)

(*a*) un segmento de recta que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado.

(*b*) las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

(*c*) la mediana a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a la base.

(*d*) la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

(*e*) si los puntos medios de los lados de un rectángulo tomados es sucesión se unen, entonces el cuadrilátero formado es un rombo.

(*f*) en un triángulo rectángulo, la longitud de la mediana a la hipotenusa es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

13

Desigualdades y razonamiento indirecto

13.1 DESIGUALDADES

Una desigualdad es una proposición de que las cantidades no son iguales. Si dos cantidades son desiguales, la primera es mayor o menor que la otra. Los símbolos para desigualdad son: $\neq$, que significa distinto de; $>$ que significa mayor que; y $<$ que significa menor que. Así, $4 \neq 3$ se lee como "cuatro es distinto de 3"; $7 > 2$ se lee como "siete es mayor que dos"; y $1 < 5$ se lee como "uno es menor que 5"

Dos desigualdades pueden ser del mismo orden o de orden opuesto. En desigualdades del mismo orden, se utiliza el mismo símbolo de desigualdad; en desigualdades de orden opuesto, se utilizan símbolos de desigualdad opuestos. Así, $5 > 3$ y $10 > 7$ son desigualdades del mismo orden; $5 > 3$ y $7 < 10$ son desigualdades de orden opuesto.

Las desigualdades del mismo orden pueden combinarse de la siguiente manera. Las desigualdades $x < y$ y $y < z$ pueden combinarse como $x < y < z$, lo que indica que y es mayor que x y menor que z. Las desigualdades $a > b$ y $b > c$ pueden combinarse como $a > b > c$, lo que indica que b es menor que a y mayor que c.

13.1A Axiomas de desiguadad

Los *axiomas* son proposiciones que se aceptan como verdaderas sin necesidad de demostración y que se utilizan de la misma manera que los teoremas.

Axioma 1: *una cantidad puede ser sustituida por su igual en cualquier desigualdad.*

Así, si $x > y$ y $y = 10$, entonces $x > 10$.

Axioma 2: *si la primera de tres cantidades es mayor que la segunda, y la segunda es mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera.*

Así, si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$.

Axioma 3: *el todo es mayor que cualquiera de sus partes.*

Así, $AB > AM$ y $m\angle BAD > m\angle BAC$ en la figura 13-1.

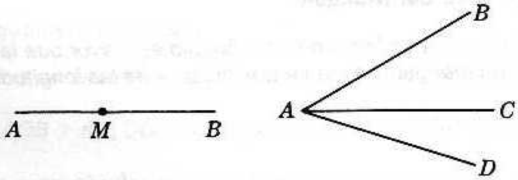


Fig. 13-1

13.1B Axiomas de desigualdades de operaciones

Axioma 4: *si iguales se suman a desiguales, las sumas son desiguales del mismo orden.*

Como $5 > 4$ y $4 = 4$, se sabe que $5 + 4 > 4 + 4$ (o $9 > 8$). Si $x - 4 < 5$, entonces $x - 4 + 4 < 5 + 4$ o $x < 9$.

Axioma 5: *si desiguales se suman a desiguales del mismo orden, las sumas son desiguales del mismo orden.*

Como $5 > 3$ y $4 > 1$, se tiene $5 + 4 > 3 + 1$ (o $9 > 4$). Si $2x - 4 < 5$ y $x + 4 < 8$, entonces $2x - 4 + x + 4 < 5 + 8$ o $3x < 13$.

Axioma 6: *si iguales se sustraen de desiguales, las diferencias son desiguales del mismo orden.*

Como $10 > 5$ y $3 = 3$, se tiene $10 - 3 > 5 - 3$ (o $7 > 2$). Si $x + 6 < 9$ y $6 = 6$, entonces $x + 6 - 6 < 9 - 6$ o $x < 3$.

Axioma 7: *si desiguales se sustraen de iguales, las diferencias son desiguales de orden opuesto.*

Como $10 = 10$ y $5 > 3$, se tiene $10 - 5 < 10 - 3$ (o $5 < 7$). Si $x + y = 12$ y $y > 5$, entonces $x + y - y < 12 - 5$ o $x < 7$.

Axioma 8: *si desiguales se multiplican por el mismo número positivo, los productos son desiguales del mismo orden.*

Así, si $\frac{1}{4}x < 5$, entonces $4(\frac{1}{4}x) < 4(5)$ o $x < 20$.

Axioma 9: *si desiguales se multiplican por el mismo número negativo, los resultados son desiguales de orden opuesto.*

Así, si $\frac{1}{2}x < 5$, entonces $(-2)(\frac{1}{2}x) > (-2)(5)$ o $(-x > -10$ o $x < 10$.

Axioma 10: *si desiguales se dividen entre el mismo número positivo, los resultados son desiguales del mismo orden.*

Así, si $4x > 20$, entonces $\frac{4x}{4} > \frac{20}{4}$ o $x > 5$.

Axioma 11: *si desiguales se dividen entre el mismo número negativo, los resultados son desiguales de orden opuesto.*

Así, si $-7x < 42$, entonces $\frac{-7x}{-7} > \frac{42}{-7}$ o $x > -6$.

13.1C Postulado de desigualdad

Postulado 1: *la longitud de un segmento de línea es la distancia más corta entre dos puntos.*

13.1D Teoremas sobre la desigualdad del triángulo

Principio 1: *la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.* (Corolario: *la longitud del lado más corto de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y mayor que su diferencia.*)

Así, en la figura 13-2, $BC + CA > AB$.

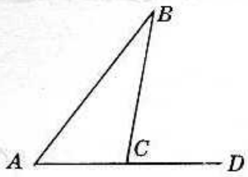


Fig. 13-2

Principio 2: *en un triángulo, un ángulo exterior es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente al exterior.*
Así, en la figura 13-2, $m\angle BCD > m\angle BAC$ y $m\angle BCD > m\angle ABC$.

Principio 3: *si las longitudes de dos lados de un triángulo son desiguales, los ángulos opuestos a estos lados son desiguales, siendo el ángulo mayor opuesto al lado mayor.* (Corolario: *el ángulo mayor de un triángulo es opuesto al lado mayor.*)
Así, en la figura 13-2, si $BC > AC$, entonces $m\angle A > m\angle B$.

Principio 4: *si dos ángulos de un triángulo son desiguales, las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos son desiguales, siendo el lado mayor opuesto al ángulo mayor.* (Corolario: *el lado mayor de un triángulo es opuesto al ángulo mayor.*)
Así, en la figura 13-2, si $m\angle A > m\angle B$, entonces $BC > AC$.

Principio 5: *la perpendicular desde un punto a una línea es el segmento más corto desde el punto a la línea.*
Así, en la figura 13-3, si $\overline{PC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PD}$ es cualquier otra línea desde P a $\overline{AB}$, entonces $PC < PD$.

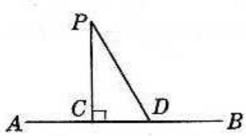


Fig. 13-3

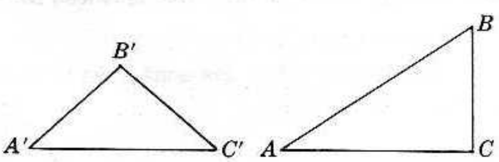


Fig. 13-4

Principio 6: *si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, el triángulo que tiene el ángulo mayor tiene el tercer lado mayor.*

Así, en la figura 13-4, si $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, y $m\angle C > m\angle C'$, entonces $AB > A'B'$.

Principio 7: *si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, el triángulo que tiene el tercer lado tiene el ángulo mayor opuesto a este lado.*

Así, en la figura 13-4, si $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, y $AB > A'B'$, entonces $m\angle C > m\angle C'$.

13.1E Teoremas sobre la desigualdad del círculo

Principio 8: *en el mismo círculo o en círculos iguales, al mayor ángulo central le corresponde el mayor arco.*

Así, en la figura 13-5, si $m\angle AOB > m\angle COD$, entonces $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{CD}$.

Principio 9: *en el mismo círculo o en círculos iguales, al mayor arco le corresponde el mayor ángulo central* (éste es el converso del principio 8).

Así, en la figura 13-5, si $m\widehat{AB} > m\widehat{CD}$, entonces $m\angle AOB > m\angle COD$.

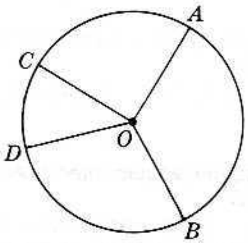


Fig. 13-5

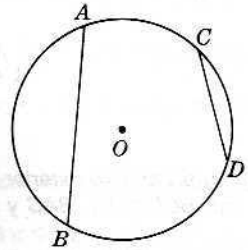


Fig. 13-6

Principio 10: *en el mismo círculo o en círculos iguales, a la mayor cuerda le corresponde el mayor arco menor.*

Así, en la figura 13-6, si $AB > CD$, entonces $m\widehat{AB} > m\widehat{CD}$.

Principio 11: *en el mismo círculo o en círculos iguales, al mayor arco menor le corresponde la mayor cuerda* (éste es el converso del principio 10).

Así, en la figura 13-6, si $m\widehat{AB} > m\widehat{CD}$, entonces $AB > CD$.

Principio 12: *en el mismo círculo o en círculos iguales, la cuerda mayor está a la menor distancia del centro.*

Así, en la figura 13-7, si $AB > CD$, entonces $OE < OF$.

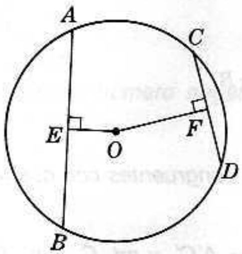


Fig. 13-7

Principio 13: *en el mismo círculo o en círculos iguales, la cuerda que está a la menor distancia del centro es la cuerda mayor.* (Éste es el converso del principio 12.)

Así, en la figura 13-7, si $OE < OF$, entonces $AB > CD$.

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1 Elección de símbolos de desigualdad

Determine el símbolo de desigualdad, > o <, que hace verdaderas las siguientes:

(*a*) 5 __?__ 3 (*c*) −5 __?__ 3 *e*) Si $x = 3$, entonces x^2 __?__ x.

b) 6 __?__ 9 (*d*) −5 __?__ −3 (*f*) Si $x > 10$, entonces 10 __?__ x.

Soluciones

(*a*) > (*b*) < (*c*) < (*d*) < (*e*) > (*f*) <

13.2 Aplicación de Axiomas Sobre Desigualdades

Complete cada una de las siguientes proposiciones:

(*a*) Si $a > b$ y $b > 8$, entonces a __?__ 8.

(*b*) Si $x > y$ $y = 15$, entonces x __?__ 15.

(*c*) Si $c < 20$ y $d < 5$, entonces $c + d$ __?__ 25.

(*d*) Si $x > y$ y $y > 6$, entonces x __?__ y __?__ 6.

(*e*) Si $x > y$, entonces $\frac{1}{2}x$ __?__ $\frac{1}{2}y$.

(*f*) Si $e < \frac{1}{4}f$, entonces $4e$ __?__ f.

(*g*) Si $-y < z$, entonces y __?__ $-x$.

(*h*) Si $-4x > p$, entonces x __?__ $-\frac{1}{4}p$.

(*i*) Si Paul y Jack tienen la misma cantidad de dinero y Paul gasta más que Jack, entonces Paul tendrá __?__ que Jack.

(*j*) Si Anne es ahora mayor que Helen, entonces hace 10 años Anne era __?__ que Helen.

Soluciones

(*a*) >	(*c*) <	(*e*) >	(*g*) >	(*i*) menos
(*b*) >	(*d*) >,>	(*f*) <	(*h*) <	(*j*) mayor

13.3 Aplicación de Teoremas Sobre la Desigualdad del Triángulo (Fig. 13-8)

(*a*) Determine los valores enteros que puede tener la longitud del lado *a* de un triángulo si los otros dos lados tienen longitudes 3 y 7.

(*b*) Determine cuál es el mayor lado de un triángulo si dos ángulos miden 59° y 60°.

(*c*) Determine cuál es el mayor lado del paralelogramo *ABCD* si *E* es el punto medio de las diagonales y $m\angle AEB > m\angle AED$.

Soluciones

(*a*) Como *a* debe ser menor que $3 + 7 = 10$ y mayor que $7 - 3 = 4$, *a* puede tener los valores enteros de 5, 6, 7, 8, 9.

(*b*) Como $m\angle B = 59°$ y $m\angle C = 60°$, $m\angle A = 180° - (59° + 60°) = 61°$. Ahora bien, el lado mayor es opuesto al ángulo mayor, $\angle A$, de modo que el lado mayor es *BC*.

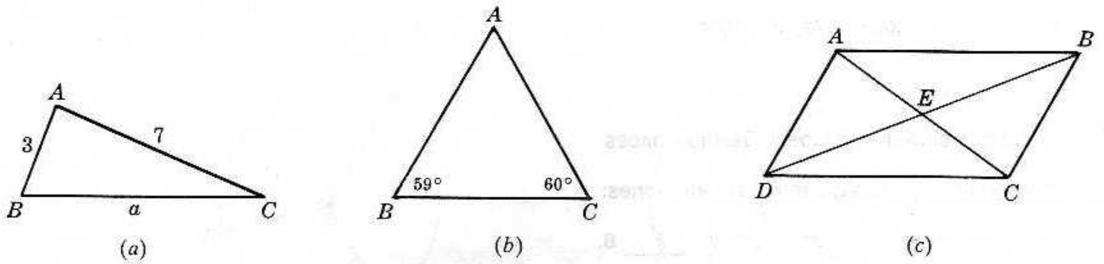


Fig. 13-8

(c) En el $\square ABCD$, $AE = CE$ y $DE = EB$. Como $m\angle AEB > m\angle AED$, $AB > AD$ o AB ($= DC$) es el lado mayor. (Principio 6)

13.4 Aplicación de Teoremas Sobre la Desigualdad del Círculo

En la figura 13-9, compare

(a) OD y OF si $\angle C$ es el ángulo más grande del $\triangle ABC$

(b) AC y BC si $m\widehat{AC} > m\widehat{BC}$

(c) $m\widehat{BC}$ y $m\widehat{AC}$ si $OF > OE$

(d) $m\angle AOB$ y $m\angle BOC$ si $m\widehat{AB} > m\widehat{BC}$

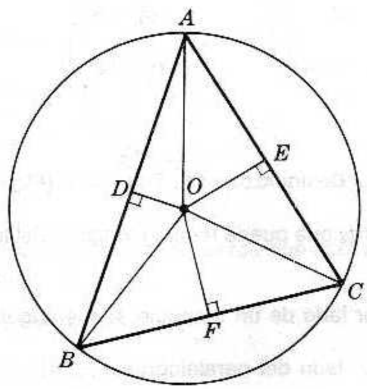


Fig. 13-9

Soluciones

(a) Como $\angle C$ es el mayor ángulo del triángulo, $\overline{AB}$ es el mayor lado, o $AB > BC$; por lo que $OD < OF$ por el principio 12.

(b) Como $m\widehat{AC} > m\widehat{BC}$, $AC > BC$, al mayor arco le corresponde la mayor cuerda.

(*c*) Como $OF > OE$, $BC < AC$ por el principio 13; por lo que $m\widehat{BC} < m\widehat{AC}$ por el principio 10.

(*d*) Como $m\widehat{AB} > m\widehat{BC}$, $m\angle AOB > m\angle BOC$, al mayor arco le corresponde el mayor ángulo central.

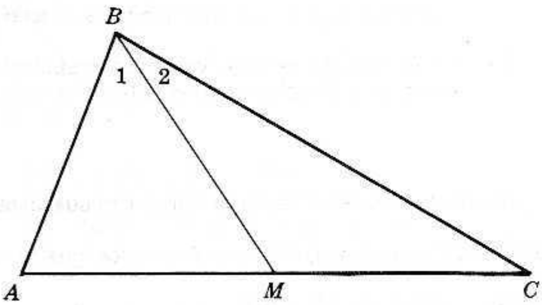
13.5 Resolución de un Problema Sobre Desigualdades

Demuestre que en el $\triangle ABC$, si M es el punto medio de $\overline{AC}$ y $BM > AM$, entonces $m\angle A + m\angle C\ m\angle B$.

Dados: $\triangle ABC$, M es el punto medio de AC.
$BM > AM$

Demuestre que: $m\angle A + m\angle C > m\angle B$

Plan: demuestre $m\angle A > m\angle 1$ y $m\angle C > m\angle 2$ y después sume desiguales.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. M es el punto medio de $\overline{AC}$	1. Dado
2. $\overline{AM} \cong \overline{MC}$	2. Un punto medio divide a una línea en dos partes congruentes
3. $BM > AM$	3. Dado
4. $BM > MC$	4. Una cantidad puede ser sustituida por su igual en cualquier desigualdad. Definición de segmentos congruentes.
5. En el $\triangle AMB$, $m\angle A > \angle 1$ En el $\triangle BMC$, $m\angle C > \angle 2$	5. En un triángulo, el mayor ángulo está opuesto al mayor lado.
6. $m\angle A + m\angle C > m\angle B$	6. Si desiguales se suman a iguales, las sumas son desiguales del mismo orden

13.2 RAZONAMIENTO INDIRECTO

Muchas veces se llega a una conclusión correcta por medio de razonamiento *indirecto*. En esta forma de razonamiento, se llega a la conclusión correcta eliminando todas las conclusiones posibles excepto una. La posibilidad restante debe ser la correcta. Supóngase que se dan los años 1492, 1809 y 1990 y se asegura que en uno de estos años nació un presidente de Estados Unidos. Eliminando a 1492 y a 1990 por imposibles, se sabe por medio del razonamiento indirecto, que 1809 es la respuesta correcta. (Si se hubiera sabido que Lincoln nació en 1809, el razonamiento hubiera sido directo.)

Cuando se demuestra un teorema por medio del razonamiento indirecto, se puede eliminar una conclusión posible si se supone que ésta es verdadera y este supuesto resulta en una contradicción de algún hecho dado conocido.

PROBLEMAS RESUELTOS

13.6 Aplicación del Razonamiento Indirecto en Situaciones Reales

Explique cómo se puede utilizar el razonamiento indirecto en cada una de las siguientes situaciones:

(*a*) Un detective determina quién es el asesino de una persona.

(*b*) Un bibliotecario determina qué volumen de un conjunto de libros está en uso.

Soluciones

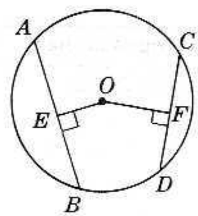
(*a*) El detective, utilizando una lista de todos los sospechosos de asesinato en el caso, elimina a todos excepto uno. Concluye que el que queda es el asesino.

(*b*) El bibliotecario localiza, viendo en los estantes y revisando los registros, todos los libros del conjunto excepto uno. Concluye que el faltante es el que está en uso.

13.7 Demostración de un Teorema Sobre Desigualdades por el Método Indirecto

Demuestre que en el mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas desiguales están a distancias desiguales del centro.

Dado: círculo O, $\overline{AB} \neq \overline{CD}$
$\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OF} \perp \overline{CD}$
Demuestre que: $OE \neq OF$
Plan: suponga que la otra conclusión posible $OE = OF$ es verdadera, y llegue a una contradicción



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Cualquier $OE = OF$ u $OE \neq OF$.	1. Dos cantidades son iguales o son distintas.
2. Suponga que $OE = OF$.	2. Ésta es una de las conclusiones posibles.
3. Si $OE = OF$, entonces $AB = CD$.	3. En el mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas que distan del centro distancias iguales son iguales.
4. Pero $AB \neq CD$	4. Dado
5. El supuesto $OE = OF$ no es válido	5. No conduce a una contradicción
6. Por lo que $OE \neq OF$.	6. Ésta es la única posibilidad restante

Problemas complementarios

1. Determine qué símbolo de desigualdad, > o <, hace verdadera cada una de las siguientes:

(*a*) Si $y > 15$, entonces 15 __?__ y.

(*b*) Si $x = 2$, entonces $3x - 1$ __?__ 4.

(*c*) Si $x = 2$ y $y = 3$, entonces xy __?__ 5.

(*d*) Si $a = 4$ y $b = \frac{1}{4}$, entonces a/b __?__ 15.

(*e*) Si $a = 5$, entonces a^2 __?__ $4a$.

(*f*) Si $b = \frac{1}{2}$, entonces b^2 __?__ b.

2. Complete cada uno de los siguientes enunciados: (13.2)

(*a*) Si $y > x$ y $x = z$, entonces y ___?___ z.

(*b*) Si $a + b > c$ y $b = d$, entonces $a + d$ ___?___ c.

(*c*) Si $a < b$ y $b < 15$, entonces a ___?___ 15.

(*d*) Si $z > y$, $y > x$, y $x = 10$, entonces z ___?___ 10.

3. Complete cada uno de los siguientes enunciados acerca de la figura 13-10: (13.2)

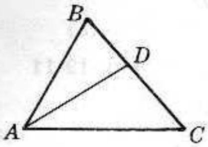


Fig. 13-10

(*a*) BC ___?___ BD

(*b*) $m\angle BAD$ ___?___ $m\angle BAC$

(*c*) $\triangle ADC$ ___?___ $\triangle ABC$

(*d*) Si $m\angle A = m\angle C$, entonces AB ___?___ BD.

4. Complete cada uno de los siguientes enunciados: (13.2)

(*a*) Si Mary y Ann reciben semanalmente el mismo salario y Mary va a recibir un aumento mayor que Ann, entonces Mary ganará ___?___ que lo que gana Ann.

(*b*) Si Berenice, que tiene el mismo peso que Helen, baja de peso más que Helen, entonces Berenice pesará ___?___ de lo que pesa Helen.

5. Complete cada uno de los siguientes enunciados: (13.2)

(*a*) Si $a > 3$, entonces $4a$ ___?___ 12.

(*b*) Si $x - 3 > 15$, entonces x ___?___ 18.

(*c*) Si $3x < 18$, entonces x ___?___ 6.

(*d*) Si $f > 8$, entonces $f + 7$ ___?___ 15.

(*e*) Si $x = y$, entonces $x + 5$ ___?___ $y + 6$.

(*f*) Si $g = h$, entonces $g - 10$ ___?___ $h - 9$.

6. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de números puede representar las longitudes de los lados de un triángulo? (13.3)

(*a*) 3, 4, 8 (*b*) 5, 7, 12 (*c*) 3, 4, 6 (*d*) 2, 7, 8 (*e*) 50, 50, 5

7. ¿Qué valores enteros puede tener la longitud del tercer lado de un triángulo si dos lados tienen longitudes (*a*) 2 y 6; (*b*) 3 y 8; (*c*) 4 y 7; (*d*) 4 y 6; (*e*) 4 y 5; (*f*) 7 y 7? (13.3)

8. En la figura 13-11, ordene, en forma descendente, (*a*) los ángulos del $\triangle ABC$; (*b*) los lados del $\triangle DEF$; (*c*) los ángulos 1, 2 y 3. (13.3)

9. (*a*) En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura 13-12, compare $m\angle BAC$ y $m\angle ACD$ si $AB = CD$ y $BC > AD$.

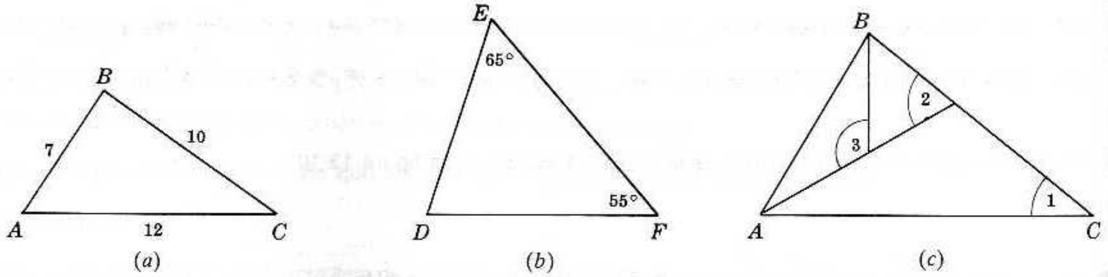


Fig. 13-11

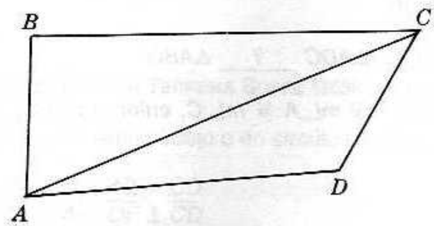


Fig. 13-12

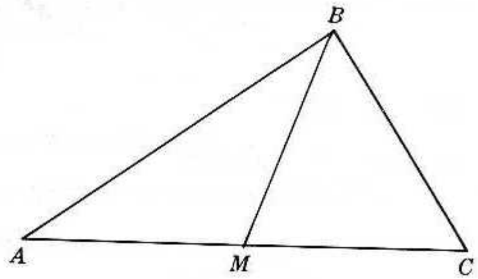


Fig. 13-13

(b) En el $\triangle ABC$ de la figura 13-13, compare AB y BC si $\overline{BM}$ es la mediana sobre $\overline{AC}$ y $m\angle AMB > m\angle BMC$. (13.3)

10. Ordene en forma descendente, (13.4)

(a) Los lados del $\triangle ABC$ en la figura 13-14

(b) Los ángulos centrales AOB, BOC, y AOC de la figura 13-14

(c) Los lados del trapezoide $ABCD$ en la figura 13-15

(d) Las distancias de los lados del $\triangle DEF$ al centro en la figura 13-16

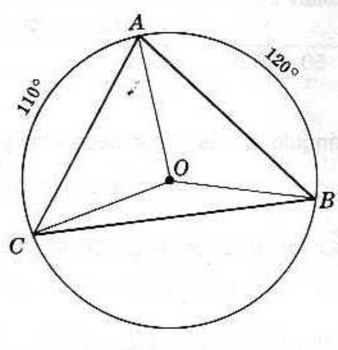


Fig. 13-14

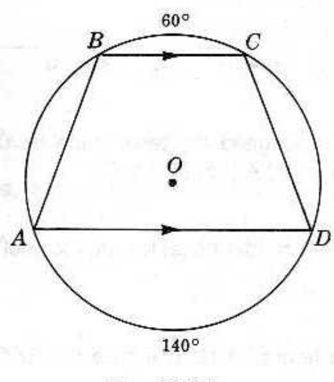


Fig. 13-15

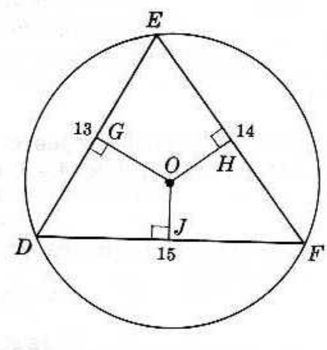
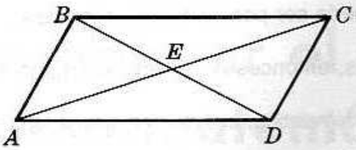


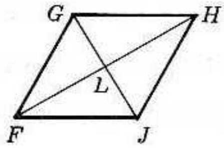
Fig. 13-16

11. Demuestre lo solicitado en la figura 13-17. (13.5)

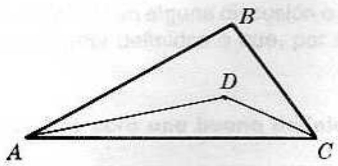
(*a*) **Dado:** paralelogramo $ABCD$
$AC > BD$
Demuéstrese: $m\angle BDA > m\angle CAD$



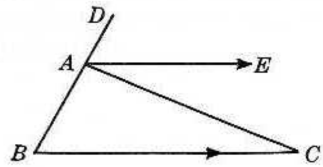
(*b*) **Dado:** Rombo $FGHJ$
$m\angle G > m\angle F$
Demuéstrese: $FL > GL$



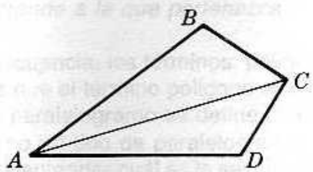
(*c*) **Dado:** $\overline{AD}$ bisectriz de $\angle A$
$\overline{CD}$ bisectriz de $\angle C$, $AB > BC$
Demuéstrese: $AD > CD$



(*d*) **Dado:** $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BC}$
$m\angle DAE > m\angle EAC$
Demuéstrese: $AC > AB$



(*e*) **Dado:** cuadrilátero $ABCD$
$AB > BC$, $AD > CD$
Demuéstrese: $m\angle C > m\angle A$



(*f*) **Dado:** $AB = AC$
Demuéstrese: $BD > CD$

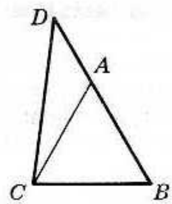


Fig. 13-17

12. Explique cómo se utiliza el razonamiento indirecta en cada una de las siguientes situaciones. (13.6)

(*a*) Una persona determina cuál de sus corbatas tomó prestada su compañero de cuarto.

(*b*) Una niña determina que el motor eléctrico de su tren no está defectuoso a pesar de que su tren de juguete no funciona.

(*c*) Un profesor identifica cuál de sus estudiantes no hizo la tarea asignada.

(*d*) Un mecánico encuentra la razón por la que el acumulador de un automóvil no funciona.

(*e*) Una persona acusada de un crimen prueba su inocencia por medio de una coartada.

13. Demuestre cada uno de los siguientes: (13.7)

(*a*) Los ángulos en la base de un triángulo isósceles no pueden ser ángulos rectos.

(*b*) Un triángulo escaleno no puede tener dos ángulos congruentes.

(*c*) La mediana sobre la base de un triángulo escaleno no puede ser perpendicular a la base.

(*d*) Si las diagonales de un paralelogramo no son congruentes, entonces no es un rectángulo.

(*e*) Si una diagonal de un paralelogramo no bisecta un ángulo del vértice, entonces el paralelogramo no es un rombo.

(*f*) Si dos ángulos de un triángulo son distintos, los lados opuestos a éstos son distintos, siendo el lado mayor opuesto al ángulo mayor.

14

Para mejorar el discurso matemático

14.1 DEFINICIONES

A la pregunta: "¿Era Lincoln un hombre educado?" no se le puede dar una respuesta adecuada a menos que se esté de acuerdo con el significado de la frase "un hombre educado". No es posible la existencia de comprensión y por ende es imposible progresar en alguna discusión o en la resolución de algún problema a menos que los términos involucrados estén adecuadamente definidos o que, por acuerdo, permanezcan sin definir.

14.1A Requisitos para una buena definición

Principio 1: *Todos los términos en una definición deberán estar definidos previamente* (*o que sean aquellos que, por acuerdo, se dejen indefinidos*).

Así, si se va a definir un polígono regular como un polígono equilátero y equiangular, es necesario que hayan sido previamente definidos los términos polígono, equiangular y equilateral.

Principio 2: *El término que se esté definiendo deberá colocarse dentro de la clase, conjunto o categoría inmediatamente más grande a la que pertenezca.*

En consecuencia, los términos: polígono, cuadrilátero, paralelogramo y rectángulo deben ser definidos en ese orden. Una vez que el término polígono está definido, se define en seguida al término cuadrilátero como una especie de polígono. Un paralelogramo se define como una especie de cuadrilátero, hasta que finalmente, el término rectángulo se define como un tipo de paralelogramo.

Se puede entender cuál es la secuencia adecuada en una definición mediante el uso de un círculo para representar un conjunto de objetos. En la figura 14-1, el conjunto de rectángulos está contenido dentro del conjunto inmediatamente más grande de los paralelogramos. A su vez, el conjunto de los paralelogramos está contenido en el conjunto inmediatamente más grande de los cuadriláteros y así sucesivamente hasta que, al fin, el de los cuadriláteros esté contenido en el conjunto inmediatamente mayor de los polígonos.

Fig. 14-1

Principio 3: *El término que se está definiendo deberá distinguirse entre todos los demás miembros de su clase.*

Por lo tanto, la definición de un triángulo como un polígono de tres lados es una buena definición porque muestra cómo un triángulo se distingue de todos los demás polígonos.

Principio 4: *Las características distintivas de un término que se está definiendo deberán ser las menos posibles.*

De esta manera, un triángulo rectángulo deberá definirse como un triángulo con un ángulo recto y no como un triángulo con un ángulo recto y dos ángulos agudos adicionales.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1 Secuencia adecuada en una Definición

¿En qué orden deben definirse los términos de los conjuntos siguientes?: (*a*) inglés, europeo, londinense; (*b*) cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, paralelogramo.

Respuestas

(*a*) Europeo, inglés, londinense.

(*b*) Cuadrilátero, paralelogramo, rectángulo, cuadrado.

14.2 Corrección de Definiciones Defectuosas

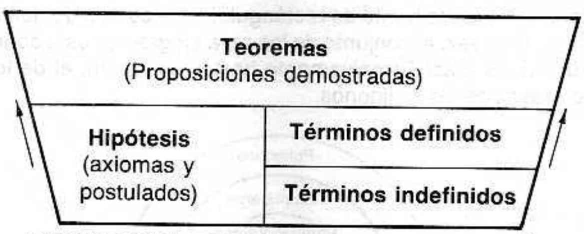
Corregir la siguiente definición: un trapezoide es un cuadrilátero con dos lados paralelos.

Solución

Esta definición es incompleta. La definición correcta es "un trapezoide es un cuadrilátero con sólo dos lados paralelos". Así, esta definición distingue un trapezoide de un paralelogramo.

14.2 RAZONAMIENTO DEDUCTIVO EN GEOMETRÍA

Los tipos de términos y proposiciones que se discuten en esta sección comprenden a la estructura deductiva en geometría; éstos pueden observarse en la figura 14-2.



ESTRUCTURA DEDUCTIVA DE LA GEOMETRÍA

Fig. 14-2

14.2A Términos definidos y no definidos

Punto, línea y superficie son los términos en geometría que por acuerdo no están definidos. Estos términos no definidos son el comienzo del proceso de definición en geometría y se encuentran contenidos de manera implícita en las definiciones de todos los demás términos geométricos.

Es así como es posible definir a un triángulo en términos de un polígono, a un polígono en términos de una figura geométrica y a ésta en términos de segmentos o partes de líneas. Sin embargo, este proceso de definición no puede continuarse todavía más, ya que el término línea no está definido.

14.2B Hipótesis

Los postulados y los axiomas son las proposiciones en geometría que no se demuestran. Se llaman hipótesis porque se aceptan como verdaderas. Estas hipótesis nos permiten comenzar con el proceso de demostración, de la misma forma que los términos indefinibles (no definidos) permiten el acceso al proceso de definición.

Así, cuando se dibuja un segmento de línea entre dos puntos, se justifica esto usando como argumento el postulado "dos puntos determinan una y sólo una línea recta". Este argumento es una hipótesis, dado que se supone cierto sin requerir de justificaciones ulteriores.

14.2C Teoremas

Los teoremas son las proposiciones que son demostradas en geometría. Al utilizar definiciones e hipótesis como argumentos, se deducen o demuestran teoremas que son básicos. Al usar teoremas para demostrar otros teoremas se enriquece el proceso de deducción. Sin embargo, si un teorema nuevo se utiliza para demostrar otro previo, se viola la secuencia lógica del discurso matemático.

Por ejemplo, el teorema "la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°", se usa para demostrar el teorema "la suma de las medidas de los ángulos de un pentágono es de 540°". Éste, a su vez, nos permite demostrar que "cada ángulo en un pentágono regular mide 108°". Sin embargo, se violaría la secuencia lógica si se intentara usar este último teorema para demostrar cualquiera de los dos primeros.

14.3 EL CONVERSO, EL INVERSO Y EL CONTRAPOSITIVO DE UNA PROPOSICIÓN

Definición 1: *el converso de una proposición es otra proposición que se forma intercambiando la hipótesis y la conclusión de la primera.*

El converso de la proposición "los leones son animales salvajes" es "los animales salvajes son leones". Nótese que el converso no es necesariamente cierto.

Definición 2: *el negativo de la proposición es la negación de la misma.*

El negativo de la proposición "un ladrón es un criminal" es "un ladrón no es un criminal".

Definición 3: *el inverso de una proposición se forma mediante la negación tanto de la hipótesis como de la conclusión.*

El inverso de la proposición "un ladrón es un criminal" es "quien no es ladrón no es un criminal". Nótese que el inverso no necesariamente es verdadero.

Definición 4: *la contrapositiva de una proposición se forma intercambiando el negativo de una hipótesis con el negativo de la conclusión. Por lo tanto, la contrapositiva es el converso de la inversa y también la inversa del converso.*

De esta manera, la contrapositiva de la proposición "si usted vive en la ciudad de Nueva York, entonces vive en el estado de Nueva York" es "si usted no vive en el estado de Nueva York, entonces no vive en la ciudad de Nueva York". Nótese que ambas proposiciones son ciertas.

14.3A Principios sobre el converso, el inverso y la contrapositiva

Principio 1: *una proposición se considera falsa si existe por lo menos un ejemplo falso de la misma.*

Principio 2: *el converso de una definición es verdadero.*

La definición "un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados" y su converso "un polígono de cuatro lados es un cuadrilátero" son ciertos.

Principio 3: *el converso de una proposición verdadera, con excepción del de una definición, no es necesariamente verdadero.*

La proposición "los ángulos rectos son congruentes" es verdadera, pero su converso, "los ángulos congruentes son rectos", no lo es necesariamente.

Principio 4: *el inverso de una proposición verdadera no es necesariamente verdadero.*

La proposición "un cuadrado es un cuadrilátero" es verdadera, pero su inversa "algo no cuadrado no es un cuadrilátero", no es necesariamente cierta.

Principio 5: *la contrapositiva de una proposición verdadera, es verdadera. La contrapositiva de una proposición falsa, es falsa.*

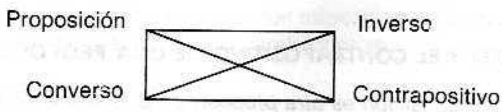
La proposición "un triángulo es un cuadrado" es evidentemente falsa, y su contrapositiva "algo no cuadrado no es un triángulo", también es falsa.

La proposición "los ángulos rectos son congruentes" es cierta; también lo es su contrapositiva "los ángulos que no son congruentes no son ángulos rectos"

14.3B Proposiciones lógicamente equivalentes

Las proposiciones lógicamente equivalentes son parejas de proposiciones relacionadas, donde ambas son o verdaderas o falsas. De acuerdo con el principio 5, una proposición y su contrapositiva son proposiciones lógicamente equivalentes. También lo son el converso y el inverso de una proposición, ya que cada una es la contrapositiva de la otra.

Las relaciones entre una proposición y su inverso, su converso y su contrapositiva se resumen en el rectángulo de equivalencia lógica de la figura 14-3:



Rectángulo de equivalencia lógica

Fig. 14-3

1. Las proposiciones lógicamente equivalentes están en los vértices diagonalmente opuestos. Las proposiciones lógicamente equivalentes por parejas son: (*a*) la proposición y su contrapositiva, y (*b*) el inverso y el converso de la misma proposición.

2. Las proposiciones que no son lógicamente equivalentes están en los vértices adyacentes. Las parejas de proposiciones que no son lógicamente equivalentes son: (*a*) una proposición y su inversa, (*b*) una proposición y su converso, (*c*) el converso y la contrapositiva de la misma proposición, y (*d*) la inversa y la contrapositiva de la misma proposición.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.3 El Converso de una Proposición

Establezca el converso de cada una de las proposiciones siguientes e indique si es o no verdadera.

(*a*) Los ángulos suplementarios son aquellos donde la suma de sus medidas es igual a 180°.

(*b*) Un cuadrado es un paralelogramo con un ángulo recto.

(*c*) Un polígono regular es un polígono equilateral y equiangular.

Soluciones

(*a*) Dos ángulos donde la suma de sus medidas es 180° son suplementarios. (Verdadero)

(*b*) Un paralelogramo con un ángulo recto es un cuadrado. (Falso)

(*c*) Un polígono equilateral y equiangular es un polígono regular. (Verdadero)

14.4 La Negativa de una Proposición

Determine la negativa de: (*a*) $a = b$; (*b*) $m\angle B \neq m\angle C$; (*c*) $\angle C$ es el complemento de $\angle D$; (*d*) "el punto no está en la línea".

Soluciones

(*a*) $a \neq b$

(*b*) $m\angle B = m\angle C$

(*c*) $\angle C$ no es el complemento de $\angle D$

(*d*) El punto está en la línea

14.5 La Inversa de una Proposición

Determine la inversa de cada una de las siguientes proposiciones e indique si son o no ciertas.

(*a*) Una persona nacida en los Estados Unidos de América es un ciudadano de los Estados Unidos de América.

(*b*) Un escultor es una persona con talento.

(*c*) Un triángulo es un polígono.

Soluciones

(*a*) Una persona no nacida en los Estados Unidos de América no es ciudadana de los Estados Unidos de América. (Falso, ya que existen los ciudadanos naturalizados)

(*b*) Una persona que no sea un escultor no tiene talento. (Falso, ya que puede ser un excelente músico, etc.)

(*c*) Una figura que no sea un triángulo no es un polígono. (Falso, ya que la figura puede ser un cuadrilátero, etc.)

14.6 Construcción del Converso, la Inversa y la Contrapositiva

Determine el converso, la inversa y la contrapositiva de la proposición "un cuadrado es un rectángulo". Determine la veracidad o la falsedad de cada una de ellas, y constate la equivalencia lógica entre la proposición y su contrapositiva, y entre el converso y la inversa.

Soluciones

Proposición: un cuadrado es un rectángulo. (Verdadero)
Converso: un rectángulo es un cuadrado. (Falso)
Inversa: una figura que no es un cuadrado no es un rectángulo. (Falso)
Contrapositiva: una figura que no es un rectángulo no es un cuadrado. (Verdadero)

14.4 CONVERSO PARCIAL E INVERSA PARCIAL DE UN TEOREMA

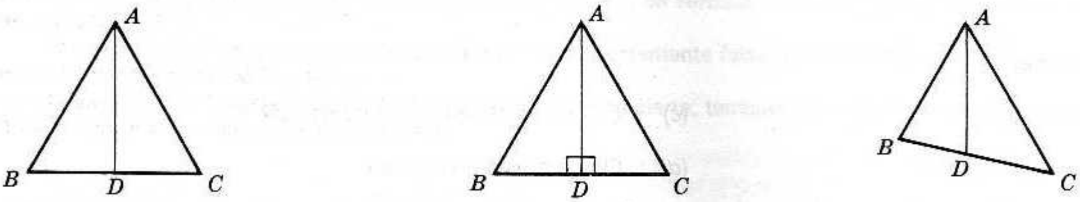
El *converso parcial de un teorema* se forma mediante el intercambio de cualquier condición en la hipótesis con alguna consecuencia en la conclusión.

La *inversa parcial de un teorema* se forma mediante la negación de cualquier condición en la hipótesis y una consecuencia en la conclusión.

Así, del teorema "si una recta bisecta al ángulo distinto de un triángulo isósceles, entonces es una altura a la base", se pueden formar una inversa parcial o un converso parcial, como se muestra en la figura 14-4.

En la formación de un inverso o converso parcial, la figura básica, tal como el triángulo de la figura 14-4, se mantiene intacta y no se intercambia ni se niega.

(*a*) Teorema (*b*) Converso parcial (*c*) Inverso parcial



(a)
Dado: $\triangle ABC$
(*1*) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
Demuéstrese: (*3*) $\overline{AD}$ es la altura a $\overline{BC}$

(b)
Dado: $\triangle ABC$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
(*3*) $\overline{AD}$ es la altura a $\overline{BC}$
Demuéstrese: (*1*) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

(c)
Dado: $\triangle ABC$
(*1'*) $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$
(*2*) $\overline{AD}$ bisecta al $\angle A$
Demuéstrese: (*3'*) $\overline{AD}$ no es la altura a $\overline{BC}$

Fig. 14-4

En la figura 14-4(*b*), el converso parcial se forma mediante el intercambio entre las proposiciones (*1*) y (*3*). Formulado en palabras, el converso parcial dice: "si el bisector de un ángulo de un triángulo es una altura, entonces el triángulo es isósceles". Otro converso parcial se puede construir intercambiando (*2*) y (*3*).

En la figura 14-4 (*c*), se forma la inversa parcial intercambiando las proposiciones (*1*) y (*3*) por sus negativos, (*1'*) y (*3'*). Formulado en palabras el inverso parcial dice: "si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces la línea que bisecta a su ángulo incluido no es una altura al tercer lado". Otro inverso parcial puede construirse al negar (*2*) y (*3*).

PROBLEMAS RESUELTOS

14.7 CONSTRUCCIÓN DE CONVERSOS PARCIALES CON LAS INVERSAS PARCIALES DE UN TEOREMA

Construya: (*a*) los conversos parciales y (*b*) los inversos parciales de la proposición "ángulos suplementarios iguales son ángulos rectos".

Soluciones

(*a*) Conversos parciales: (1) ángulos rectos congruentes son suplementarios.

(2) ángulos rectos suplementarios son congruentes.

(*b*) Inversas parciales: (1) ángulos congruentes que no son complementarios no son ángulos rectos.

(2) ángulos suplementarios que no son congruentes no son ángulos rectos.

14.5 CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

En lógica y en geometría, a menudo es importante determinar si las condiciones en la hipótesis de una proposición son necesarias y suficientes para justificar la conclusión. Esto se hace constatando la veracidad o falsedad de la proposición y su converso, seguido de la aplicación de los siguientes principios:

Principio 1: *si una proposición y su converso son ambos verdaderos, entonces las condiciones en la hipótesis de la proposición son necesarias y suficientes para que ocurra la conclusión.*

Por ejemplo, la proposición "si los ángulos son ángulos rectos, entonces son congruentes y suplementarios", es verdadera, y su converso; "si los ángulos son suplementarios y congruentes, entonces son ángulos rectos", también es verdadera. Por lo tanto, el hecho de ser ángulos rectos es condición necesaria y suficiente para que sean congruentes y suplementarios.

Principio 2: *si una proposición es verdadera y su converso es falso, entonces las condiciones de la hipótesis son suficientes pero no necesarias para que ocurra la conclusión de la proposición.*

La proposición "si los ángulos son rectos, entonces son congruentes" es cierta, y su converso "si los ángulos son congruentes, entonces son ángulos rectos", es falsa. Por lo tanto, la condición de que los ángulos sean rectos es suficiente para que ocurra la congruencia, pero no necesaria. Esto es, no es necesario que los ángulos sean rectos para que sean congruentes.

Principio 3: *si una proposición es falsa pero su converso es verdadero, entonces las condiciones de la hipótesis son necesarias pero no suficientes para que ocurra la conclusión.*

La proposición "si los ángulos son suplementarios, entonces son ángulos rectos" es falsa; su converso "si los ángulos son rectos, entonces son suplementarios" es verdadera. Por lo tanto, los ángulos necesitan ser suplementarios para ser rectos, pero el hecho de que sean suplementarios no es suficiente para que sean rectos.

Principio 4: *si una proposición y su converso son ambas falsas entonces las condiciones en la hipótesis no son ni necesarias ni suficientes para su conclusión.*

La proposición "si los ángulos son suplementarios, entonces son congruentes" es falsa; su converso "si los ángulos son congruentes, entonces son suplementarios", también es falsa. Por lo tanto, el hecho de que sean suplementarios no es necesario ni suficiente para que los ángulos sean congruentes.

Estos principios se resumen en la tabla siguiente.

Cuando las condiciones en la hipótesis de una proposición son necesarias y suficientes para justificar la conclusión

Principio	Proposición	Converso	Suficiente	Necesaria
1	Verdadera	Verdadera	Sí	Sí
2	Verdadera	Falsa	Sí	No
3	Falsa	Verdadera	No	Sí
4	Falsa	Falsa	No	No

PROBLEMAS RESUELTOS

14.8 Determinación de las Condiciones Necesarias y Suficientes

Para cada una de las siguientes proposiciones determine si las condiciones en la hipótesis son necesarias y suficientes para justificar la conclusión.

(*a*) Un polígono regular es equiangular y equilateral.

(*b*) Un polígono equiangular es regular.

(*c*) Un polígono regular es equilateral.

(*d*) Un polígono equilateral es equiangular.

Soluciones

(*a*) Dado que la proposición y su converso son ciertas, las condiciones son necesarias y suficientes.

(*b*) Dado que la proposición es falsa y su converso es verdadero, las condiciones son necesarias pero no suficientes.

(*c*) Dado que la proposición es verdadera y su converso es falso, las condiciones son suficientes pero no necesarias.

(*d*) Dado que tanto la proposición como su converso son falsos, las condiciones no son ni necesarias ni suficientes.

Problemas complementarios

1. Determine el orden en el que deben ser definidos cada uno de los elementos de los conjuntos siguientes: (14.1)

(*a*) Joyas, anillo de bodas, ornamento, anillo.

(*b*) Automóvil, vehículo, automóvil comercial, camión.

(*c*) Cuadrilátero, rombo, polígono, paralelogramo.

(*d*) Triángulo obtuso, ángulo obtuso, ángulo, triángulo isósceles obtuso.

2. Corregir cada una de las siguientes definiciones: (14.2)

(*a*) Un polígono regular es un polígono equilateral.

(*b*) Un triángulo isósceles es un triángulo que tiene por lo menos dos lados y dos ángulos congruentes.

(*c*) Un pentágono es una figura geométrica con cinco lados.

(*d*) Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

(*e*) Un ángulo inscrito es uno formado por dos cuerdas

(*f*) Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes y paralelos.

(*g*) Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.

3. Determine el negativo de cada una de las siguientes proposiciones: (14.4)

(*a*) $x + 2 = 4$

(*b*) $3y \neq 15$

(*c*) Ella te ama.

(*d*) Su calificación es mayor que 65

(*e*) José pesa más que Ricardo.

(*f*) $a + b \neq c$

4. Determine la inversa de cada una de las siguientes proposiciones e indique si es o no verdadera. (14.5)

(*a*) Un cuadrado tiene diagonales congruentes.

(*b*) Un triángulo equiangular es equilátero.

(*c*) Un soltero es una persona no casada.

(*d*) El cero no es un número positivo.

5. Determine el converso, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones. Indique si son verdaderas o falsas, y verifique la equivalencia lógica de la proposición y su contrapositiva al igual que la del converso y la inversa. (14.6)

(*a*) Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

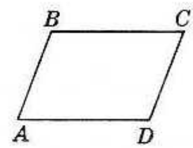
(*b*) Triángulos congruentes son triángulos similares.

(*c*) Si se intersectan dos líneas, entonces no son paralelas.

(*d*) Un senador de los Estados Unidos es un miembro del Congreso.

6. Construya conversos parciales e inversas parciales para cada uno de los teoremas detallados en la figura 14-5. (14.7)

(*a*) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
(*1*) $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
(*2*) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Demuéstrese: (*3*) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



(*b*) **Dado:** $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$
(*1*) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
(*2*) $\underline{/B} \cong \underline{/B'}$
(*3*) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
Demuéstrese: (*4*) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

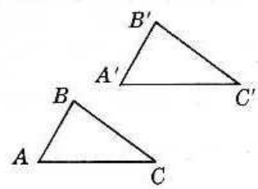


Fig. 14-5

7. Para cada una de las siguientes proposiciones determine si las condiciones en la hipótesis son necesarias o suficientes para justificar la conclusión. (14.8)

(*a*) Los senadores de los Estados Unidos son miembros electos del Congreso, dos por cada estado.

(*b*) Los miembros electos del Congreso son senadores de los Estados Unidos.

(*c*) Las personas electas son oficiales del gobierno.

(*d*) Si una mujer vive en la ciudad de Nueva York, entonces vive en el estado de Nueva York.

(*e*) Un soltero es un hombre no casado.

(*f*) Un soltero es una persona no casada.

(*g*) Un cuadrilátero con dos parejas de lados congruentes es un paralelogramo.

15

Construcciones

15.1 INTRODUCCIÓN

Las figuras geométricas se construyen con regla y compás. Como las construcciones se basan en el razonamiento deductivo, no se permiten instrumentos de medición tales como regla y transportador. Sin embargo, se puede utilizar una regla con medidas si no se toman en cuenta éstas.

En las construcciones, es recomendable planear haciendo un bosquejo de la situación; por lo general, este bosquejo revelará los pasos de construcción. Las líneas de construcción deberán ser de trazo ligero para distinguirlas de la figura requerida.

En este capítulo se detallan las siguientes construcciones:

1. Construcción de un segmento de línea congruente con un segmento de línea dado.
2. Construcción de un ángulo congruente con un ángulo dado.
3. Bisección de un ángulo dado.
4. Construcción de una línea perpendicular a una línea dada por determinado punto en la línea.
5. Bisección de un segmento de línea dado.
6. Construcción de una línea perpendicular a una línea dada por un punto externo dado.
7. Construcción de un triángulo dados sus tres lados.
8. Construcción de un ángulo de 60°
9. Construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
10. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y el lado que comprenden.
11. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y un lado no comprendido.
12. Construcción de un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto.
13. Construcción de la paralela a una línea dada por un punto externo dado.
14. Construcción de una tangente a un círculo dado, en un punto en el círculo.
15. Construcción de una tangente a un círculo dado por un punto fuera del círculo.
16. Circunscripción de un círculo a un triángulo.
17. Localización del centro de un círculo dado.

18. Inscripción de un círculo en un triángulo dado.

19. Inscripción de un cuadrado en un círculo dado.

20. Inscripción de un octágono regular en un círculo dado.

21. Inscripción de un hexágono regular en un círculo dado.

22. Inscripción de un triángulo equilátero en un círculo dado.

23. Construcción de un triángulo similar a otro triángulo dado sobre un segmento de línea dado como base.

15.2 DUPLICACIÓN DE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

CONSTRUCCIÓN 1: *Construcción de un segmento de línea congruente a un segmento de línea dado*
Dado: segmento de línea $\overline{AB}$ (Fig. 15-1)
Constrúyase: un segmento de línea congruente a $\overline{AB}$
Construcción: sobre la línea de trabajo w, constrúyase un arco con centro en cualquier punto C y de radio igual a AB, que intersecte a w en D. Entonces, $\overline{CD}$ es el segmento de línea pedido.

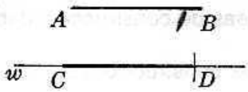


Fig. 15-1

CONSTRUCCIÓN 2: *construcción de un ángulo congruente a un ángulo dado*
Dado: $\angle A$ (Fig. 15-2)
Constrúyase: un ángulo congruente a $\angle A$
Construcción: con A como centro y un radio conveniente, constrúyase un arco (1) que intersecte los lados de $\angle A$ en B y C. Con A', un punto sobre una línea de trabajo w, como centro y el mismo radio, constrúyase un arco (2) que intersecte a w en B'. Con B' como centro y radio igual a BC, constrúyase un arco (3) que intersecte al arco (2) en C'. Trácese $A'C'$. Entonces $\angle A'$ es el ángulo pedido. ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ por s.s.s. $\cong$ s.s.s.; por lo que $\angle A \cong \angle A'$)

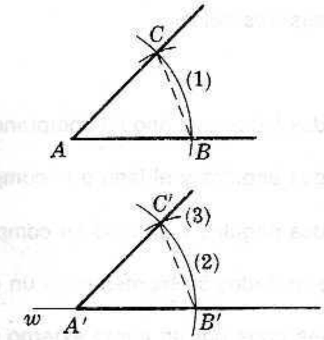


Fig. 15-2

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1 COMBINACIÓN DE SEGMENTOS DE LÍNEA

Dados los segmentos de línea con longitudes a y b (Fig. 15-3), construya segmentos de línea con longitudes iguales a: (a) $a + 2b$; (b) $2(a + b)$; (c) $b - a$.

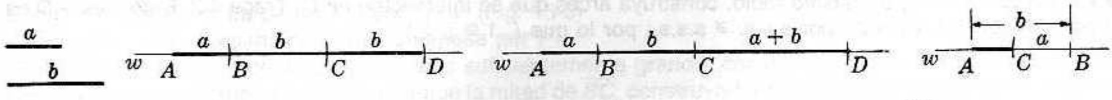


Fig. 15-3

Soluciones

Utilice la construcción 1.

(*a*) Sobre una línea de trabajo *w*, construya un segmento de línea $\overline{AB}$ con longitud *a*. Desde *B* construya un segmento de línea con longitud igual a *b*, al punto *C*; y desde *C* construya un segmento de línea con longitud *b*, al punto *D*. Entonces, $\overline{AD}$ es el segmento de línea pedido.

(*b*) Similar a (*a*). $AD = a + b + (a + b)$.

(*c*) Similar a (*a*). Primero construya $\overline{AB}$ con longitud *b*, después $\overline{BC}$ con longitud *a*. $AC = b - a$.

15.2 Combinación de Ángulos

Dado el $\triangle ABC$ en la Fig. 15-4, construya ángulos cuyas medidas sean iguales a (*a*) $2A$; (*b*) $A + B + C$; (*c*) $B - A$.

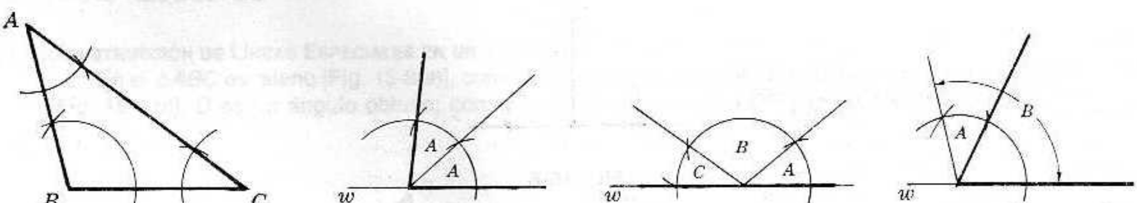


Fig. 15-4

Soluciones

Utilice la construcción 2.

(*a*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplique $\angle A$. Construya otro duplicado al $\angle A$ adyacente a $\angle A$, como se muestra. Los lados exteriores de los ángulos copiados forman el ángulo pedido.

(*b*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplíquese el $\angle A$. Construya el $\angle B$ adyacente al $\angle A$. Después construya el $\angle C$ adyacente al $\angle B$. Los lados exteriores de los ángulos *A* y *C* copiados forman el ángulo pedido. Note que el ángulo es derecho.

(*c*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplíquese el $\angle B$. Después duplíquese el $\angle A$ a partir del nuevo lado del $\angle B$, como se muestra. La diferencia es el ángulo pedido.

15.3 CONSTRUCCIÓN DE BISECTRICES Y PERPENDICULARES

Construcción 3: *bisección de un ángulo dado*
Dado: $\angle A$ (Fig. 15-5)
Construya: la bisectriz del $\angle A$

Construcción: con A como centro y un radio conveniente, construya un arco que intersecte los lados del $\angle A$ en B y C. Con B y C como centros y un mismo radio, construya arcos que se intersecten en D. Trace $\overrightarrow{AD}$. Entonces, $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz pedida. ($\triangle ABD \cong \triangle ACD$ por s.s.s. $\cong$ s.s.s.; por lo que $\angle 1 \cong \angle 2$.)

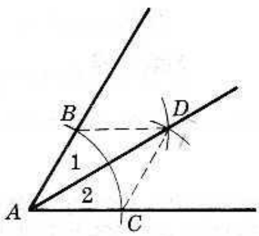


Fig. 15-5

CONSTRUCCIÓN 4: *construcción de una línea perpendicular a una línea dada a través de un punto dado sobre la línea.*
Dado: la línea w y un punto P en w (Fig. 15-6)
Construya: una perpendicular a w en P
Construcción: con la ayuda de la construcción 3, bisecte el ángulo derecho en P. Entonces, $\overrightarrow{DP}$ es la perpendicular pedida; $\overleftrightarrow{DP}$ es la línea pedida.

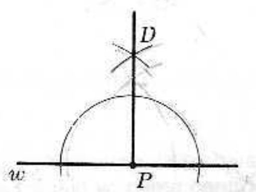


Fig. 15-6

CONSTRUCCIÓN 5: *bisección de un segmento de línea dado (construcción de la mediatriz de un segmento de línea dado).*
Dado: el segmento de línea $\overline{AB}$ (Fig. 15-7)
Construya: la mediatriz de $\overline{AB}$
Construcción: con A como centro y un radio de más de la mitad de $\overline{AB}$, construya un arco (1). Con B como centro y el mismo radio, construya el arco (2) que intersecta al arco (1) en C y D. Trace $\overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ pedida. (Dos puntos que equidistan cada uno de los extremos de un segmento determinan la mediatriz del segmento.)

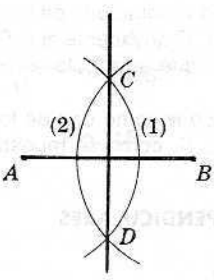


Fig. 15-7

CONSTRUCCIÓN 6: *construcción de una línea perpendicular a una línea dada a través de un punto externo dado.*
Dado: la línea w y un punto P fuera de w. (Fig. 15-8)
Construya: una perpendicular a w que pase por P
Construcción: con P como centro y radio suficientemente grande, construya un arco que intersecte a w en B y C. Con B y C como centros y el radio mayor que la mitad de $\overline{BC}$, construya arcos que se intersecten en A. Trace $\overleftrightarrow{PA}$. Entonces, $\overleftrightarrow{PA}$ es la perpendicular pedida. (Los puntos P y A son equidistantes de B y C.)

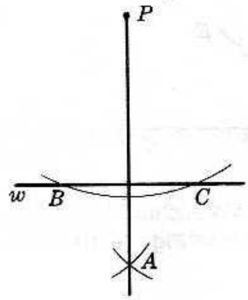


Fig. 15-8

PROBLEMAS RESUELTOS

15.3 CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS ESPECIALES EN UN TRIÁNGULO

En el $\triangle ABC$ escaleno [Fig. 15-9(*a*)], construya (*a*) la mediatriz de $\overline{AB}$ y (*b*) la mediana sobre $\overline{AB}$. En el $\triangle DEF$ [Fig. 15-9(*b*)], D es un ángulo obtuso; construya (*c*) la altura sobre $\overline{DF}$ y (*d*) la bisectriz del $\angle E$.

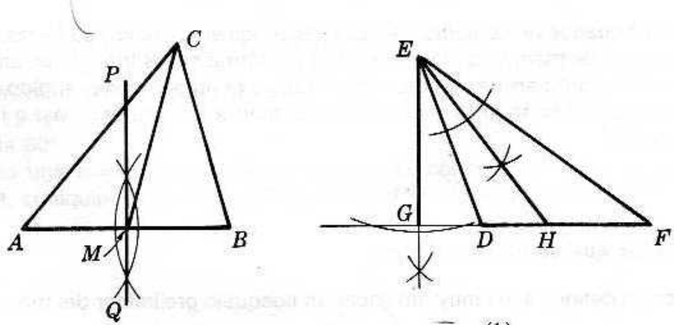


Fig. 15-9

Soluciones

(*a*) Utilice la construcción 5 para obtener la mediatriz $\overleftrightarrow{PQ}$ sobre $\overline{AB}$.

(*b*) El punto M es el punto medio de $\overline{AB}$. Trace $\overline{CM}$, la mediana sobre $\overline{AB}$.

(*c*) Use la construcción 6 para obtener $\overline{EG}$, la altura sobre $\overline{DF}$ (extendido).

(*d*) Use la construcción 3 para bisectar al $\angle E$. $\overrightarrow{EH}$ es la bisectriz pedida.

15.4 Construcción de Bisectrices y Perpendiculares para obtener los Ángulos Pedidos

(*a*) Construya ángulos que midan 90°, 45° y 135°.

(*b*) Dado un ángulo que mide *A* (Fig. 15-10), construya un ángulo cuya medida sea 90° + *A*.

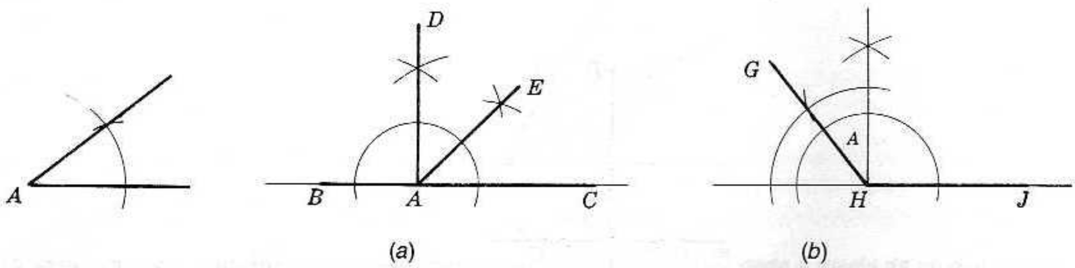


Fig. 15-10

Soluciones

(*a*) En la figura 15-10(*a*), $m\angle DAB = 90°$, $m\angle CAE = 45°$, $m\angle BAE = 135°$

(*b*) En la figura 15-10(*b*), $m\angle GHJ = 90° + A$.

15.4 CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO

15.4A Determinación de un triángulo

Un triángulo queda determinado cuando un conjunto de datos dados fija su tamaño y su forma. Como las partes necesarias para demostrar la congruencia de triángulos fijan el tamaño y la forma de los triángulos, un triángulo queda determinado cuando los datos dados consisten en tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido por éstos, o dos ángulos y el lado común a estos ángulos, o dos ángulos y un lado no común a los dos ángulos, o la hipotenusa y cualquier cateto de un triángulo rectángulo.

15.4B Bosquejo de triángulos que se van a construir

Antes de realizar la construcción definitiva, es muy útil hacer un bosquejo preliminar del triángulo pedido. En este bosquejo:

1. Muestre la posición de cada una de las partes dadas del triángulo.

2. Trace las partes dadas con trazo fuerte, las partes restantes con trazo suave.

3. Aproxime los tamaños de las partes dadas.

4. Utilice letras minúsculas para los lados de manera que correspondan a las letras mayúsculas que designan a los ángulos opuestos.

Como ejemplo se puede realizar un bosquejo como el de la figura 15-11 antes de construir un triángulo, dados dos ángulos y un lado común a éstos.

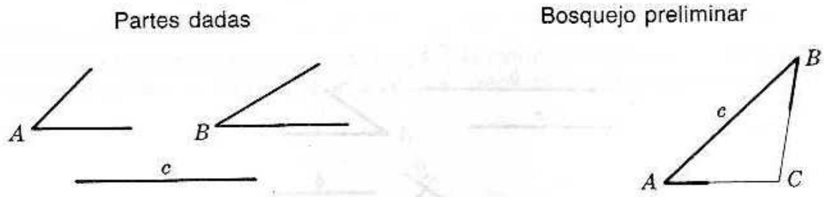


Fig. 15-11

15.4C Construcción de triángulos

CONSTRUCCIÓN 7: *construcción de un triángulo dados sus tres lados*
Dado: los lados de longitud a, b y c (Fig. 15-12)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ tal que $AC = b$. Con A como centro y c como radio, construya el arco (1). Después, con C como centro y a como radio, construya el arco (2) que intersecta al arco (1) en B. Trace $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$. El $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

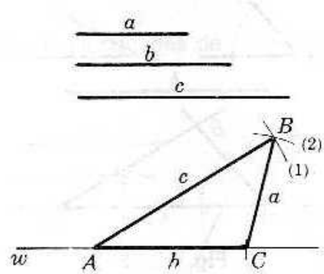


Fig. 15-12

CONSTRUCCIÓN 8: *construcción de un ángulo de 60°*
Dado: la línea w (Fig. 15-13)
Construir: un ángulo de 60°
Construcción: utilizando una longitud conveniente como lado, construya un triángulo equilátero con ayuda de la construcción 7. Entonces, cualquier ángulo del triángulo equilátero es el ángulo pedido.

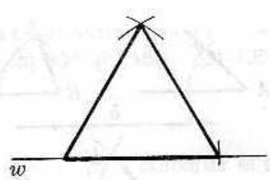


Fig. 15-13

CONSTRUCCIÓN 9: *construcción de triángulos dados dos lados y el ángulo comprendido*
Dado: $\angle A$, y los segmentos de longitudes b y c (Fig. 15-14)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ tal que $AC = b$. En A, construya el $\angle A$ utilizando $\overline{AC}$ como uno de sus lados. Sobre el otro lado del $\angle A$, construya $\overline{AB}$ tal que $AB = c$. Trace $\overline{BC}$. Entonces, el $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

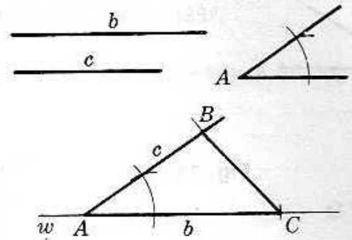


Fig. 15-14

CONSTRUCCIÓN 10: *construcción de un triángulo dado un lado y los dos ángulos adyacentes*
Dado: $\angle A$, $\angle C$ y un segmento de longitud b (Fig. 15-15)
Construya: $\triangle ABC$.
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En A construya el $\angle A$ con uno de sus lados sobre $\overline{AC}$, y en C construya el $\angle C$ con uno de sus lados sobre $\overline{AC}$. Prolongue los nuevos lados de los ángulos hasta que intersecten en B.

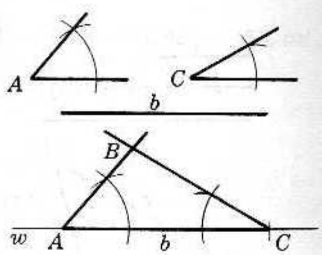


Fig. 15-15

CONSTRUCCIÓN 11: *construcción de un triángulo dados dos ángulos y un lado no incluido*
Dado: $\angle A$, $\angle B$ y un segmento de longitud b (Fig. 15-16)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En C construya un ángulo de medida igual a $m\angle A + m\angle B$ de modo que la extensión de $\overline{AC}$ será uno de los lados del ángulo. El resto del ángulo derecho en C será $\angle C$. En A construya el $\angle A$ con $\overline{AC}$ como uno de sus lados. La intersección de los nuevos lados de los ángulos es B.

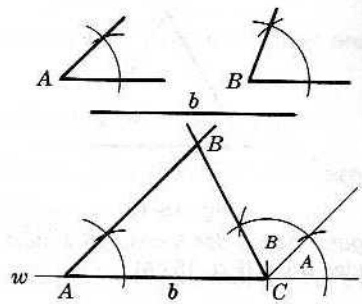


Fig. 15-16

CONSTRUCCIÓN 12: *construcción de un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto*
Dado: hipotenusa de longitud c y un cateto de longitud b del triángulo rectángulo ABC (Fig. 15-17)

Construya: triángulo rectángulo ABC
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En C construya una perpendicular a $\overline{AC}$. Con A como centro y radio c, construya un arco que intersecte a la perpendicular en B.

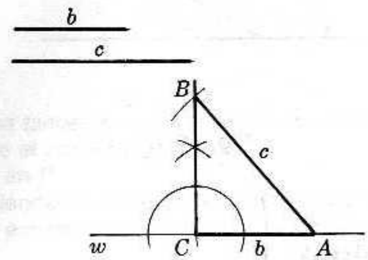


Fig. 15-17

PROBLEMAS RESUELTOS

15.5 Construcción de un Triángulo

Construya un triángulo isósceles, dadas las longitudes de su base y uno de sus lados (Fig. 15-18)

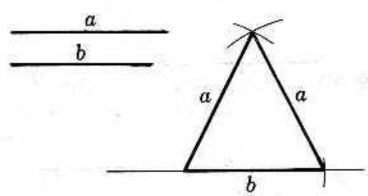


Fig. 15-18

Solución

Utilice la construcción 7, ya que se conocen los tres lados del triángulo.

15.6 Construcción de Ángulos Basados en la Construcción de un Ángulo de 60°

Construya un ángulo que mida (*a*) 120°; (*b*) 30°; (*c*) 150°; (*d*) 105°; (*e*) 75°.

Soluciones

(*a*) Utilice la construcción 8 [Fig. 15-19(*a*)] para construir el ángulo de 120° como 180° − 60°.

(*b*) Utilice las construcciones 8 y 3 para construir el ángulo de 30° como $\frac{1}{2}$(60°) [Fig. 15-19(*b*)].

(*c*) Utilice (*b*) para construir el ángulo de 150° como 180° − 30° [Fig. 15-19(*b*)].

(*d*) Utilice las construcciones 3, 4 y 8 para construir el ángulo de 105° como 60° + $\frac{1}{2}$(90°) [Fig. 15-19(*c*)].

(*e*) Utilice (*d*) para construir el ángulo de 75° como 180° − 105° [Fig. 15-19(*c*)].

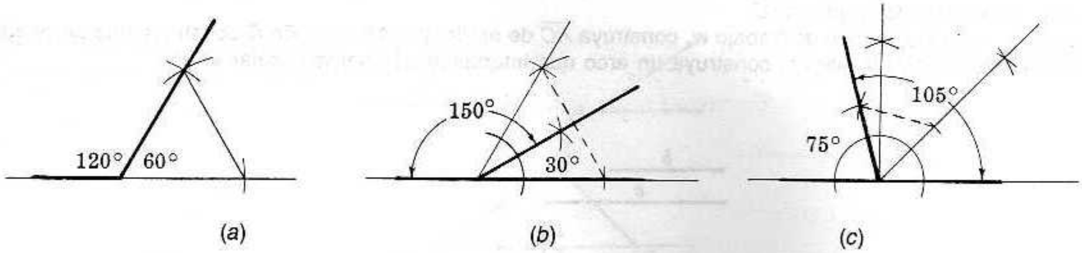


Fig. 15-19

15.5 CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS PARALELAS

Construcción 13: *construcción de una línea paralela a una línea dada a través de un punto externo.*
Dado: $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto externo P (Fig. 15-20)
Construya: una línea que pase por P paralela a $\overleftrightarrow{AB}$
Construcción: trace una línea $\overleftrightarrow{RS}$ que pase por P e intersecte a $\overleftrightarrow{AB}$ en Q. Construya $\angle SPD \cong \angle PQB$. Entonces $\overleftrightarrow{CD}$ es la paralela pedida. (Si dos ángulos correspondientes son congruentes, las líneas cortadas por una transversal son paralelas.

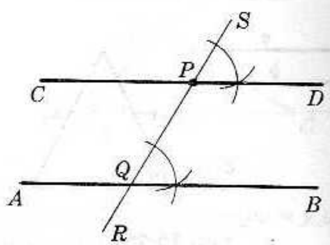


Fig. 15-20

PROBLEMAS RESUELTOS

15.7 Construcción de un Paralelogramo

Construya un paralelogramo dadas las longitudes de dos lados adyacentes a y b y una diagonal d (Fig. 15-21)

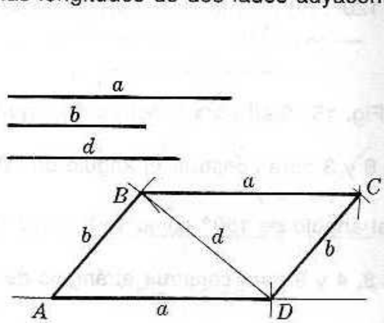


Fig. 15-21

Solución

Tres vértices del paralelogramo se obtienen construyendo el $\triangle ABD$ por medio de la construcción 7. El cuarto vértice, C, se obtiene construyendo el $\triangle BCD$ sobre la diagonal $\overline{BD}$ por medio de la construcción 7. El vértice C también puede obtenerse construyendo $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

15.6 CONSTRUCCIÓN DE CÍRCULOS

CONSTRUCCIÓN 14: *construcción de una tangente a un círculo dado a través de un punto sobre el círculo*
Dado: el círculo O y un punto P sobre el círculo (Fig. 15-22)
Construya: una tangente al círculo O en P
Construcción: Trace el radio $\overline{OP}$ y extiéndalo fuera del círculo. Construya $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OP}$ en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente pedida. (Una línea perpendicular al radio en su extremo exterior es una tangente al círculo.)

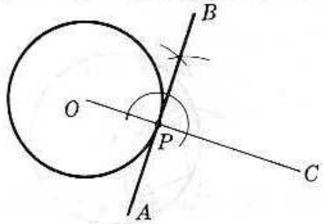


Fig. 15-22

CONSTRUCCIÓN 15: *construcción de una tangente a un círculo dado a través de un punto en el exterior del círculo.*
Dado: el círculo O y un punto P fuera del círculo (Fig. 15-23)
Construya: una tangente al círculo O desde P
Construcción: trace $\overline{OP}$ y construya un nuevo círculo O con $\overline{OP}$ como diámetro. Conecte P con A y B la intersección de los círculos O y Q. Entonces $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes ($\angle OAP$ y $\angle OBP$ son ángulos rectos, ya que ángulos inscritos en semicírculos son ángulos rectos).

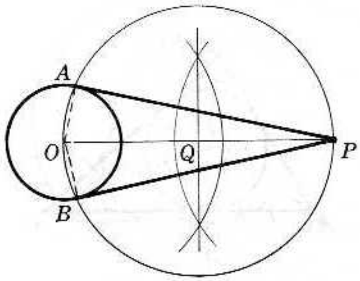


Fig. 15-23

CONSTRUCCIÓN 16: *circunscripción de un círculo a un triángulo*
Dado: el $\triangle ABC$ (Fig. 15-24)
Construya: el círculo circunscrito al $\triangle ABC$
Construcción: construya las mediatrices de dos lados del triángulo. Su intersección es el centro del círculo pedido, y la distancia a cualquier vértice es el radio. (Cualquier punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.)

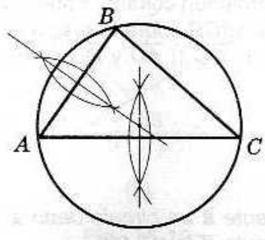


Fig. 15-24

CONSTRUCCIÓN 17: *localización del centro de un círculo*
Dado: un círculo (Fig. 15-25)
Construya: el centro del círculo dado
Construcción: seleccione tres puntos cualesquiera *A*, *B* y *C* sobre el círculo. Construya las mediatrices de los segmentos de línea $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. La intersección de estas mediatrices es el centro del círculo.

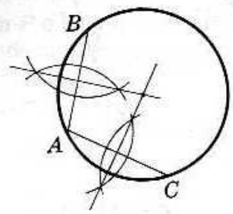


Fig. 15-25

CONSTRUCCIÓN 18: *inscripción de un círculo en un triángulo dado.*
Dado: el $\triangle ABC$ (Fig. 15-26)
Construya: el círculo inscrito en $\triangle ABC$
Construcción: construya las bisectrices de dos de los ángulos del $\triangle ABC$. Su intersección es el centro del círculo pedido, y la distancia (perpendicular) a cualquier lado es el radio. (Cualquier punto sobre la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.)

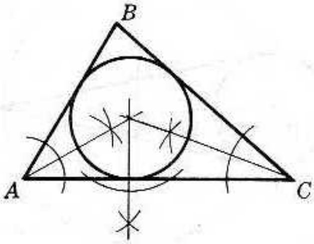


Fig. 15-26

PROBLEMAS RESUELTOS

15.8 CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES

Una secante desde un punto *P* fuera del círculo *O* en la figura 15-27 intersecta al círculo en *B* y *A*. Construya un triángulo circunscrito al círculo de tal forma que dos de sus lados se intersecten en *P* y el tercer lado sea tangente al círculo en *A*.

Solución

Use las construcciones 14 y 15: En A construya una tangente al círculo O. Desde P construya tangentes al círculo O que intersecten la primera tangente en C y en D. El $\triangle PCD$ es el triángulo pedido.

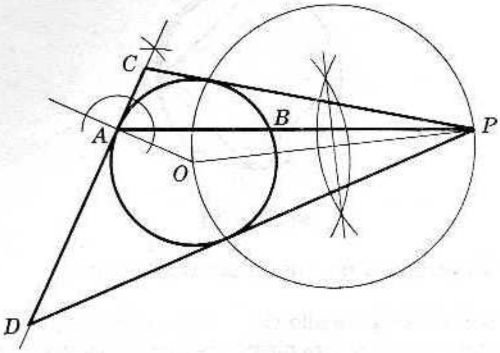


Fig. 15-27

15.9 Construcción de Círculos

Construya los círculos circunscrito e inscrito al triángulo isósceles DEF en la figura 15-28.

Solución

Use las construcciones 16 y 18. Al realizarlas, note que la bisectriz del $\angle E$ es también la mediatriz de $\overline{DF}$. Entonces, el centro de cada uno de los círculos está sobre $\overline{EG}$. Por medio de la construcción de las bisectrices del $\angle D$ o $\angle F$ se encuentra el centro del círculo inscrito I. Por medio de la construcción de las mediatrices de $\overline{DE}$ o $\overline{EF}$ se encuentra el centro del círculo circunscrito C.

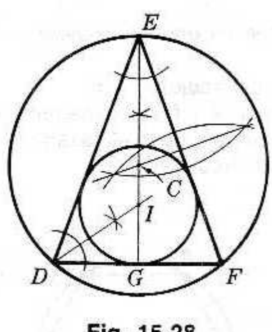


Fig. 15-28

15.7 INSCRIPCIÓN Y CIRCUNSCRIPCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

Construcción 19: *inscripción de un cuadrado en un círculo dado.*

Dado: el círculo O (Fig. 15-29)

Construya: un cuadrado inscrito en el círculo O

Construcción: trace un diámetro, y construya otro diámetro perpendicular a éste. Una los puntos extremos de los diámetros para formar el cuadrado pedido.

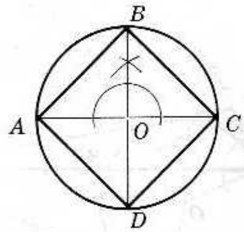


Fig. 15-29

CONSTRUCCIÓN 20: *inscripción de un octágono regular en un círculo dado*
Dado: el círculo *O* (Fig. 15-30)
Construya: un octágono regular inscrito en el círculo *O*
Construcción: como en la construcción 19, construya diámetros perpendiculares. Después, bisecte los ángulos formados por estos diámetros, dividiendo a' círculo en ocho arcos congruentes. Las cuerdas de estos arcos son los lados del octágono regular pedido.

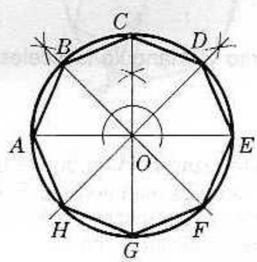


Fig. 15-30

CONSTRUCCIÓN 21: *inscripción de un hexágono en un círculo dado*
Dado: el círculo *O*
Construya: un hexágono regular inscrito en el círculo *O*
Construcción: trace el diámetro $\overline{AD}$ y utilizando *A* y *D* como centros, construya cuatro arcos que tengan el mismo radio que el círculo *O* y que intersecten al círculo. Construya el hexágono regular pedido uniendo consecutivamente los puntos en los cuales estos arcos intersectan al círculo.

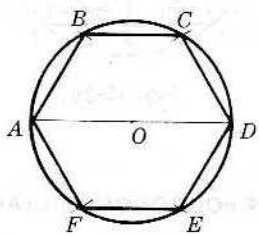


Fig. 15-31

CONSTRUCCIÓN 22: *inscripción de un triángulo equilátero en un círculo dado*
Dado: el círculo *O* (Fig. 15-32)

Construya: un triángulo equilátero inscrito en el círculo O.
Construcción: se obtienen triángulos equiláteros inscritos uniendo en forma alternada los seis puntos de división obtenidos en la construcción 25.

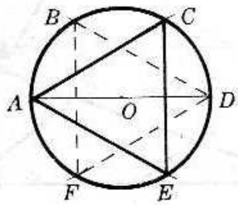


Fig. 15-32

15.8 CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS SIMILARES

CONSTRUCCIÓN 23: *construcción de un triángulo similar a un triángulo dado sobre un segmento de línea como base*
Dado: el $\triangle ABC$ y el segmento de línea $\overline{A'C'}$ (Fig. 15-33)
Construya: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ sobre $\overline{A'C'}$ como base
Construcción: sobre $A'C'$, construya $\angle A' \cong \angle A$ y $\angle C' \cong \angle C$ utilizando la construcción 2. Prolongue los otros lados hasta que se intersecten, en B. (Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son similares.)

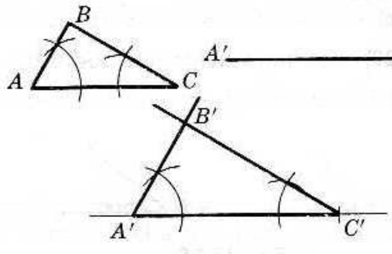


Fig. 15-33

PROBLEMAS RESUELTOS

15.10 CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS SIMILARES

Construya un triángulo similar al triángulo ABC en la figura 15-34, con una base el doble de largo que la base del triángulo dado.

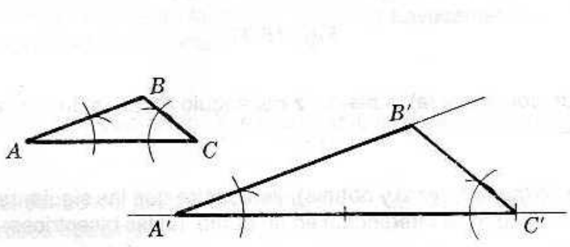


Fig. 15-34

Solución

Construya $\overline{A'C'}$ del doble de longitud que $\overline{AC}$, y luego utilice la construcción 27.

Método alterno (Fig. 15-35): prolongue dos de los lados del $\triangle ABC$ al doble de sus longitudes y una los puntos terminales.

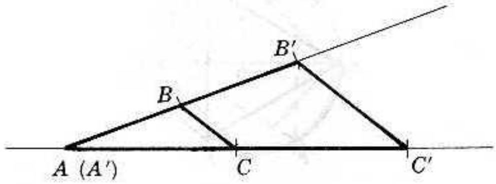


Fig. 15-35

Problemas complementarios

1. Dados los siguientes segmentos de línea de longitud a y b: $\overset{a}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}$ $\overset{b}{\overline{\qquad\qquad}}$. Construya un segmento de línea cuya longitud sea igual a: (*a*) $a + b$; (*b*) $a - b$; (*c*) $2a + b$; (*d*) $a + 3b$; (*e*) $2(a + b)$; (*f*) $2(3b - a)$. (15.1)

2. Dados los segmentos de línea con longitudes a, b y c siguientes $\overset{a}{\overline{\qquad}}$ $\overset{b}{\overline{\qquad\qquad\qquad}}$ $\overset{c}{\overline{\qquad\qquad}}$. Construya un segmento de línea cuya longitud sea igual a: (*a*) $a + b + c$; (*b*) $a + c - b$; (*c*) $a + 2(b + c)$; (*d*) $b + 2(a - c)$; (*e*) $3(b + c - a)$. (15.1)

3. Dados los ángulos A y B (Fig. 15-36). Construya un ángulo que mida (*a*) $A + B$; (*b*) $A - B$; (*c*) $2B - A$; (*d*) $2A - B$; (*e*) $2(A - B)$. (15.2)

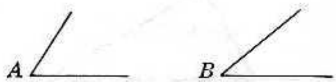


Fig. 15-36

4. Dados los ángulos A, B y C (Fig. 15-37). Construya un ángulo que mida (*a*) $A + C$; (*b*) $B + C - A$; (*c*) $2C$; (*d*) $B - C$; (*e*) $2(A - B)$. (15.2)

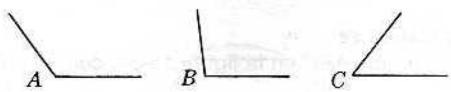


Fig. 15-37

5. En un triángulo rectángulo, construya (*a*) la bisectriz del ángulo recto; (*b*) la mediatriz de la hipotenusa; (*c*) la mediana sobre la hipotenusa. (15.3)

6. Para cada clase de triángulo (agudo, recto y obtuso), demuestre que los siguientes conjuntos de rayos y segmentos son concurrentes, es decir, que se intersectan en un punto: (*a*) las bisectrices; (*b*) las medianas; (*c*) las alturas; (*d*) las mediatrices. (15.3)

7. Dado el $\triangle ABC$ en la figura 15-38, construya (*a*) el suplemento del $\angle A$; (*b*) el complemento del $\angle B$; (*c*) el complemento de $\frac{1}{2}\angle C$. (15.4)

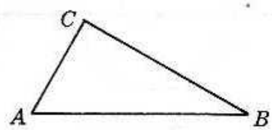


Fig. 15-38

8. Construya un ángulo cuya medida sea igual a: (*a*) $22\frac{1}{2}°$; (*b*) $67\frac{1}{2}°$; (*c*) $112\frac{1}{2}°$ (15.4)

9. Dado un ángulo agudo, construya (*a*) su suplemento; (*b*) su complemento; (*c*) la mitad de su suplemento; (*d*) la mitad de su complemento. (15.4)

10. Por medio de una construcción, demuestre que la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo agudo es igual a 90° (15.4)

11. Construya un triángulo rectángulo dados sus (*a*) catetos; (*b*) hipotenusa y un cateto; (*c*) cateto y un ángulo agudo adyacente al cateto; (*d*) cateto y un ángulo agudo opuesto al cateto; (*e*) hipotenusa y un ángulo agudo. (15.5)

12. Construya un triángulo isósceles dado (*a*) un lado y el ángulo del vértice; (*b*) un lado y un ángulo de la base; (*c*) un lado y la altura sobre la base (*d*) la base y la altura sobre la base. (15.5)

13. Construya un triángulo rectángulo isósceles dados (*a*) un cateto; (*b*) la hipotenusa; (*c*) la altura sobre la hipotenusa. (15.5)

14. Construya un triángulo dados (*a*) dos lados y la mediana sobre uno de estos lados; (*b*) dos lados y la altura sobre uno de éstos; (*c*) un ángulo, la bisectriz del ángulo dado, y un lado adyacente al ángulo dado. (15.5)

15. Construya ángulos que midan 15° y 165°. (15.6)

16. Dado un ángulo de medida A, construya ángulos que midan (*a*) $A + 60°$; (*b*) $A + 30°$; (*c*) $A + 120°$. (15.6)

17. Construya un paralelogramo, dados (*a*) dos ángulos adyacentes y un ángulo; (*b*) las diagonales y el ángulo agudo en su intersección; (*c*) las diagonales y un lado; (*d*) dos lados adyacentes y la altura sobre uno de ellos; (*e*) un lado, un ángulo, y la altura sobre el lado dado. (15.8)

18. Circunscriba un triángulo a un círculo dado, si se dan los puntos de tangencia. (15.8)

19. La secante $\overleftrightarrow{AB}$ pasa por el centro del círculo O en la figura 15-39. Circunscriba un cuadrilátero al círculo de manera que A y B sean vértices opuestos. (15.8)

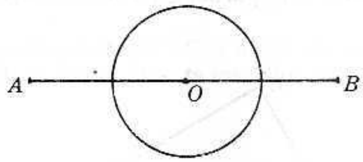


Fig. 15-39

20. Circunscriba e inscriba círculos a (*a*) un triángulo agudo; (*b*) un triángulo obtuso. (15.9)

21. Circunscriba un círculo a (*a*) un triángulo rectángulo; (*b*) un rectángulo; (*c*) un cuadrado. (15.9)

22. Construya los círculos inscrito y circunscrito a un triángulo equilátero. (15.9)

23. Localice el centro de un círculo trazado alrededor de una moneda de medio dólar. (15.9)

24. En un círculo dado, inscriba (*a*) un cuadrado; (*b*) un octágono regular; (*c*) un polígono regular de 16 lados; (*d*) un hexágono regular; (*e*) un triángulo equilátero; (*f*) un dodecágono regular.

25. Construya un triángulo similar a un triángulo dado con base (*a*) tres veces más grande; (*b*) la mitad de grande; (*c*) una y media veces más grande. (15.10)

16

Demostración de teoremas importantes

16.1 INTRODUCCIÓN

Los teoremas demostrados en este capítulo se consideran los más importantes en la secuencia lógica de la geometría. Son los siguientes:

1. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. (Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.)

2. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°.

3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

4. Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno de ellos es congruente con las partes correspondientes del otro.

5. Un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta tanto a la cuerda como a sus arcos.

6. Un ángulo inscrito en un círculo se mide como la mitad de su arco interceptado.

7. El ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan dentro de un círculo, se mide como la mitad de la suma de los arcos interceptados.

8*a*. Un ángulo formado por dos secantes que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

8*b*. Un ángulo formado por una tangente y una secante que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

8*c*. Un ángulo formado por dos tangentes que se intersectan afuera de un círculo, se mide como la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

9. Si tres ángulos de un triángulo son congruentes con tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares.

10. Si se dibuja la altura a la hipotenusa de un triángulo rectángulo (o recto), se tiene que: (*a*) los dos triángulos así formados son similares al triángulo dado y también son similares entre sí, y (*b*) cada cateto del triángulo dado es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

11. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo recto, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.

12. El área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

13. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

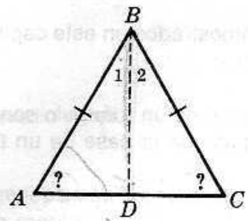
14. El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto de la longitud de la altura por la suma de las longitudes de las bases.

15. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la longitud de su apotema.

16.2 LAS DEMOSTRACIONES

1. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. (Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.)

Dado: $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
Demuéstrese: $\angle A \cong \angle C$
Plan: cuando se dibuja el bisector de un ángulo en un vértice se tiene que los ángulos por demostrar que son congruentes, se convierten en ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

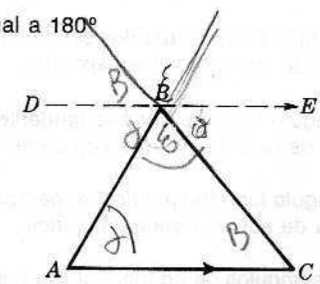


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$	1. Un ángulo puede ser bisectado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. Dado.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle ADB \cong \triangle BDC$	5. s.a.s. ≅ s.a.s.
6. $\angle A \cong \angle C$	6. Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

2. La suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es igual a 180°

Dado: $\triangle ABC$
Demuéstrese: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$
Plan: cuando se dibuja una línea que pasa por un vértice y que es paralela al lado opuesto, se forma un ángulo derecho cuyas partes, es posible demostrar, son congruentes a los ángulos del triángulo.

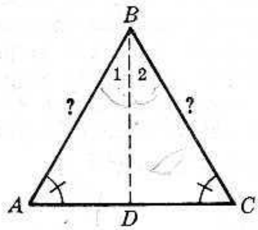


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Por B dibujar $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$	1. Por un punto externo se puede dibujar una línea paralela a otra dada.
2. $m\angle DBE = 180°$	2. Un ángulo derecho es aquel que mide 180°.
3. $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180°$	3. El total es igual a la suma de sus partes.
4. $\angle A \cong \angle DBA$, $\angle C \cong \angle CBE$	4. Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.
5. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	5. Postulado de sustitución.

3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Dado: $\triangle ABC$, $\angle A \cong \angle C$
Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
Plan: cuando se dibuja el bisector del $\angle B$, los lados que se van a demostrar como congruentes se convierten en los lados correspondientes de triángulos congruentes.

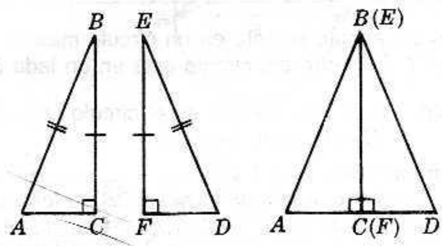


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{BD}$ bisectando $\angle B$	1. Un ángulo puede ser bisectado.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\angle A \cong \angle C$	3. Dado.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Propiedad reflexiva.
5. $\triangle BDA \cong \triangle BDC$	5. s.a.a. ≅ s.a.a.
6. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	6. Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

4. Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno de ellos es congruente con las partes correspondientes del otro.

Dado: $\triangle ABC$ recto con ángulo recto en C
$\triangle DEF$ recto con ángulo recto en F
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
Demuéstrese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
Plan: Júntense los dos triángulos dados de modo que $\overline{BC}$ coincida con $\overline{EF}$ y formen un triángulo isósceles. Se demuestra entonces, mediante el teorema 1 y con s.a.a. ≅ s.a.a., que los triángulos dados son congruentes.



DEMOSTRACIÓN:

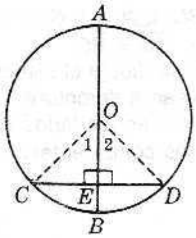
Proposición	Argumento
1. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1. Dado.
2. Júntense los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ de manera que $\overline{BC}$ coincida con $\overline{EF}$, y que A y D estén en lados opuestos de $\overline{BC}$.	2. Una figura geométrica puede ser movida sin cambiar su tamaño o forma. Las líneas que son iguales pueden hacerse coincidir.
3. $\angle C$ y $\angle F$ son rectos	3. Dado.
4. $\angle ACD$ es derecho	4. El total es igual a la suma de sus partes.
5. $\overline{AD}$ es un segmento de línea recta.	5. Los lados de un ángulo derecho están en una línea recta.
6. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	6. Dado.
7. $\angle A \cong \angle D$	7. Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados, son congruentes.
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8. s.a.a. ≅ s.a.a.

5. Un diámetro perpendicular a una cuerda bisecta tanto a la cuerda como a sus arcos.

Dado: círculo O, diámetro $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

Demuéstrese: $\overline{CE} \cong \overline{ED}$, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{AD}$

Plan: se forman triángulos congruentes cuando se dibujan radios a C y D, lo que demuestra que $\overline{CE} \cong \overline{ED}$. Los ángulos centrales iguales se usan para demostrar que $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{BD}$; finalmente se usa el postulado de sustracción para demostrar que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{AD}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$	1. Una línea recta puede dibujarse entre dos puntos.
2. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$	3. Dado.
4. $\angle OEC$ y $\angle OED$ son rectos	4. Las perpendiculares hacen ángulos rectos.
5. $\overline{OE} \cong \overline{OE}$	5. Propiedad reflexiva.
6. $\triangle OEC \cong \triangle OED$	6. hipotenusa, cateto ≅ hipotenusa, cateto.
7. $\overline{CE} \cong \overline{ED}$, $\angle 1 \cong \angle 2$	7. Las partes correspondientes de triángulos congruentes, son congruentes.
8. $\overset{\frown}{CB} \cong \overset{\frown}{BD}$	8. En un círculo, ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.
9. $\overset{\frown}{ACB} \cong \overset{\frown}{ADB}$	9. Un diámetro bisecta a un círculo.
10. $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{AD}$	10. En un círculo arcos congruentes son arcos iguales; postulado de sustracción.

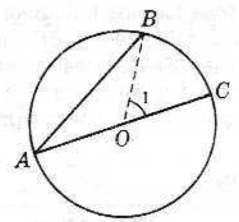
6. Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad de su arco interceptado.

Caso I: El centro del círculo está en un lado del ángulo.

Dado: $\angle A$ está inscrito en el círculo O.
O está en el lado AC.

Demuéstrese: $\angle A \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

Plan: cuando se dibuja el radio $\overline{OB}$ se forma el triángulo isósceles $\triangle AOB$. Se demuestra entonces que $m\angle A$ es la mitad del $\angle 1$ central, el cual está determinado por la medida de $\overset{\frown}{BC}$.

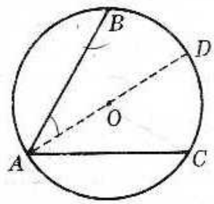


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{OB}$	1. Se puede dibujar una línea recta que pase por dos puntos.
2. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. Los radios de un círculo son congruentes.
3. $\angle A \cong \angle B$	3. Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
4. $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$	4. En un triángulo, la medida de un triángulo externo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos adjuntos.
5. $m\angle A + m\angle A = 2m\angle A = m\angle 1$	5. Postulado de sustitución.
6. $m\angle A = \frac{1}{2} m\angle 1$	6. Las mitades de iguales son iguales.
7. $\angle 1 \doteq \overset{\frown}{BC}$	7. Un ángulo central se mide por su arco interceptado.
8. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$	8. Postulado de sustitución.

Caso II: el centro está dentro del ángulo.

Dado: $\angle BAC$, inscrito en el círculo O.
O está dentro $\angle BAC$.
Demuéstrese: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\ BC$
Plan: cuando se dibuja un diámetro, el $\angle BAC$ se divide en dos ángulos que pueden ser medidos mediante la aplicación del *Caso I*.

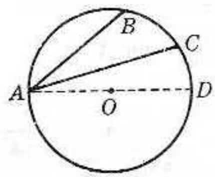


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese el diámetro $\overline{AD}$	1. Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$ $\angle DAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{DC}$	2. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado, si el centro del círculo está a un lado del ángulo.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{DC}$ o $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{DC})$	3. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$	4. Postulado de sustitución.

Caso III: el centro está afuera del ángulo.

Dado: $\angle BAC$ está inscrito en el círculo O.
O está afuera de $\angle BAC$.
Demuéstrese: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$
Plan: cuando se dibuja un diámetro, $\angle BAC$ se convierte en la diferencia de dos ángulos que pueden ser medidos aplicando el *Caso I*.

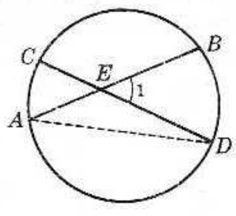


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese el diámetro $\overline{AD}$	1. Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos.
2. $\angle BAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$ $\angle CAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{CD}$	2. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado, si el centro del círculo está a un lado.
3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} - \frac{1}{2}\widehat{CD}$ o $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{CD})$	3. Si iguales se restan a iguales, las diferencias son iguales.
4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$	4. Postulado de sustitución.

7. El ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan dentro de un círculo mide la mitad de la suma de los arcos interceptados.

Dado: $\angle 1$ está formado por las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ las que se intersectan en E dentro del círculo O.
Demuéstrese $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$
Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el ángulo $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo de un triángulo cuyos ángulos internos no adyacentes son ángulos inscritos medidos por $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ y $\frac{1}{2}\widehat{BD}$.



DEMOSTRACIÓN:

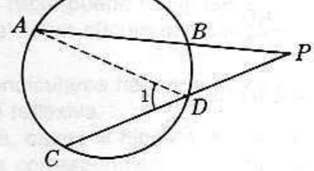
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle D$	2. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes.
3. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$, $\angle D \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$	3. Un ángulo inscrito en un círculo mide la mitad de su arco interceptado.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{AC} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{AC})$	4. Postulado de sustitución.

8a. Un ángulo formado por dos secantes que se intersectan afuera de un círculo, mide la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$, formado por la intersección en P de las secantes $\overline{PBA}$ y $\overline{PDC}$, donde P es un punto afuera del círculo O.

Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

Plan: cuando se dibuja $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$, del que $\angle P$ es un ángulo interno no adjunto.



DEMOSTRACIÓN:

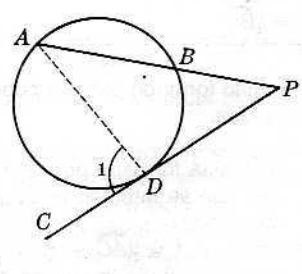
Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. La medida de un ángulo externo a un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. Postulado de la sustracción.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$, $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$	4. Un ángulo inscrito en un círculo se mide por la mitad de su arco interceptado.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC} - \frac{1}{2}\widehat{BD}$ o $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$	5. Postulado de sustitución.

8b. Un ángulo formado por una secante y una tangente que se intersectan afuera de un círculo, se mide por la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$ formado por la intersección en P de la secante $\overline{PBA}$ y la tangente $\overline{PDC}$, donde P es un punto afuera del círculo O.

Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$; del que los $\angle P$ y $\angle R$ son ángulos internos no adjuntos.

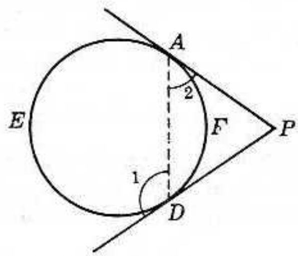


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. Postulado de la sustracción.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AD}$	4. Un ángulo formado por una tangente y una cuerda se mide por la mitad de su arco interceptado.
5. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$	5. Un ángulo inscrito se mide por la mitad de su arco interceptado.
6. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC} - \frac{1}{2}\widehat{BD}$ o $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$	6. Postulado de sustitución

8c. Un ángulo formado por dos tangentes que se intersectan afuera de un círculo mide la mitad de la diferencia de sus arcos interceptados.

Dado: $\angle P$, formado por la intersección en P de las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$, donde P es un punto afuera del círculo O.
Demuéstrese: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AED} - \widehat{AFD})$
Plan: cuando se dibuja la cuerda $\overline{AD}$, el $\angle 1$ se convierte en un ángulo externo del $\triangle ADP$, del que $\angle P$ y $\angle 2$ son ángulos internos no adjuntos.

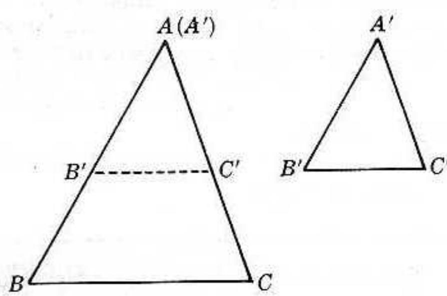


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{AD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta
2. $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 1$	2. La medida de un ángulo externo de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adjuntos.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle 2$	3. Postulado de la sustracción.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AED}$, $\angle 2 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AFD}$	4. Un ángulo formado por una tangente y una cuerda se mide por la mitad de su arco interceptado.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AED} - \frac{1}{2}\widehat{AFD}$ o $\angle P \doteq {}^{1}(\widehat{AED} - \widehat{AFD})$	5. Postulado de sustitución.

9. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son similares.

Dado: $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$
$\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$
Demuéstrese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
Plan: para demostrar que los triángulos son similares, es necesario demostrar que los lados correspondientes son proporcionales entre sí. Esto se hace colocando a los triángulos de tal manera que coincida una pareja de ángulos congruentes; esto se repite hasta que otra pareja de ángulos congruentes coincida.



DEMOSTRACIÓN:

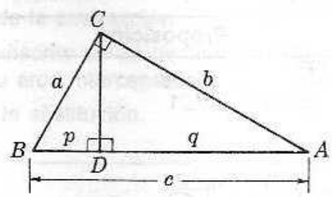
Proposición	Argumento
1. $\angle A \cong \angle A'$	1. Dado.
2. Colóquese al $\triangle A'B'C'$ sobre $\triangle ABC$ de modo que $\angle A'$ coincida con $\angle A$.	2. Una figura geométrica puede ser movida sin cambiar su tamaño o su forma. Se puede hacer coincidir con ángulos que sean iguales.
3. $\angle B \cong \angle B'$	3. Dado.
4. $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$	4. Dos líneas son paralelas si sus ángulos correspondientes son congruentes.
5. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$	5. Una línea paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos de manera proporcional.
6. De manera semejante, al colocar $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$ de modo que $\angle B'$ coincida con B, se demuestra que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$	6. Puntos 1 a 5.
7. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$	7. Cosas (proporciones) iguales a la misma cosa, son iguales entre sí.
8. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$	8. Dos polígonos son similares si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

10. Si se dibuja la altura a la hipotenusa de un triángulo recto, entonces: (*a*) los dos triángulos así formados son similares entre sí, al igual que al triángulo dado; (*b*) cada cateto del triángulo dado es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

Dado: $\triangle ABC$ con un ángulo recto en C, altura $\overline{CD}$ a la hipotenusa $\overline{AB}$

Demuéstrese: (*a*) $\triangle ADC \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$
(*b*) $c{:}a = a{:}p$; $c{:}b = b{:}q$

Plan: los triángulos son similares ya que tienen un ángulo recto y una pareja de ángulos agudos congruentes. Las proporciones son consecuencia de la similitud de los triángulos.

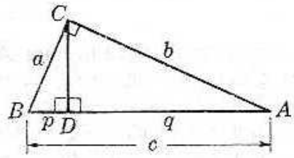


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. $\angle C$ es un ángulo recto	1. Dado.
2. $\overline{CD}$ es la altura a $\overline{AB}$	2. Dado.
3. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	3. Una altura a un lado de un triángulo es perpendicular a ese lado.
4. $\angle CDB$ y $\angle CDA$ son rectos	4. Las perpendiculares forman ángulos rectos entre sí.
5. $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle B$	5. Propiedad reflexiva.
6. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$	6. Dos triángulos rectos son similares si un ángulo agudo de uno de ellos es congruente con un ángulo agudo del otro.
7. $\triangle ADC \sim \triangle BDC$	7. Dos triángulos similares al mismo triángulo son similares entre sí.
8. $c{:}a = a{:}p$, $c{:}b = b{:}q$	8. Lados correspondientes de triángulos similares, son proporcionales.

11. El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Dado: $\triangle ABC$ rectángulo, con ángulo recto en C. Los catetos tienen longitudes a, b y la hipotenusa tiene longitud c.
Demuéstrese: $c^2 = a^2 + b^2$
Plan: Dibújese $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y aplíquese el teorema 10.

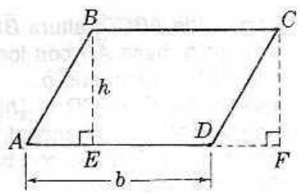


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	1. Desde un punto externo, se puede dibujar una perpendicular a una línea dada.
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}, \frac{c}{b} = \frac{b}{q}$	2. Si se dibuja una altura a la hipotenusa de un triángulo recto, cualquiera de los catetos es la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto y la hipotenusa.
3. $a^2 = cp$, $b^2 = cq$	3. En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.
4. $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q)$	4. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
5. $c = p + q$	5. El total es igual a la suma de sus partes.
6. $a^2 + b^2 = c(c) = c^2$	6. Postulado de sustitución.

12. El área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura a ese lado.

Dado: $\square ABCD$, longitud de la base $\overline{AD} = b$, longitud de la altura $\overline{BE} = h$
Demuéstrese: Área de $ABCD = bh$
Plan: cuando se dibuja una perpendicular a la base, extendida, se forma un rectángulo que tiene la misma base y altura que el paralelogramo. Mediante la adición de triángulos congruentes a un área común, se demuestra que el rectángulo y el paralelogramo tienen la misma área.



DEMOSTRACIÓN:

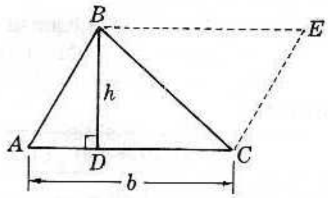
Proposición	Argumento
1. Dibújese $\overline{CF} \perp \overline{AD}$ (extendida)	1. Desde un punto externo se puede dibujar una perpendicular a una línea dada.
2. $\overline{CF} \parallel \overline{BE}$	2. Los segmentos perpendiculares a la misma línea son paralelos.
3. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	3. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.
4. $\angle CFD$ y $\angle BEA$, ángulos rectos	4. Las perpendiculares forman ángulos rectos.
5. $BCFE$ es un rectángulo	5. Un paralelogramo con un ángulo recto, es un rectángulo.
6. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CF} \cong \overline{BE}$	6. Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
7. $\triangle ABE \cong \triangle CFD$	7. hipotenusa cateto $\cong$ hipotenusa cateto
8. Área (cuadrilátero $BCDE$) = Área (cuadrilátero $BCDE$)	8. Propiedad reflexiva.
9. Área ($\triangle ABE$) + Área (cuadrilátero $BCDE$) = Área ($\triangle CFD$) + Área (cuadrilátero BCDE) o Área (rectángulo $BCFE$) = Área ($\square ABCD$)	9. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
10. Área del rectangulo $BCFE = bn$	10. El área de un rectángulo es igual al producto de las longitudes de su base y de su altura.
11. Área $\square ABCD = bh$	11. Postulado de sustitución.

13. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura de ese lado.

Dado: $\triangle ABC$, longitud de la base $\overline{AC} = b$, longitud de la altura $\overline{BD} = h$

Demuéstrese: Área $\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$

Plan: al dibujar $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$, se forma un paralelogramo que tiene la misma base y altura que el triángulo dado. Por lo tanto, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



DEMOSTRACIÓN:

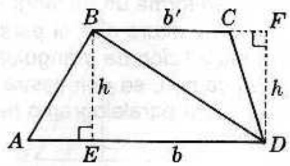
Proposición	Argumento
1. Dibújense $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$	1. Desde un punto externo se puede dibujar una línea paralela a otra dada.
2. $ABEC$ es un paralelogramo con base b y altura h	2. Un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos.
3. Área $(\triangle ABC) = \frac{1}{2}$ Área $(\square ABEC)$	3. Una diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.
4. Área $(\square ABEC) = bh$	4. El área de un paralelogramo es igual al producto de las longitudes de la base y de la altura.
5. Área del $\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$	5. Postulado de sustitución

14. El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto entre la longitud de la altura y la suma de las longitudes de las bases.

Dado: Trapezoide $ABCD$, altura $\overline{BE}$ con longitud h, base $\overline{AD}$ con longitud b, base $\overline{BC}$ con longitud b'.

Demuéstrese: Área de $ABCD = \frac{1}{2}h(b + b')$

Plan: cuando se dibuja una diagonal, el trapezoide se divide en dos triángulos con bases b, b' y con altura común a ambos.

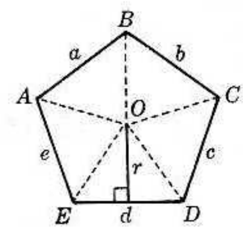


DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibujar $\overline{BD}$	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. Dibujar $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$ (extendido)	2. Desde un punto externo, es posible dibujar una perpendicular a una recta dada.
3. $DF = BE = h$	3. Las líneas paralelas son equidistantes en todas partes.
4. Área $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}bh$ Área $(\triangle BCD) = \frac{1}{2}b'h$	4. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de su base y altura.
5. Área de $ABCD = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}b'h = \frac{1}{2}h(b + b')$	5. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.

15. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la apotema.

Dado: Polígono regular *ABCDE*... con centro en *O*, apotema de longitud *r*, perímetro *p*.
Demuéstrese: Área de *ABCDE*... $= \frac{1}{2}rp$
Plan: al unir todos y cada uno de los vértices con el centro, se obtienen triángulos congruentes, la suma de cuyas áreas es igual al área del polígono regular.



DEMOSTRACIÓN:

Proposición	Argumento
1. Dibújense $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, ...	1. Por dos puntos pasa sólo una recta.
2. La altura de cada triángulo así formado es *r*	2. Las apotemas de polígonos regulares son congruentes.
3. Área de $\triangle AOB = \frac{1}{2}ar$ $\triangle BOC = \frac{1}{2}br$ $\triangle COD = \frac{1}{2}cr$	3. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de su base y altura.
4. Área del polígono regular $ABCDE... = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + ...$ $= \frac{1}{2}r(a + b + c + ...)$	4. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
5. $p = a + b + c + ...$	5. El todo es igual a la suma de sus partes.
6. Área de $ABCDE... = \frac{1}{2}rp$	6. Postulado de sustitución

17

Extensión de la geometría plana a la geometría sólida

17.1 SÓLIDOS

Un *sólido* es la porción de espacio comprendida entre superficies planas y curvas.

Así, la *pirámide* , el *cubo* , el *cono* , el *cilindro*  y la *esfera* , son sólidos.

Un sólido tiene tres dimensiones: largo, ancho y espesor.

Los ejemplos prácticos de sólidos incluyen una caja, un ladrillo, un bloque y una pelota. Éstos no son, sin embargo, los sólidos puros e ideales que conciernen a la geometría sólida. La geometría sólida estudia las propiedades geométricas de sólidos "perfectos". Éstas son su forma, tamaño, la relación de sus partes, y la relación entre sólidos; se descartan propiedades físicas tales como su color, peso o textura.

17.1A Clasificación de sólidos

Poliedros

Un *poliedro* es un sólido acotado únicamente por superficies planas. Así, la pirámide y el cubo son poliedros. El cono, el cilindro y la esfera no son poliedros, ya que tienen superficies curvas.

Las superficies que limitan a un poliedro son las caras; las líneas que resultan de la intersección de las caras son las aristas, y los puntos de intersección de las aristas son los vértices. La diagonal de un poliedro une dos vértices que no están en la misma cara.

Así, el poliedro mostrado en la figura 17-1 tiene seis caras. Dos de ellas son triángulos (*ABC* y *CFG*), y las otras cuatro son cuadriláteros. Nótese que $\overline{AF}$ es una diagonal del poliedro. El polígono sombreado *HJKL* es una *sección del poliedro* tomada por la intersección de un sólido y un plano que pasa a través de él.

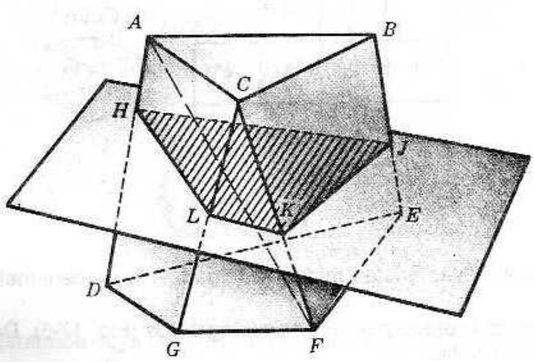


Fig. 17-1

El *ángulo diedral* es el ángulo que se forma entre dos caras que se intersectan. El ángulo entre las portadas de un libro es un ángulo diedral. Mientras más se abre el libro, el ángulo diedral crece siendo primero agudo, pasa a ser recto, obtuso y después derecho. El ángulo diedral puede calcularse encontrando el ángulo plano entre dos líneas, una en cada una de las caras, y sobre un plano perpendicular a la intersección entre las caras.

Prismas

Un *prisma* (Fig. 17-2) es un poliedro en el cual dos de sus caras son polígonos paralelos y las caras restantes son paralelogramos. Las bases de un prisma son los polígonos paralelos. Éstos pueden tener cualquier número de lados. Las *caras laterales* son paralelogramos. La distancia entre las dos bases es h; se calcula sobre una línea que forma un ángulo recto con ambas bases.

Un *prisma recto* es un prisma cuyas caras laterales son rectángulos. La distancia h es la altura de cualquier cara lateral.

Un *sólido rectangular* es un prisma acotado por seis rectángulos. Este sólido se puede construir por medio de un patrón de seis rectángulos, como se muestra en la figura 17-3, doblando a lo largo de las líneas punteadas. La longitud l, el ancho w, y la altura h son sus dimensiones.

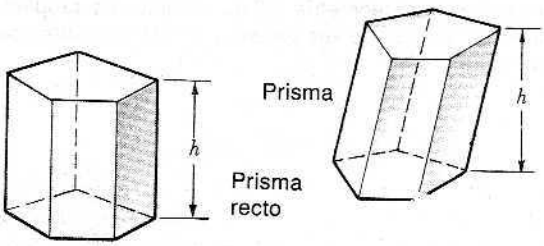


Fig. 17-2

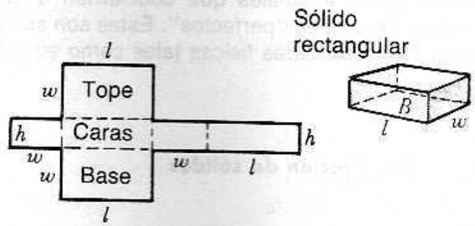


Fig. 17-3

Un *cubo* es un sólido rectangular acotado por seis cuadrados. Éste se puede construir por medio de un patrón de seis cuadrados, como se muestra en la figura 17-4, doblando a lo largo de las líneas punteadas. Cada una de las dimensiones iguales está representada por e en el diagrama.

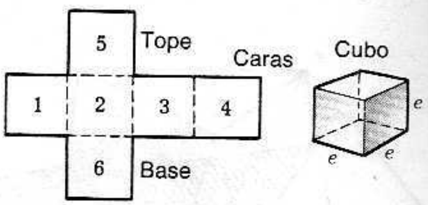


Fig. 17-4

Una *unidad cúbica* es un cubo cuyas aristas miden 1 unidad. Así, un centímetro cúbico es un cubo cuya arista mide 1 cm de longitud.

Un *paralelepípedo* es un prisma acotado por seis paralelogramos (Fig. 17-5). De modo que un sólido rectangular y un cubo son paralelepípedos especiales.

La tabla de la página siguiente muestra algunas relaciones entre polígonos en geometría plana y la relación correspondiente entre poliedros en geometría sólida.

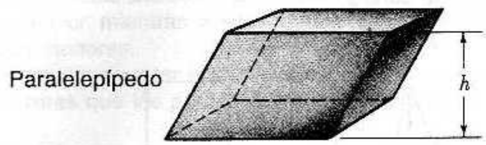


Fig. 17-5

Geometría plana		Geometría de los sólidos
Polígono	↔	Poliedro
↓		↓
Cuadrilátero	↔	Prisma
↓		↓
Paralelogramo	↔	Paralelepípedo
↙ ↘		↙ ↘
Rectángulo Cuadrado		Sólido rectangular Cubo

Pirámides

Una *pirámide* es un poliedro cuya base es un polígono y cuyas otras caras se encuentran en un punto, su *vértice*. La base (B en la Fig. 17-6) puede tener cualquier número de lados. Sin embargo, las otras caras deben ser triángulos. La altura h, es la distancia desde el vértice a la base, la longitud de una línea desde el vértice en ángulo recto con la base.

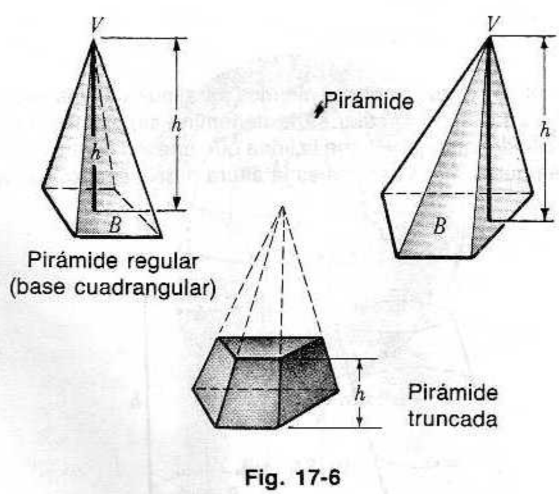


Fig. 17-6

Una *pirámide regular* es una pirámide cuya base es un polígono regular y cuya altura une el vértice con el centro de la base.

Una *pirámide truncada* es la parte de una pirámide que resulta si la parte superior de la pirámide se corta por medio de un plano paralelo a la base. Nótese en la figura 17-6 que sus caras laterales son trapezoides.

Conos

Un *cono circular* (Fig. 17-7) es un sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral termina en un punto. (A un cono circular se le denomina simplemente cono.)

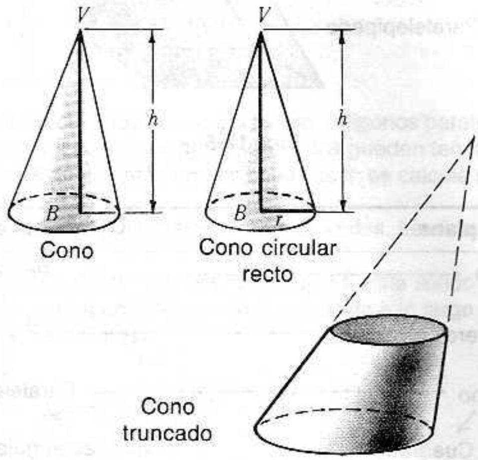


Fig. 17-7

Un *cono circular recto* se forma al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Este cateto se convierte en la altura h del cono, y el otro cateto se convierte en el radio de la base.

Un *cono truncado* es la parte de un cono que resulta si se corta la parte superior del cono por medio de un plano paralelo a la base.

Cilindros

Un *cilindro circular* (Fig. 17-8) es un sólido cuyas bases son círculos paralelos y cuyas secciones transversales paralelas a las bases son también círculos. (A un cilindro circular se le denomina simplemente cilindro.)

Un *cilindro circular recto* es un cilindro circular tal que la línea que une los centros de las dos bases es perpendicular a los radios de las bases. La línea que une los centros es la altura h del cilindro, y el radio de las bases es el radio r del cilindro.

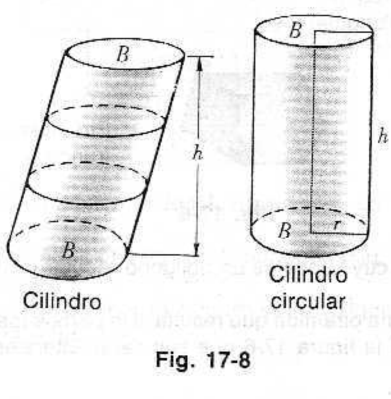


Fig. 17-8

Esferas

Una *esfera* es un sólido tal que cualquier punto de su superficie equidista de un punto fijo, su centro.

Una esfera se forma al rotar un semicírculo alrededor de su diámetro como eje. El punto terminal externo del radio perpendicular al eje genera un *círculo mayor*, mientras que los puntos terminales externos de las otras cuerdas perpendiculares al diámetro generan *círculos menores*.

Así, la esfera O en la figura 17-9 resulta de rotar el semicírculo $\overset{\frown}{ACB}$ alrededor de $\overline{AB}$ como eje. En el proceso, el punto C genera un círculo mayor mientras que los puntos E y G generan círculos menores.

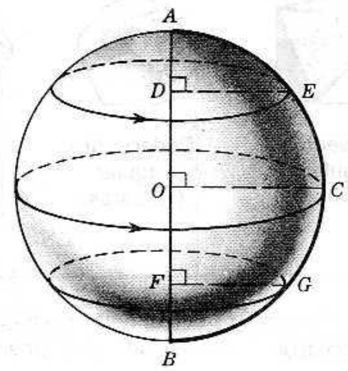


Fig. 17-9

Es más fácil entender la manera como se localizan los puntos sobre la superficie terrestre si se considera a la Tierra como una esfera formada al rotar el semicírculo NOS en la figura 17-10, el cual pasa por Greenwich, Inglaterra (cerca de Londres), alrededor de NS como eje. El punto O, a la mitad del camino entre N y S, genera el *ecuador*, EQ. Los puntos A y B generan *paralelos de latitud*, los cuales son círculos menores sobre la superficie terrestre paralelos al ecuador. Cada posición del semicírculo rotado es un semi-meridiano o *longitud*. (Un *meridiano* es un círculo mayor que pasa por los polos Norte y Sur.) Al meridiano que pasa por Greenwich se le denomina meridiano Primo.

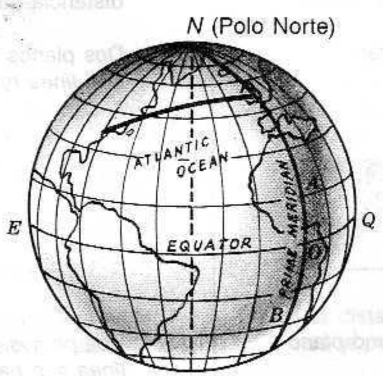


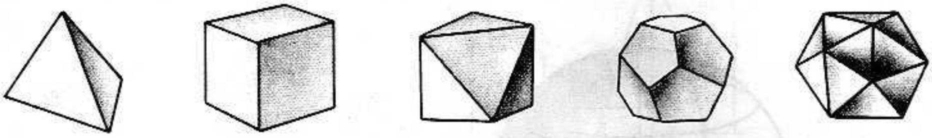
Fig. 17-10

Si se utiliza la intersección entre el ecuador y el meridiano Primo como origen, se puede localizar la ciudad de Nueva York a $40°48\frac{1}{2}'$ de latitud norte y $73°57\frac{1}{2}'$ de longitud oeste. El arco remarcado que se muestra sobre el globo terráqueo es un arco del círculo mayor que pasa por Nueva York y Londres. Los arcos de este tipo determinan la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie terrestre. Se puede encontrar esta línea si se estira una liga elástica entre Nueva York y Londres, sobre un globo terráqueo.

17.1B Poliedros regulares

Los poliedros regulares son sólidos que tienen polígonos regulares como caras, de manera que en cada vértice se intersecta el mismo número de caras. Sólo existen cinco sólidos de este tipo, como se muestra en la figura 17-11. Nótese que sus caras son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

Los hexágonos regulares no pueden ser caras de poliedros regulares, ya que si tres hexágonos regulares tienen un vértice en común (Fig. 17-12), la suma de los tres ángulos interiores en este vértice sería 3(120°) o 360°. Como resultado, los tres hexágonos regulares estarían en un mismo plano, de modo que no pueden formar un sólido.



Tetraedro regular (4 caras) | Hexaedro regular (6 caras) | Octaedro regular (8 caras) | Dodecaedro regular (12 caras) | Icosaedro regular (20 caras)

Fig. 17-11

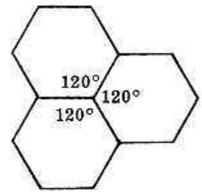
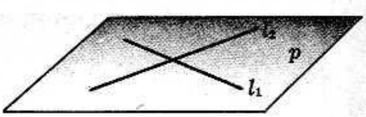
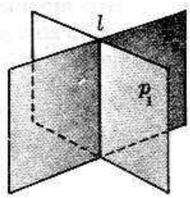
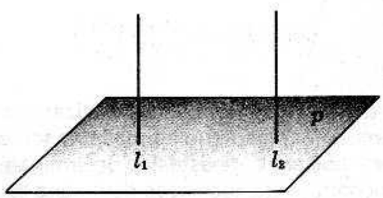
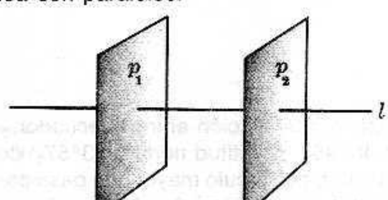


Fig. 17-12

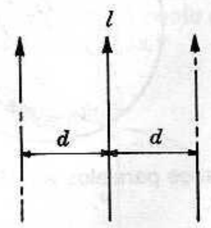
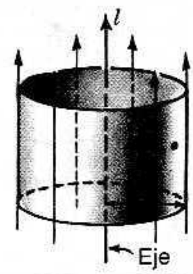
17.2 EXTENSIONES A LA GEOMETRÍA SÓLIDA

17.2A Extensiones de los principios de la geometría plana a principios de geometría espacial

"Esfera", en geometría espacial corresponde a "círculo" en geometría plana. Similarmente, "plano" corresponde a "línea recta". Si se intercambia "círculo" por "esfera", o "línea recta" por "plano", puede intercambiarse cualquiera de los siguientes *principios duales*. Cuando se efectúa esto, muchos de los principios de la geometría plana, principios con los cuales se está familiarizado, se convierten en principios de la geometría espacial.

Proposiciones duales relacionadas	
1. Todo punto sobre un *círculo* está a una distancia de un radio de su centro.	1. Todo punto sobre una *esfera* está a una distancia de un radio de su centro.
2. Dos *líneas* rectas que se intersectan determinan un *plano*. 	2. Dos planos que se intersectan determinan una *línea recta*. 
3. Dos *líneas* perpendiculares al mismo *plano* son paralelas. 	3. Dos *planos* perpendiculares a una misma *línea* son paralelos. 

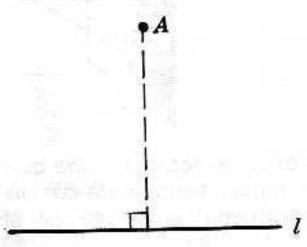
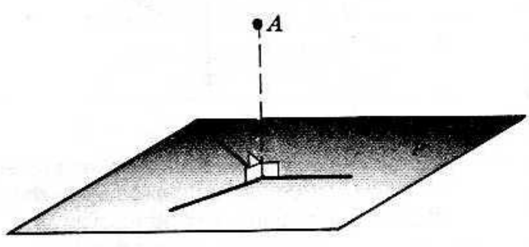
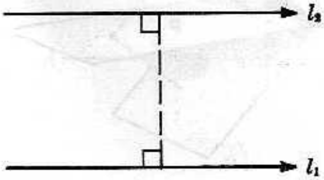
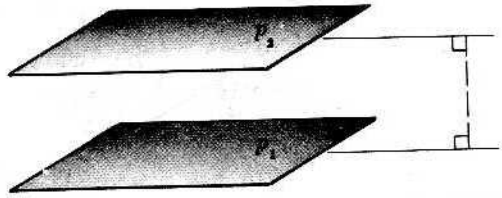
Al obtener proposiciones duales, debe asegurarse de que se realice un intercambio completo de los términos. Si el intercambio es incompleto, como en el siguiente par de proposiciones, no hay dualidad.

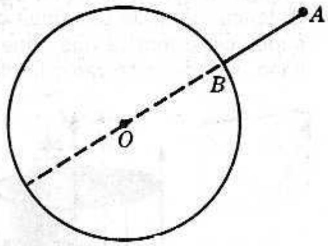
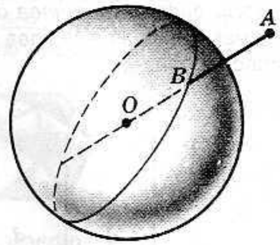
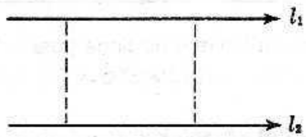
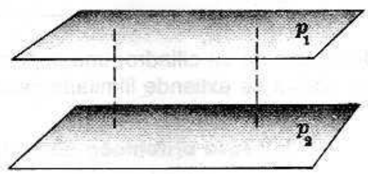
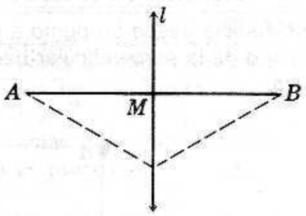
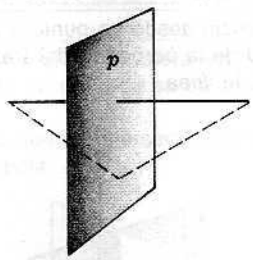
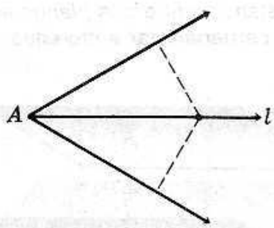
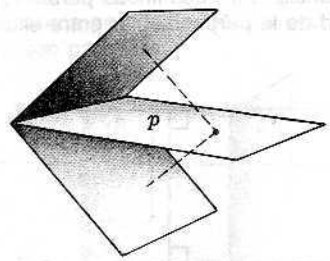
Proposiciones duales relacionadas	
4. El lugar geométrico de los puntos a una distancia dada de una *línea* dada es un par de líneas paralelas a la línea dada y a la distancia dada. 	4. El lugar geométrico de los puntos a una distancia dada de una *línea* dada es una superficie cilíndrica que tiene como eje la línea dada y como radio la distancia dada. 

A diferencia de un cilindro, una superficie cilíndrica se extiende sin límite y no tiene bases. De igual modo, una superficie cónica se extiende ilimitadamente y no tiene base.

Extensión de los principios de distancia

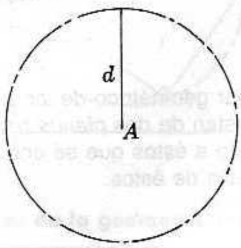
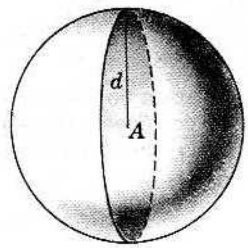
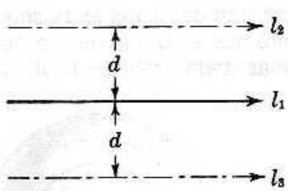
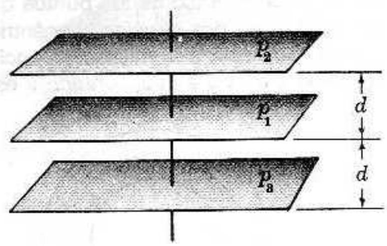
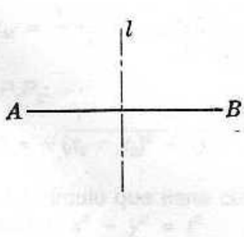
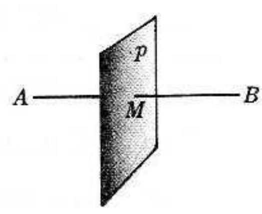
He aquí algunas proposiciones duales relacionadas con distancia —en el plano y en el espacio.

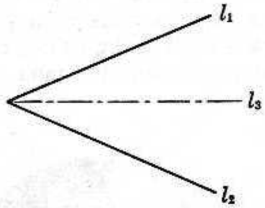
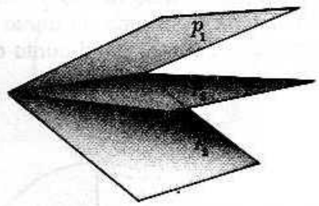
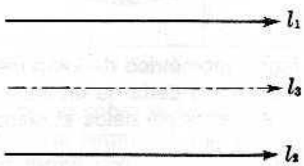
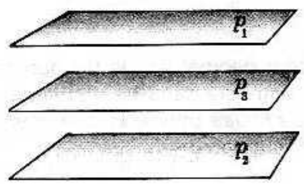
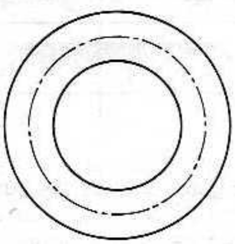
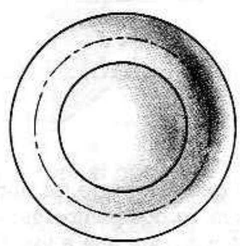
Distancia en el plano	**Distancia en el espacio**
1. La distancia desde un punto a una *línea* es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto a la *línea*. 	1. La distancia desde un punto a un *plano* es la longitud de la perpendicular desde el punto al *plano*. 
2. La distancia entre dos *líneas* paralelas es la longitud de la perpendicular entre ellas. 	2. La distancia entre dos *planos* es la longitud de la perpendicular entre ellos. 

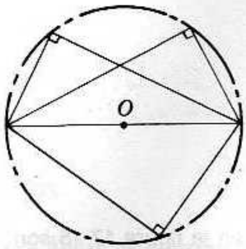
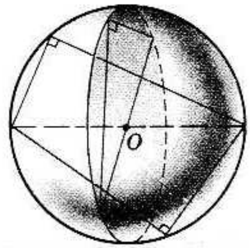
3. La distancia desde un punto a un *círculo* es la longitud del segmento externo de la secante desde el punto, a través del centro del *círculo*.	3. La distancia desde un punto a una *esfera* es la longitud del segmento externo de la secante desde el punto a través del centro de la *esfera*.
	
4. Las *líneas* paralelas equidistan en todo punto.	4. Los *planos* paralelos equidistan en todos sus puntos.
	
5. Cualquier punto sobre la *línea* que es la mediatriz de un segmento es equidistante de los puntos terminales del segmento.	5. Todo punto sobre el *plano* bisector de un segmento es equidistante de los puntos terminales del segmento.
	
6. Todo punto sobre la *bisectriz* del ángulo entre dos *líneas* es equidistante a los lados del ángulo	6. Todo punto sobre el *plano* que sea bisector del ángulo diedro entre dos *planos* es equidistante de los lados del ángulo.
	

Extensión de los principios sobre lúgares geométricos

Las siguientes proposiciones duales tratan sobre lugares geométricos —en el plano y en el espacio.

Lugares geométricos en el plano	Lugares geométricos en el espacio
1. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es un *círculo* cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada.  	1. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es una *esfera* cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es la distancia dada. 
2. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una *línea* dada es un *par de líneas* paralelas a la *línea* dada, a la distancia dada.  	2. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un *plano* dado es un par de *planos* paralelos al *plano* dado, a la distancia dada. 
3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos es la *línea* mediatriz del segmento que une a los dos puntos.  	3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos es el *plano* que es el bisector perpendicular del segmento que une a los dos puntos. 

Lugares geométricos en el plano	**Lugares geométricos en el espacio**
4. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de las *líneas* que son los lados de un ángulo es la *línea* bisectriz del ángulo entre ellas.	4. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los *planos* que son los lados de un ángulo diedral es el *plano* bisector del ángulo entre éstos.
	
5. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *líneas* paralelas es la *línea* paralela a éstas que está a la misma distancia de éstas.	5. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *planos* paralelos es el *plano* paralelo a éstos que se encuentra a la misma distancia de éstos.
	
6. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *círculos* concéntricos es el *círculo* que está a la misma distancia de los *círculos* dados y es concéntrico a éstos.	6. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos *esferas* concéntricas es la *esfera* que está a la misma distancia de las *esferas* dadas y es concéntrica a éstas.
	

Lugares geométricos en el plano	Lugares geométricos en el espacio
7. El lugar geométrico de los vértices de un triángulo rectángulo que tienen una hipotenusa dada es el círculo que tiene a la hipotenusa como diámetro. 	7. El lugar geométrico de los vértices de los triángulos rectángulos que tienen una hipotenusa dada es la *esfera* cuyo diámetro es la hipotenusa. 

17.2B Extensiones de la geometría analítica al espacio tridimensional

La geometría analítica de dos dimensiones puede extenderse fácilmente a tres dimensiones. La figura 17-13 muestra los ejes para dos y tres dimensiones; el eje z es perpendicular al eje x y al eje y. En la figura, las flechas indican la dirección positiva, y las líneas punteadas los ejes negativos.

He aquí cuatro extensiones de la geometría plana a la geometría en el espacio.

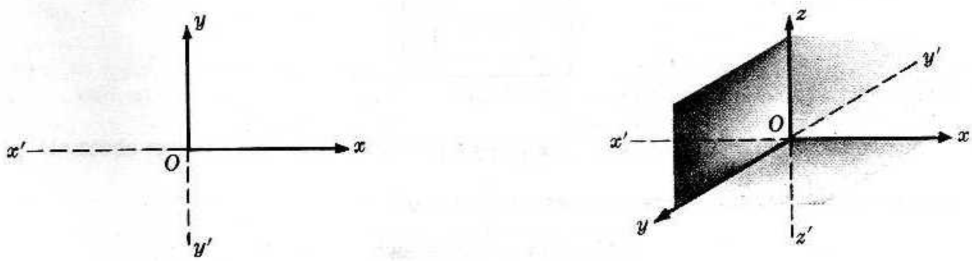


Fig. 17-13

Geometría analítica en el plano	Geometría analítica en el espacio
1. Coordenadas: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$	1. Coordenadas: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$
2. Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	2. Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$
3. Distancia P_1P_2: $d = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	3. Distancia P_1P_2: $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
4. Ecuación del círculo que tiene como centro al origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$	4. Ecuación de la esfera que tiene como centro al origen y radio r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

17.3 ÁREAS DE SÓLIDOS: MEDIDAS CUADRADAS

El área de cada una de las caras del cubo en la figura 17-14 es $A = e^2$. El área de superficie total S del *cubo* es por lo tanto

$$S = 6e^2$$

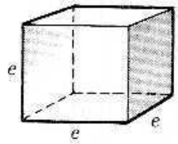


Fig. 17-14

Las áreas de los seis rectángulos que forman al sólido rectangular en la figura 17-15 son:

$A = lw$	para las caras superior e inferior
$A = lh$	para las caras frontal y posterior
$A = wh$	para las caras laterales

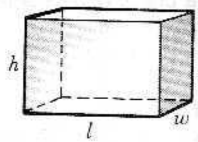


Fig. 17-15

El área de superficie total S del *sólido rectangular* es, por lo tanto

$$S = 2lw + 2lh + 2wh$$

El área de superficie total de la *esfera* en la figura 17-16 es

$$S = 4\pi r^2$$

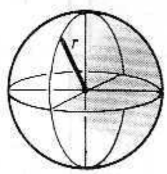


Fig. 17-16

El área de superficie total S del *cilindro circular recto* en la figura 17-17 es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

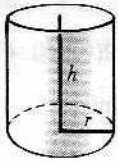


Fig. 17-17

PROBLEMAS RESUELTOS

17.1 Cálculo de las Áreas de Superficie Total de Sólidos

Calcule, aproximando a enteros, el área de superficie total de:

(*a*) Un cubo cuya arista es de 5 m (Fig. 17-18)

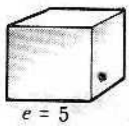


Fig. 17-18

(*b*) Un sólido rectangular con dimensiones de 10 pies, 7 pies y $4\frac{1}{2}$ pies (Fig. 17-19)

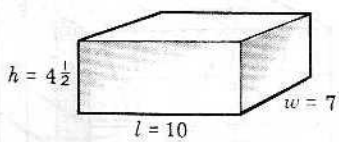


Fig. 17-19

(*c*) Una esfera con radio de 1.1 cm (Fig. 17-20)

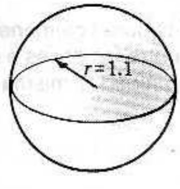


Fig. 17-20

Soluciones

(*a*) $s = 6e^e = 6(5^2) = 150\ \text{m}^2$

(*b*) $s = 2lw + 2lh + 2wh = 2(10)(7) + 2(10)(4\frac{1}{2}) + 2(7)(4\frac{1}{2}) = 293\ \text{pies}^2$

(*c*) $s = 4\pi r^2 = 4(3.14)(1.1^2) = 15.1976\ \text{cm}^2$

17.4 VOLÚMENES DE SÓLIDOS: MEDIDAS CÚBICAS

Una *unidad cúbica* es un cubo cuya arista es de 1 unidad de longitud. Así, una pulgada cúbica es un cubo cuya arista es de 1 pulgada de longitud (Fig. 17-21).

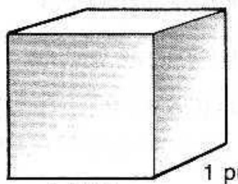


Fig. 17-21

El *volumen de un sólido* es el número de unidades que contiene. Así, una caja con 5 unidades de largo, 3 unidades de ancho y 4 unidades de altura tiene un volumen de 60 unidades cúbicas; es decir, tiene la capacidad o espacio suficiente para contener 60 unidades cúbicas (Fig. 17-22).

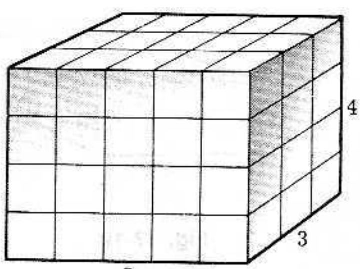


Fig. 17-22

A continuación se presentan algunas fórmulas para volúmenes de sólidos. En estas fórmulas, V es el volumen del sólido, B es el área de la base y h es la distancia entre las bases o entre el vértice y una base. En fórmulas de volumen, este último se da en unidades cúbicas, siendo la unidad la misma de las dimensiones. Así, si el lado de un cubo mide 3 metros, su volumen es 27 metros cúbicos.

1. *Rectángulo sólido* (Fig. 17-23): $V = lwh$
2. *Cilindro* (Fig. 17-24): $V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$

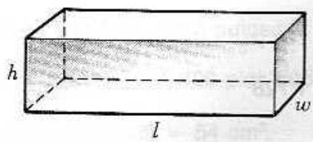


Fig. 17-23

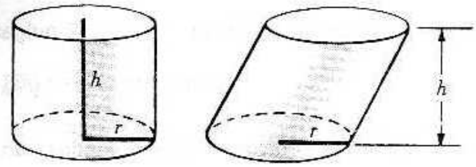


Fig. 17-24

3. *Prisma* (Fig. 17-25): $V = Bh$
4. *Cubo* (Fig. 17-26): $V = e^3$

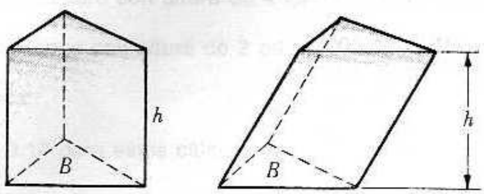


Fig. 17-25

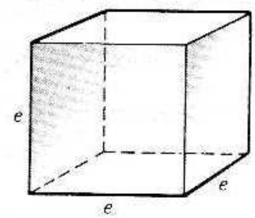


Fig. 17-26

5. *Pirámide* (Fig. 17-27): $V = \frac{1}{3}Bh$
6. *Cono* (Fig. 17-28): $V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. *Esfera* (Fig. 17-29): $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

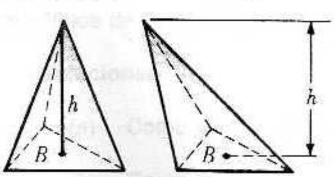


Fig. 17-27

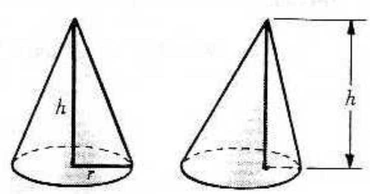


Fig. 17-28

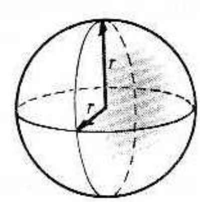


Fig. 17-29

PROBLEMAS RESUELTOS

17.2 Relaciones Entre Unidades Cúbicas

Encuentre el volumen V de

(*a*) Un pie cúbico en pulgadas cúbicas

(*b*) Una yarda cúbica en pies cúbicos

(*c*) Un litro (decímetro cúbico) en centímetros cúbicos

Soluciones

(*a*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 pie = 12 pulgadas

$$V = 12^3 = 1\,728$$

por lo que 1 pie cúbico = 1 728 pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 yarda = 3 pies

$$V = 3^3 = 27$$

por lo que 1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos.

(*c*) $V = e^3$ para un cubo. Como 1 dm^3 = 10 cm^3,

$$V = 10^3 = 1\,000$$

por lo que 1 litro = 1 000 cm^3

17.3 Cálculo de los Volúmenes de Cubos

Calcule el volumen V de un cubo, en pies cúbicos, si una arista es de (*a*) 4 pulgadas, (*b*) 4 pies, (*c*) 4 yardas.

Soluciones

Para calcular el volumen en pies cúbicos, se debe expresar el lado en pies.

(*a*) $V = e^3$ y como 4 pulgadas = $\frac{1}{3}$ pies

$$V = (\tfrac{1}{3})^3 = \tfrac{1}{27} \text{ pies}$$

(*b*) $V = e^3 = 4^3 = 64$ pies^3.

(*c*) $V = e^3$, y como 4 yardas = 12 pies

$$V = 12^3 = 1\,728 \text{ pies}^3$$

17.4 Cálculo de los Volúmenes de un Sólido Rectangular, un Prisma y una Pirámide

Calcule el volumen de

(*a*) Un sólido rectangular que tiene de longitud 6 pulgadas, de ancho 4 pulgadas y de altura 1 pie.

(*b*) Un prisma que tiene de altura 15 yardas y una base triangular de 120 pies cuadrados.

(*c*) Una pirámide que tiene 8 cm de altura y una base cuadrada cuyo lado es de $4\frac{1}{2}$ cm.

Soluciones

(*a*) $V = lwh = 6(4)(12) = 288$ pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = Bh = 120(45) = 5\,400$ pies cúbicos $= 200$ yardas cúbicas.

(*c*) $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}(\frac{9}{2})^2(8) = 54\ \text{cm}^3$.

17.5 Cálculo de los Volúmenes de una Esfera, Cilindro y Cono

Calcule el volumen aproximando el resultado al entero más cercano, de

(*a*) Una esfera con radio de 19 pulgadas.

(*b*) Un cilindro con altura de 4 yardas y una base cuyo radio es de 2 pies.

(*c*) Un cono con altura de 2 pies y una base cuyo radio es de 2 yardas.

Soluciones

Sea $\pi = 3.14$ para estos cálculos

(*a*) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(3.14)10^3 = 4\,186\frac{2}{3}$ pulgadas cúbicas.

(*b*) $V = \pi r^2 h = (3.14)(2^2)12 = 150.72$ pies cúbicos.

(*c*) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}(3.14)(6^2)(2) = 75.36$ pies cúbicos.

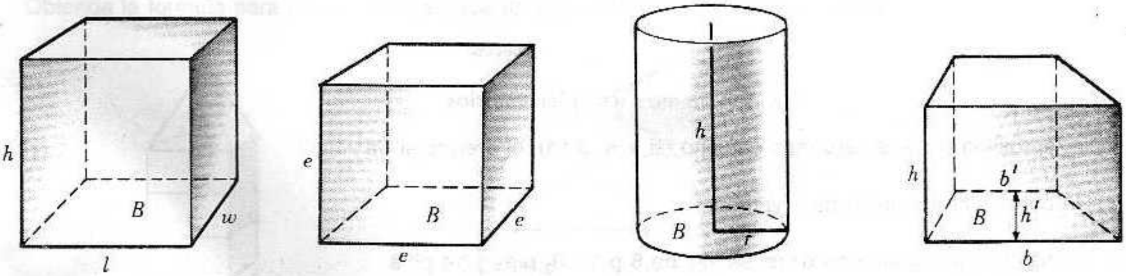
17.6 Derivación de Fórmulas a Partir de $V = Bh$

A partir de $V = Bh$, la fórmula para el volumen de un prisma o un cilindro, obtenga las fórmulas para el volumen de los sólidos de la figura 17-30.

Soluciones

(*a*) Como $B = lw$, $V = Bh = lwh$.

(*b*) Como $B = e^2$ y $h = e$, $V = Bh = (e^2)e = e^3$.



(*a*) Sólido rectangular

(*b*) Cubo

(*c*) Cilindro circular

(*d*) Prisma recto con base trapezoidal

Fig. 17-30

(*c*) Como $B = \pi r^2$, $V = Bh = \pi r^2 h$.

(*d*) Como $b = \frac{h'}{2}(b + b')$, $V = Bh = \frac{h'}{2}(b + b')h = \frac{hh'}{2}(b + b')$.

17.7 FÓRMULAS PARA VOLÚMENES COMBINADOS

Indique la fórmula para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-31.

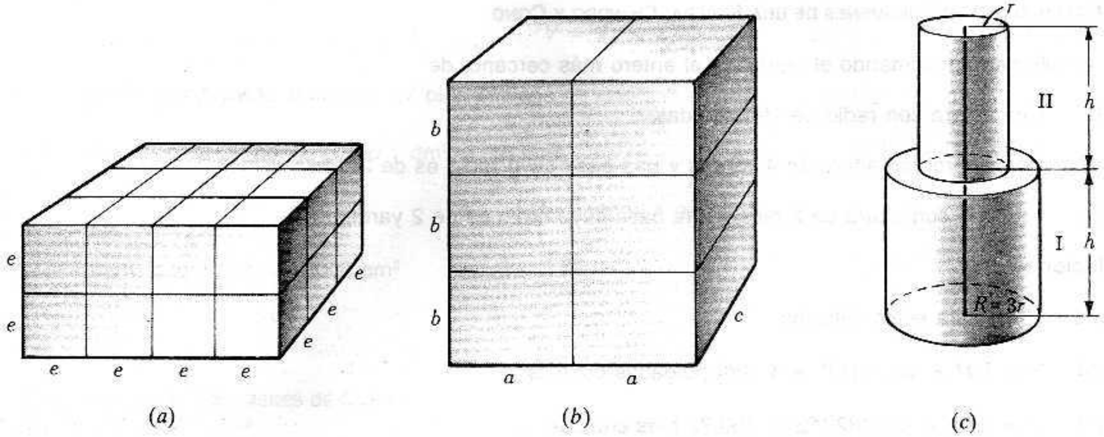


Fig. 17-31

Soluciones

(*a*) $V = lwh$ para este sólido. Ahora $l = 4e$, $w = 3e$ y $h = 2e$. De modo que

$$V = (4e)(3e)(2e) = 24e^3.$$

(*b*) $V = lwh$ de nuevo. Aquí $l = 2a$, $w = c$ y $h = 3b$. Por lo que

$$V = (2a)(c)(3b) = 6abc.$$

(*c*) Aquí $V = V_{\text{cil. I}} + V_{\text{cil. II}} = \pi R^2 h + \pi r^2 h$. Pero $R = 3r$, así

$$V = \pi(3r)^2 h + \pi r^2 h = 10\pi r^2 h.$$

Problemas complementarios

1. Calcule, aproximando al entero más cercano (si $\pi = 3.14$), el área total de (17.1)

(*a*) Un cubo con una arista de 7 yardas

(*b*) Un sólido rectangular con dimensiones de 8 pies, $6\frac{1}{2}$ pies y 14 pies

(*c*) Una esfera con radio de 30 m

(*d*) Un cilindro de revolución con radio de 10 rd y una altura de $4\frac{1}{2}$ rd [*Sugerencia*: Utilice $T = 2\pi r(r + h)$]

2. Calcule el volumen de

(*a*) Una yarda cúbica en pulgadas cúbicas

(*b*) Un metro cúbico en centímetros cúbicos (1 m = 100 cm)

3. Calcule, aproximando a la pulgada cúbica más cercana, el volumen de un cubo cuya arista es de (*a*) 3 pulgadas; (*b*) $4\frac{1}{2}$ pulgadas; (*c*) 7.5 pulgadas; (*d*) 0.3 pies; (*e*) 1 pie 2 pulgadas. (17.3)

4. Calcule, aproximando al entero más cercano, el volumen de (17.4)

(*a*) Un sólido rectangular con longitud de 3 pulgadas, ancho de $8\frac{1}{2}$ pulgadas y altura de 8 pulgadas

(*b*) Un prisma que tiene de altura 2 pies y una base cuadrada cuyo lado es de 3 yardas.

(*c*) Una pirámide que tiene altura 2 yardas y una base cuyas áreas es de 6.4 pies cuadrados.

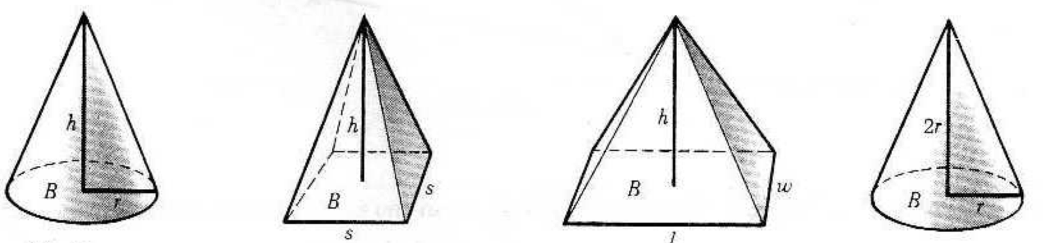
5. Calcule, aproximando al entero más cercano, el volumen de (17.5)

(*a*) Una esfera con radio de 6 m

(*b*) Un cilindro que tiene de altura 10 pies y una base cuyo radio es de 2 yardas.

(*c*) Un cono que tiene de altura 3 yardas y una base cuyo radio es de 1.4 pies

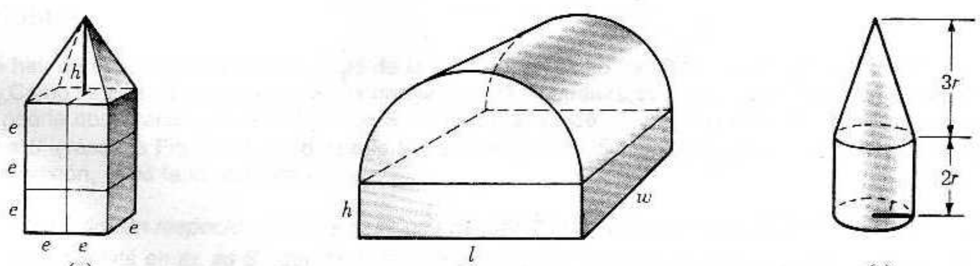
6. A partir de $V = \frac{1}{3}Bh$, la fórmula del volumen para una pirámide o un cono, obtenga las fórmulas para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-32.



(*a*) Cono (*b*) Pirámide con base cuadrada. (*c*) Pirámide con base rectangular (*d*) Cono donde $h = 2r$

Fig. 17-32

7. Obtenga la fórmula para el volumen de cada uno de los sólidos de la figura 17-33 (17.7)



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 17-33

18

Transformaciones geométricas

18.1 INTRODUCCIÓN A TRANSFORMACIONES

Si se observan en retrospectiva los 17 capítulos anteriores, se verá que aun cuando se han desarrollado diferentes temas de capítulo en capítulo, a través de este material prevalece una idea común: las *posiciones* de todas las figuras geométricas son *fijas*. Es decir, cuando se considera un triángulo, como el $\triangle ABC$ en la figura 18-1, éste permanece inmóvil. En este capítulo se consideran objetos en geometría mientras cambian su posición. Estos objetos (tales como triángulos, líneas, puntos y círculos) se moverán como resultado de una transformación del plano:

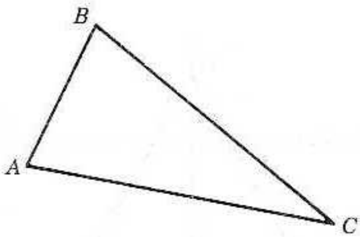


Fig. 18-1

DEFINICIÓN 1: *Una transformación del plano es una regla que asigna a cada punto del plano un punto distinto o el mismo punto.*

Nótese que a *cada* punto del plano se asigna *exactamente un punto*. Los puntos que se asignan a sí mismos se denotan como *puntos fijos*. Si el punto P está asignado al punto Q, se dice que Q es la *imagen* de P, y conversamente, la imagen de Q es P.

18.2 REFLEXIONES

Imagínese que hay un espejo colocado a lo largo de la línea m, en la figura 18-2. ¿Cuál será la imagen del punto S en el espejo? ¿Cómo se describiría el punto S', la imagen de S? Si pudiera colocarse, de hecho, un espejo a lo largo de la línea m, podría observarse que la imagen de S está en l, atrás de m, y que la distancia de S a O es igual a la distancia de O a S' (véase la Fig. 18-3). Se dice que S' es la imagen de S bajo una reflexión sobre la línea m. Nótese que bajo esta reflexión, O es la imagen de O.

DEFINICIÓN 2: *Una reflexión respecto a la línea m es una transformación del plano con la propiedad de que la imagen de S, un punto que no esté en m, es S', donde m es el bisector perpendicular de $\overline{SS'}$; la imagen de cualquier punto O en m es O mismo.*

Se escribe $R_m(S) = S'$ para significar que S' es la imagen de S bajo reflexión respecto a la línea m.

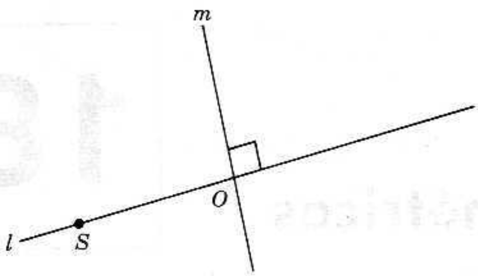


Fig. 18-2

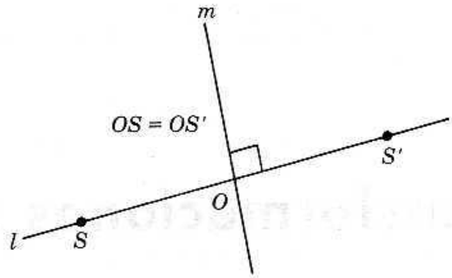


Fig. 18-3

PROBLEMAS RESUELTOS

18.1 Imagen de un Punto

Encontrar la imagen de (*a*) *A*, (*b*) *B*, (*c*) *C*, (*d*) $\overline{AC}$, y (*e*) $\angle DAC$ bajo la reflexión respecto a la línea *t* en la figura 18-4.

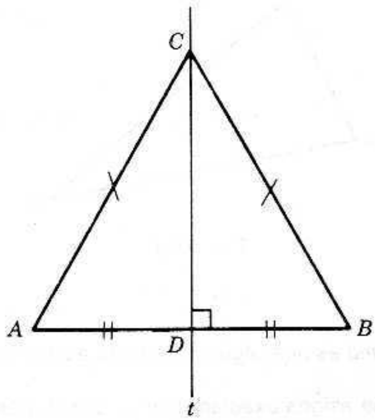


Fig. 18-4

Soluciones

(*a*) *B*, ya que *t* es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$

(*b*) *A*

(*c*) *C*, ya que *C* está en *t*

(*d*) $\overline{BC}$ (¿Por qué?)

(*e*) $\angle DBC$, ya que *D* y *C* son fijos y $R_t\,(B) = A$

18.2 Imagen de un Triángulo

¿Cuál es la imagen del $\triangle ABC$ de la figura 18-4, bajo una reflexión sobre la línea t?

Solución

Dado que $R_t(A) = B$, $R_t(B) = A$, y $R_t(C) = C$ se tiene que $\triangle ABC$ es su propia imagen.

18.2A Simetría respecto a una línea

En los ejemplos anteriores se puede observar que las imágenes de ángulos son ángulos y que las imágenes de segmentos son segmentos cuando se trata de una reflexión respecto a una línea. Cuando una figura es su propia imagen bajo una reflexión respecto a una línea (como lo es el $\triangle ABC$ en la figura 18-4), se dice que la figura tiene *simetría respecto a una línea*.

Definición 3: *Una figura F exhibe simetría respecto a una línea si existe una línea l tal que la imagen de F bajo una reflexión respecto a la línea l, es F misma. En este caso, se dice que l es la línea de simetría o que es un eje de simetría.*

Nótese que cuando una figura exhibe simetría de línea, no todos sus puntos son necesariamente fijos. En la figura 18-4, sólo los puntos C y D son fijos en el triángulo ABC.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.3 Localización del Eje de Simetría

En la figura 18-5, encontrar todos los ejes de simetría para el hexágono regular $ABCDEF$.

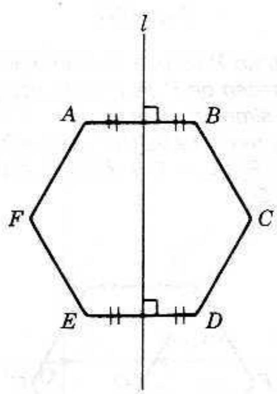


Fig. 18-5

Solución

$\overline{AD}$, $\overline{FC}$, $\overline{BE}$ y la línea indicada l, todos son ejes de simetría. Encontrar dos más.

18.4 Descubrimiento de la Simetría de Línea

¿Cuál de los objetos en la figura 18-6 exhibe simetría de línea?

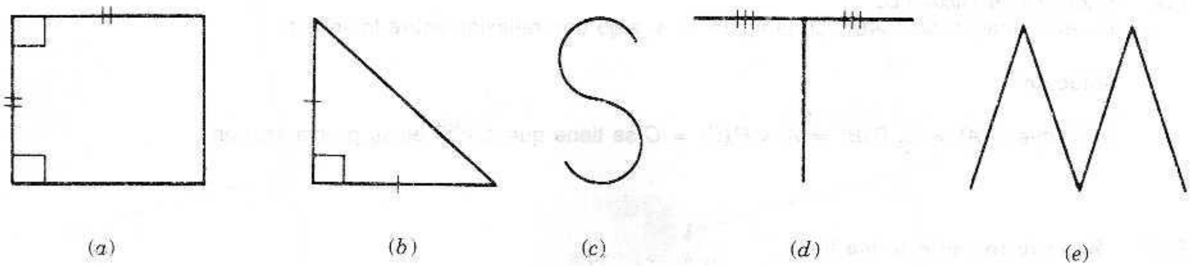


Fig. 18-6

Solución

Todos excepto (*c*)

18.2B Simetría puntual

No sólo es posible transformar el plano mediante reflexiones respecto a una línea, sino que también mediante reflexiones respecto a un punto. En la figura 18-7, por ejemplo, se puede reflejar Q en el punto P, encontrando el punto Q' tal que $QP = PQ'$.

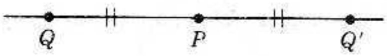


Fig. 18-7

Definición 4: *Una reflexión respecto a un punto P es una transformación del plano tal que la imagen de un punto Q, excepto P es Q', donde QP = PQ', y la imagen de P es P (esto es, P es fijo). Si la figura F es su propia imagen bajo tal transformación, se dice que F exhibe simetría puntual.*

En la figura 18-8 se muestra un hexágono regular $ABCDEF$, con $AO = OD$. Nótese que A es la imagen de D bajo la reflexión respecto a O. Se usará la notación $R_o(A) = D$ y $R_o(D) = A$ para indicar que A y D son sus imágenes respectivas bajo una reflexión respecto al punto O.

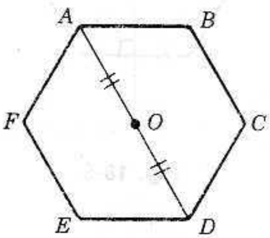


Fig. 18-8

PROBLEMAS RESUELTOS

18.5 Localización de Imágenes Bajo una Reflexión Respecto a un Punto

Con referencia a la figura 18-8, encontrar: (*a*) $R_o(B)$; (*b*) $R_o(C)$; (*c*) $R_o(\overline{AD})$; (*d*) $R_o(\angle AOB)$ y (*e*) $R_o(ABCDEF)$.

Soluciones

(*a*) *E* (*b*) *F* (*c*) $\overline{DA}$ (*d*) $\angle DOE$

(*e*) El hexágono *DEFABC* (así, *ABCDEF* exhibe simetría puntual).

18.6 LOCALIZACIÓN DE SIMETRÍA PUNTUAL

¿Cuál de los siguientes objetos exhibe simetría puntual?

(*a*) Cuadrados (*c*) Triángulos escalenos

(*b*) Rombos (*d*) *S*

Solución

Todos excepto (*c*)

18.3 REFLEXIONES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Dado que un punto puede cambiar de posición bajo una transformación, se tiene que la geometría analítica es una herramienta particularmente útil para describir estas transformaciones. Recuérdese que en geometría analítica se trabaja extensamente con la posición de puntos; la determinación de distancias y la localización de puntos son una gran ayuda en la exploración de las propiedades de las transformaciones.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.7 IMÁGENES BAJO REFLEXIONES (Fig. 18-9)

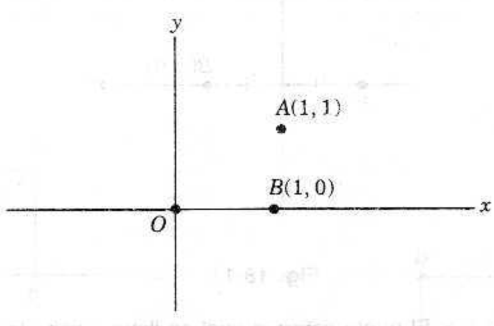


Fig. 18-9

(*a*) ¿Cuál es la imagen del punto *A* bajo una reflexión respecto al eje *x*? ¿Respecto al eje *y*?

(*b*) ¿Cuál es la imagen de *B* bajo una reflexión respecto al eje *y*?

(*c*) ¿Cuál es la imagen de *O* bajo una reflexión respecto al punto *O*?

(*d*) ¿Cuál es la imagen de *B* bajo una reflexión respecto a la línea $y = x$?

(*e*) ¿Cuál es la imagen de A bajo una reflexión respecto a la línea $x = -1$?

(*f*) ¿Cuál es la imagen del $\triangle AOB$ bajo una reflexión respecto al eje y? ¿Bajo una reflexión respecto a O?

Respuestas

(*a*) El punto A' en la figura 18-10 es la imagen de A bajo una reflexión respecto al eje x; las coordenadas de A' son $(1, -1)$. El punto A'' es la imagen de A bajo una reflexión respecto al eje y; $A''(-1, 1)$.

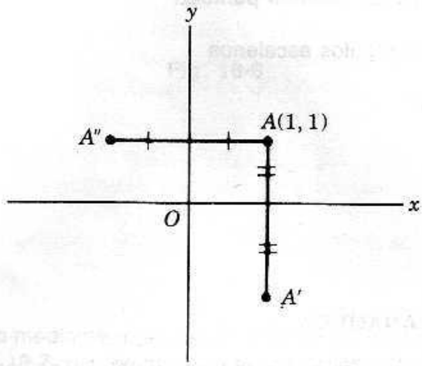


Fig. 18-10

(*b*) El punto B' en la figura 18-11 es la imagen de B bajo una reflexión respecto al eje y. Sus coordenadas son $(-1, 0)$.

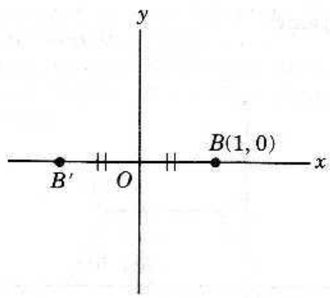


Fig. 18-11

(*c*) El punto O es un punto fijo. El punto sobre el cual se lleva a cabo la reflexión siempre es fijo.

(*d*) $R_l(B) = B'(0, 1)$, en la figura 18-12. Nótese que la línea l es el bisector perpendicular de $\overline{BB'}$.

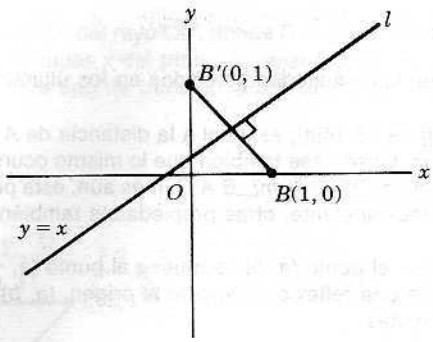


Fig. 18-12

(*e*) $R_m(A) = A'(-3, 1)$, en la figura 18-13. Nótese que m es el bisector perpendicular de $\overline{AA'}$.

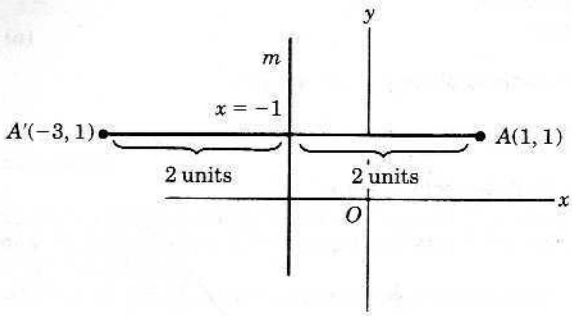


Fig. 18-13

(*f*) La imagen de $\triangle AOB$ bajo una reflexión respecto al eje y es $\triangle A'B'O$ [véase la Fig. 18-14(*a*)], donde $A' = (-1, 1)$, $B' = (-1, 0)$, y $O = (0, 0)$. Su imagen bajo una reflexión respecto al origen es $\triangle A''B''O$ en la figura 18-14(*b*); donde $A'' = (-1, -1)$, $B'' = (-1, 0)$, y $O = (0, 0)$.

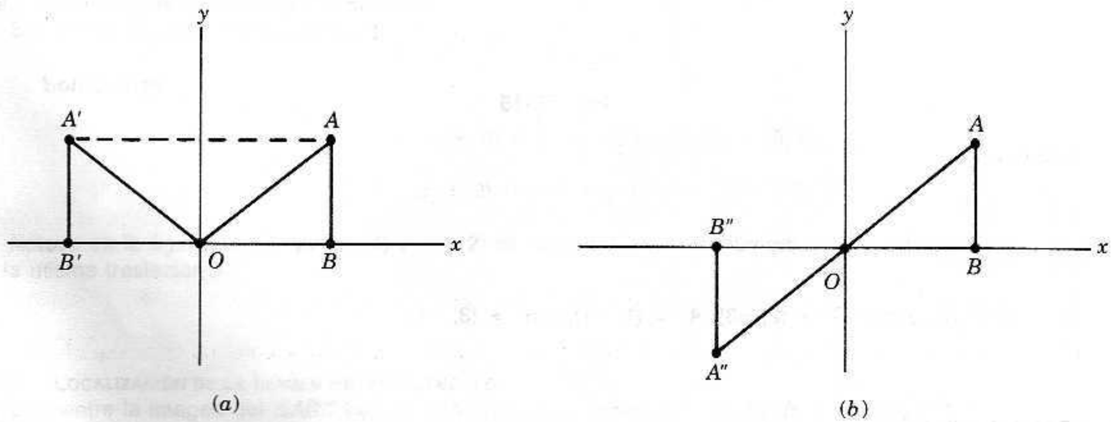


Fig. 18-14

18.3A Patrones en las reflexiones

Se pueden observar varios patrones en los resultados obtenidos en los últimos problemas:

1. La distancia entre A' y B' en la figura 18-14(*a*), es igual a la distancia de A a B. En otras palabras, las distancias son *preservadas* bajo una reflexión. Obsérvese también que lo mismo ocurre con las medidas de los ángulos. En otras palabras, en la figura 18-14(*a*), $m\angle BAO = m\angle B'A'O$; más aún, esta propiedad aparentemente es cierta para otras reflexiones. Como se verá más adelante, otras propiedades también se preservan bajo reflexiones.

2. Bajo una reflexión respecto al eje x, el punto (a, b) se mueve al punto $(a, -b)$; bajo una reflexión respecto al eje y, (a, b) se mueve a $(-a, b)$; y bajo una reflexión respecto al origen, (a, b) se mueve a $(-a, -b)$. Estos patrones sólo son válidos para estas reflexiones.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.8 MÁS IMÁGENES BAJO REFLEXIONES
En la figura 18-15, encuentre:

(*a*) La reflexión de C respecto al eje y

(*b*) La reflexión de B respecto al origen

(*c*) La reflexión del $\triangle CAB$ respecto al eje x

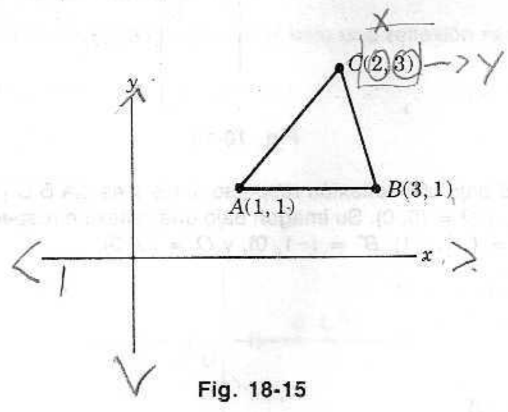


Fig. 18-15

Soluciones

(*a*) $(-2, 3)$

(*b*) $(-3, -1)$

(*c*) $\triangle C'A'B'$, donde $C' = (2, -3)$, $A' = (1, -1)$, y $B' = (3, -1)$.

18.4 TRANSLACIONES

En la figura 18-16(*a*), sea el $\triangle ABC$, y sea la transformación que consiste en agregar 1 a cada coordenada x, y de agregar 2 a cada coordenada y. El resultado se muestra en la figura 18-16(*b*). Nótese que el $\triangle ABC$ no cambia de forma pero si se mueve en el plano en la dirección del rayo $\overline{OD}$, donde $D = (1, 2)$. La coordenada x de D representa la "cantidad" con la cual se recorren las coordenadas x del triángulo; mientras que la ordenada de D es la "cantidad" con la cual se recorren las coordenadas y. Este tipo de transformación se denota como *traslación*.

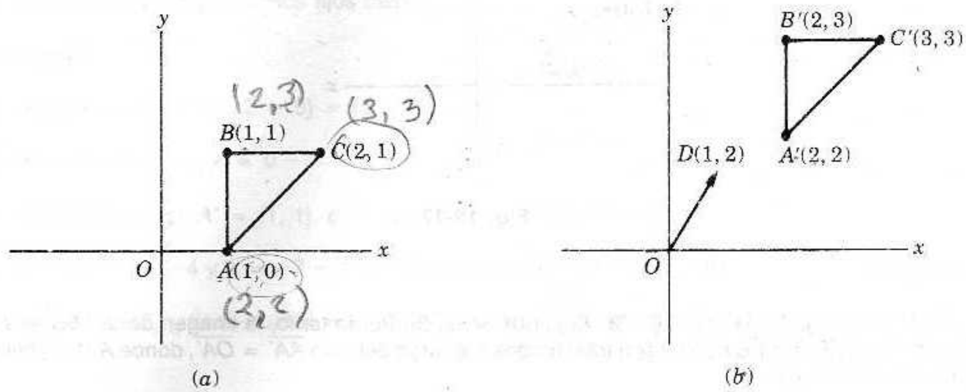


Fig. 18-16

Definición 5: *Una traslación es una transformación del plano tal que la imagen de todo punto* (a, b) *es el punto* $(a + h, b + k)$, *donde* h *y* k *están dadas.*

Una traslación tiene el efecto de mover todo punto la *misma distancia* en la *misma dirección*. Se utilizará la notación $T_{(h,k)}(a, b)$ para indicar la imagen de (a, b) bajo una traslación de h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y.

Tal y como ocurre en una reflexión, la distancia y la medida de los ángulos son propiedades preservadas bajo una traslación.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.9 Localización de la Imagen de un Punto

Encuentre: $T_{(-1,1)}(1, 4)$ y $T_{(-1,1)}(-1, 2)$.

Soluciones

$$T_{(-1,1)}(1, 4) = (1 + (-1), 4 + 1) = (0, 5)$$

$$T_{(-1,1)}(-1, 2) = (-1 + (-1), 2 + 1) = (-2, 3)$$

Nótese en la figura 18-17, que $(1, 4)$ y $(-1, 2)$ se traslada el mismo número de unidades en la misma dirección por la misma traslación T.

18.10 Localización de la Imagen de un Triángulo

Encuentre la imagen del $\triangle ABC$ bajo la traslación $T_{(1,2)}$, donde $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C(1, 0)$.

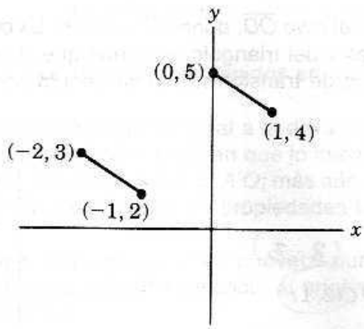


Fig. 18-17

Soluciones

$T_{(1,2)}(0, 0) = (1, 2)$, $T_{(1,2)}(1, 1) = (2, 3)$, $T_{(1,2)}(1,0) = (2, 2)$. Por lo tanto, la imagen del $\triangle ABC$ es el $\triangle A'B'C'$ en la figura 18-18. Todos los puntos son trasladados a lo largo del rayo $\overline{AA'} = \overline{OA'}$, donde $A'(1, 2)$ tiene las coordenadas de la traslación.

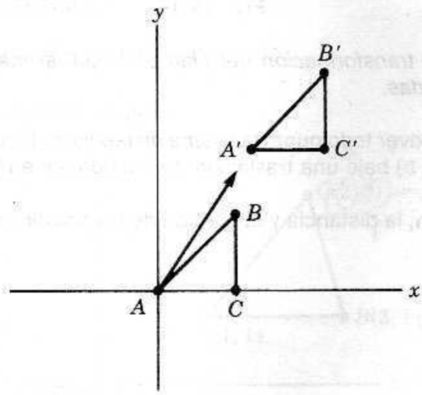


Fig. 18-18

18.11 Localización de las Imágenes Desde Otra Imagen

Bajo una cierta traslación, $T(5, 2) = (7, 1)$. Encuentre $T(-3, 6)$ bajo la misma traslación.

Solución

Se tiene que $T_{(h,k)}(5, 2) = (7, 1)$. Así, $5 + h = 7$, o $h = 2$; también $2 + k = 1$, por lo que $k = -1$.
Entonces $T_{(2,-1)}(-3, 6) = (2 + (-3), -1 + 6) = (-1, 5)$

18.12 Localización de Varias Imágenes Bajo una Traslación

(*a*) Encuentre $T_{(-1,0)}(6, 2)$

(*b*) Encuentre h, k si $T_{(h,k)}(1, 7) = (0, 0)$

(*c*) Encuentre la imagen del cuadrado *ABCD* bajo la traslación $T_{(1,1)}$ donde $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, y $D = (1, 1)$.

(*d*) Encuentre $T_{(h,k)}(1, 6)$ si $T_{(h,k)}(4, 1) = (0, -7)$.

(*e*) Encuentre todos los puntos fijos bajo $T_{(-1,4)}$.

Soluciones

(*a*) $T(6, 2) = (6 + (-1), 2 + 0) = (5, 2)$

(*b*) $h = 0 - 1 = -1$; $k = 0 - 7 = -7$

(*c*) $A'B'C'D'$, donde $A' = (1, 1)$, $B' = (2, 1)$, $C' = (1, 2)$, $D' = (2, 2)$.

(*d*) $h = 0 - 4 = -4$ y $k = -7 - 1 = -8$, entonces $T(1, 6) = (-3, -2)$

(*e*) Solamente $T_{(0,0)}$ tiene puntos fijos. Cualquier otra traslación incluyendo $T_{(-1,4)}$ no los tiene.

18.13 Localización de Imágenes de Figuras

Sean $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ y $C = (3, 1)$. Encuentre la imagen bajo $T_{(2,-1)}$ de: (*a*) $\overline{AB}$, (*b*) $\triangle ABC$, (*c*) $\angle CBA$.

Soluciones

(*a*) $\overline{A'B'}$, donde $A' = (3, 0)$ y $B' = (4, 1)$

(*b*) $\triangle A'B'C'$, con $C' = (5, 0)$

(*c*) $\angle C'B'A'$

18.5 ROTACIONES

Considérese el cuadrado *ABCD* de la figura 18-19(*a*). Supóngase que el cuadrado se rota 90° alrededor del punto *P*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, tal y como lo muestra la flecha. (Imagínese que el cuadrado está separado de la página pero está sujeto a ella mediante un alfiler a través del punto *P*.) Entonces:

La imagen de *B* será *A*.	La imagen de *C* será *B*.
La imagen de *D* será *C*.	La imagen de *A* será *D*.

Ahora, considérese al punto *S* de la figura 18-19(*b*). El punto puede rotarse 50° alrededor de *P*, por ejemplo, como si fuera uno de los extremos de una regla que estuviera clavada a la página en *P*. La imagen de *S* es *S'*.

En ambas rotaciones, el segmento de *P* al punto que se está rotando, es congruente con el segmento que va de *P* a la imagen de ese punto.

Definición 6: *Una rotación a lo largo de un ángulo de medida θ grados alrededor de un punto P, es una transformación del plano tal que la imagen de P es P y, para cualquier otro punto B ≠ P, la imagen de B es B', donde* $m\angle BPB' = \theta$ *y* $\overline{BP} \cong \overline{B'P}$.

La figura 18-20 muestra *P*, *B*, *B'*, y θ. Si $\theta > 0$, la rotación es en contra de las manecillas del reloj. Si $\theta < 0$, la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

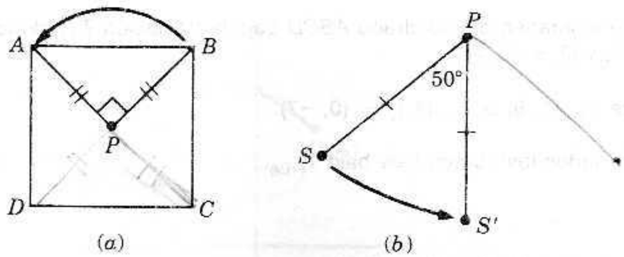


Fig. 18-19

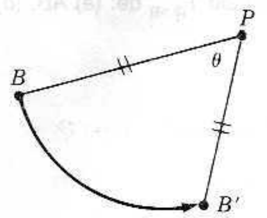


Fig. 18-20

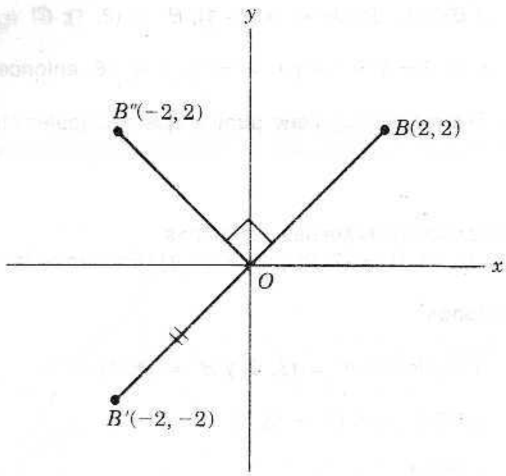


Fig. 18-21

Se usa la notación $\text{Rot}_{(P,\theta)}(B)$ para indicar que el punto B se va a rotar alrededor del punto P, un ángulo de θ grados. Bajo una rotación se preservan las longitudes de segmentos de línea, al igual que las medidas de ángulos.

Sea el punto B en la figura 18-21, y sea la rotación de B de 180°, alrededor de O. La imagen de B es $B'(-2, -2)$. Nótese que B' corresponde también a la imagen de B bajo una reflexión respecto al punto O.

Sea ahora una rotación de B de 90° alrededor de O. La imagen es ahora $B''(-2, 2)$. Nótese que B'' también es la imagen de B bajo una reflexión respecto al eje y.

Atención: estas dos semejanzas de las transformaciones son coincidencias. Aparecen porque se están llevando a cabo rotaciones de 90° y 180° *alrededor del origen*. ¡No se debe generalizar más allá de estos casos! Sin embargo, estas coincidencias dan lugar a las fórmulas siguientes:

$$\text{Rot}_{(O,90^\circ)}(a, b) = (-b, a) \quad \text{y} \quad \text{Rot}_{(O,180^\circ)}(a, b) = (-a, -b)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

18.14 LOCALIZACIÓN DE LAS ROTACIONES DE UN PUNTO

Sea $A = (1, 3)$ y $B = (2, 1)$, encuentre: (*a*) $\text{Rot}_{(O,90^\circ)}(A)$, (*b*) $\text{Rot}_{(O,90^\circ)}(B)$, y (*c*) la imagen de $\overline{AB}$ bajo una rotación de 90° alrededor de O.

Soluciones

(*a*) $\text{Rot}_{(O,90°)}(a, b) = (-b, a) = (-3, 1)$

(*b*) $\text{Rot}_{(O,90°)}(2, 1) = (-1, 2)$

(*c*) La imagen buscada es $\overline{A'B'}$, donde $A' = (-3, 1)$ y $B' = (-1, 2)$ como se muestra en la figura 18-22.

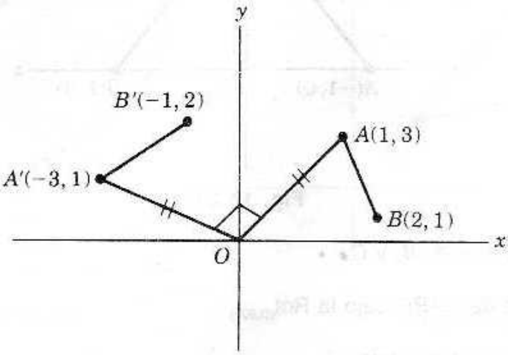


Fig. 18-22

18.15 LOCALIZACIÓN DE LA IMAGEN DE UN TRIÁNGULO

(*a*) Encuentre la imagen del $\triangle ABC$ bajo una rotación de 180° alrededor de O, si $A = (1, 3)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, 1)$.

(*b*) Encuentre la imagen de $\angle BAC$.

Soluciones

(*a*) $\text{Rot}_{(O,180°)}(A) = (-1, -3) = A'$
$\text{Rot}_{(O,180°)}(B) = (-2, -1) = B'$
$\text{Rot}_{(O,180°)}(C) = (-1, -1) = C'$
La imagen de $\triangle ABC$ es $\triangle A'B'C'$

(*b*) La imagen de $\angle BAC$ es $\angle B'A'C'$.

18.5A Simetría de una rotación

La imagen del cuadrado en la figura 18-19 bajo una rotación de 90° es el cuadrado mismo. Esto también es cierto para una rotación de −90° o de 180°, etc.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.16 DETERMINACIÓN DE LA SIMETRÍA DE LA ROTACIÓN (Fig. 18-23)

(*a*) Encuentre la $\text{Rot}_{(O,45°)}(O)$.

(*b*) Encuentre la $\text{Rot}_{(O,90°)}$ de A, B y C.

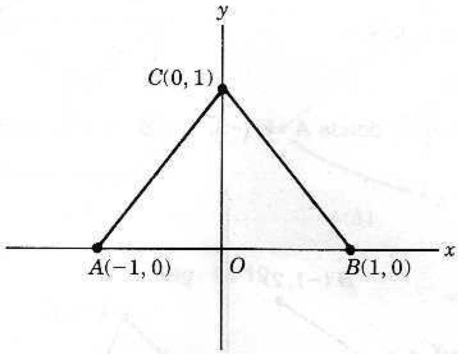


Fig. 18-23

(*c*) Encuentre la $\mathrm{Rot}_{(O,-90°)}$ de A, B, y C.

(*d*) Encuentre la imagen de $\triangle ABC$ bajo la $\mathrm{Rot}_{(O,90°)}$

(*e*) ¿Exhibe el $\triangle ABC$ simetría rotacional?

Soluciones

(*a*) $\mathrm{Rot}(O) = O$

(*b*) $\mathrm{Rot}(A) = A'(0, -1)$; $\mathrm{Rot}(B) = B'(0, 1)$; $\mathrm{Rot}(C) = C'(-1, 0)$

(*c*) $\mathrm{Rot}(A) = A''(0, 1)$; $\mathrm{Rot}(B) = B''(0, -1)$; $\mathrm{Rot}(C) = C''(1, 0)$

(*d*) $\mathrm{Rot}(\triangle ABC) = A''B''C''$

(*e*) No, ya que no es su propia imagen para cualquier rotación, exceptuando una de 360°.

18.6 DILATACIONES

Supóngase que se infla un globo por etapas y que en cada etapa se dibuja un contorno. Los trazos podrían ser como los mostrados en la figura 18-24. Aunque el globo cambió de tamaño en el paso de la etapa (*a*) a la (*b*), su forma no cambió. Nótese que si C está en $\overset{\frown}{AB}$, entonces su imagen C' está en $\overset{\frown}{A'B'}$. Una transformación del plano de este tipo se denota dilatación. La transformación "de regreso" también es una dilatación: se puede hacer que el globo reduzca su tamaño por medio de una transformación que vaya de (*b*) a (*a*).

Definición 7: *sean un punto p en el plano y un número positivo n, entonces una transformación del plano, denotada como dilatación de n con centro de dilatación P, tiene las siguientes propiedades: el punto P es fijo, para cualquier punto Q, la imagen de Q es el punto Q′ tal que* $PQ' = (n)(PQ)$ *y* $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{PQ'}$ *son rayos idénticos.*

El punto Q' se denota como $D_n(Q)$.

En la figura 18-25 se muestra una dilatación en la que $n = 2$ y el centro de la dilatación es P. Por lo tanto, $D_2(A) = A'$, $D_2(B) = B'$, y $D_2(P) = P$. En adición, dado que $n = 2$ se tiene que $PA' = 2PA$ y que $PB' = 2PB$. De la figura 18-25 se hacen evidentes las propiedades:

1. Las dilataciones no preservan distancias.

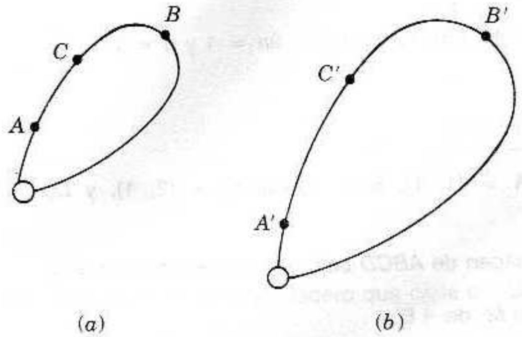


Fig. 18-24

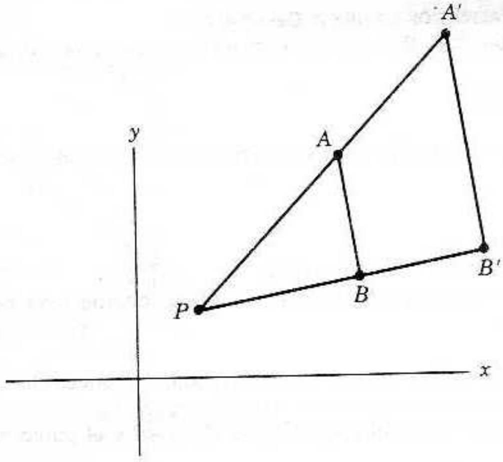


Fig. 18-25

2. La imagen de una figura es similar a ésta bajo una dilatación. En la figura 18-25, el $\triangle PAB \sim \triangle PA'B'$.

3. Los ángulos se preservan bajo una dilatación (a causa del punto 2 de arriba).

Cuando el centro de la dilatación es $O(0, 0)$, se pueden encontrar fácilmente las imágenes de los puntos: $D_n(x, y) = (nx, ny)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.17 Localización de la Dilatación de un Triángulo

Encuentre la imagen del $\triangle ABC$ de la figura 18-26 bajo una dilatación de $n = \frac{1}{2}$ y con centro (0, 0).

Solución

$D_{1/2}(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = B'$, como se muestra en la figura 18-26. También $D_{1/2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0) = A'$; $D_{1/2}(2, 1) = (1, \frac{1}{2}) = C'$. Entonces, $\triangle B'A'C'$ es la imagen de $\triangle BAC$, y $\triangle B'A'C' \sim \triangle BAC$. Nótese aquí que la imagen es más pequeña que el triángulo original ya que $n = \frac{1}{2}$.

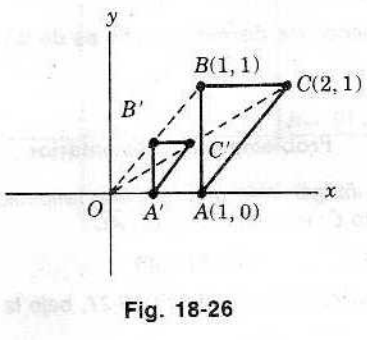


Fig. 18-26

18.18 Localización de una n Desconocida

Dado que $D_n(8, 0) = (1, 0)$, encuentre n para una dilatación en la que (0, 0) es su centro.

Solución

Dado que el origen es el centro de la dilatación, $(1, 0) = (8n, 0n)$. Por lo tanto, $8n = 1$ y $n = \frac{1}{8}$.

18.19 Dilatación de un Cuadrado

Dibuje el cuadrado $ABCD$ en el plano coordenado con $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, 1)$, y $D(2, 2)$. Entonces:

(*a*) Con O como centro de la dilatación, encuentre la imagen de $ABCD$ bajo una dilatación de $n = \frac{1}{3}$.

(*b*) Encuentre el punto medio M de $\overline{AB}$ y el punto medio M' de $\overline{A'B'}$.

(*c*) Encuentre $D_{1/3}(M)$.

Soluciones

(*a*) Para una dilatación con centro (0, 0) y $n = \frac{1}{3}$, se tiene que $D(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$. La imagen de $ABCD$ es $A'B'C'D'$, donde $A' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $B' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $C' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $D' = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(*b*) $M = (\frac{1}{2}(1 + 1), \frac{1}{2}(1 + 2)) = (1, \frac{3}{2})$ y $M' = (\frac{1}{3}(1), \frac{1}{3}(\frac{3}{2})) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

(*c*) $D(M) = M'$

18.7 PROPIEDADES DE TRANSFORMACIONES

En este punto, se resumen las propiedades de las transformaciones. En particular, interesa saber qué se preserva bajo qué transformación.

1. Las reflexiones preservan: (*a*) distancias, (*b*) medidas de ángulos, (*c*) puntos medios, (*d*) paralelismo, y (*e*) colinearidad.
2. Las translaciones preservan las mismas cinco propiedades (*a*) a (*e*).
3. Las rotaciones también preservan estas cinco propiedades.
4. Las dilataciones preservan todas menos las distancias, esto es de (*b*) a (*e*) solamente.

Problemas complementarios

1. Para la figura 18-27, encuentre la imagen bajo una reflexión respecto a la línea t, de cada uno de los objetos siguientes: (*a*) el punto D; (*b*) punto C; (*c*) punto B, y (*d*) $\overline{AC}$. (18.1)

2. Encuentre la imagen del rectángulo $ABCD$ de la figura 18-27, bajo la reflexión respecto a la línea t. (18.2)

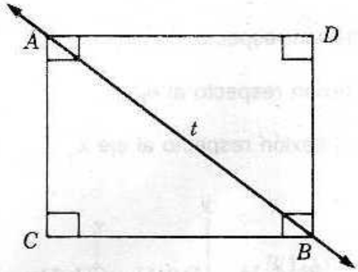


Fig. 18-27

3. Diga si es falso o verdadero que cada círculo es su propia imagen bajo una reflexión respecto a un diámetro. (18.2)

4. Encontrar todos los ejes de simetría para el rectángulo de la figura 18-27. (18.3)

5. Dé (o dibuje) un ejemplo de un polígono de cinco lados que no exhiba simetría de línea. (18.4)

6. Explique por qué cada figura de la figura 18-28 exhibe simetría de línea. (18.4)

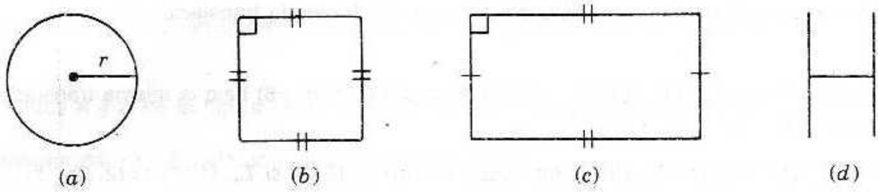


Fig. 18-28

7. En la figura 18-29, encuentre: (*a*) $R_O(B)$; (*b*) $R_O(A)$; (*c*) $R_O(O)$; (*d*) $R_O(\triangle AOB)$. (18.5)

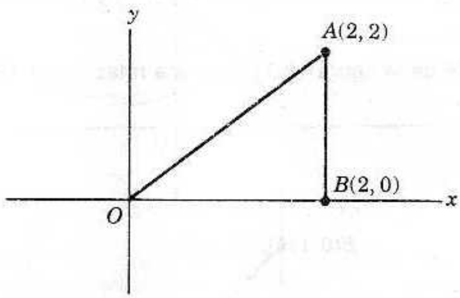


Fig. 18-29

8. En la figura 18-30, encuentre: (18.7, 18.8)

(*a*) La imagen de *E* bajo una reflexión respecto al eje *y*.

(*b*) La imagen de B bajo una reflexión respecto al eje y.

(*c*) La imagen de $\overline{AB}$ bajo una reflexión respecto al eje y.

(*d*) La imagen de $\overline{BC}$ bajo una reflexión respecto al eje x.

(*e*) La imagen de $ABCD$ bajo una reflexión respecto al eje x.

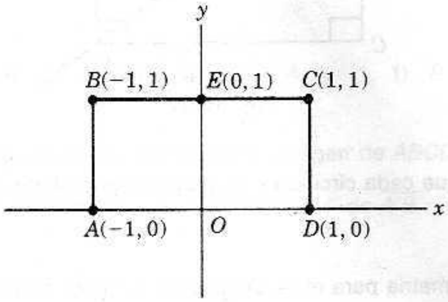


Fig. 18-30

9. Encuentre (*a*) $T_{(1,3)}(2, 8)$; (*b*) $T_{(1,3)}(6, 5)$; (*c*) $T_{(1,3)}(0, 0)$; (*d*) $T_{(1,3)}(1, 1)$ (18.9)

10. Encuentre la imagen del rectángulo $ABCD$ de la figura 18-30 bajo la translación $T_{(3,6)}$. (18.10)

11. Bajo una translación específica, $T(3, 4) = (0, 0)$. Encuentre $T(-8, -6)$ bajo la misma translación. (18.11)

12. Encuentre: (*a*) $T_{(4,3)}(0, -6)$; (*b*) $T_{(h,k)}(3, 7)$; (*c*) $T_{(h,k)}(e, f)$; (*b*) $T_{(h,k)}(4, 1)$ si $T_{(h,k)}(1, 1) = (2, 2)$. (18.12)

13. En la figura 18-31, encuentre: (*a*) $T_{(0,0)}(\overline{EF})$; (*b*) $T_{(1,0)}(\overline{EF})$; (*c*) $T_{(0,1)}(\overline{EF})$; (*d*) $T_{(0,0)}(\triangle OEF)$. (18.13)

14. Sean $x = (4, 1)$ y $y = (0, 3)$, encuentre: (*a*) $\text{Rot}_{(0,\ 90°)}(x)$; (*b*) $\text{Rot}_{(0,\ 90°)}(y)$; (*c*) la imagen de $\overline{yx}$ bajo una rotación de 90° alrededor del origen. (18.14)

15. Encuentre la imagen del $\triangle EOF$ de la figura 18-31 bajo una rotación de 180° alrededor de O. (18.15)

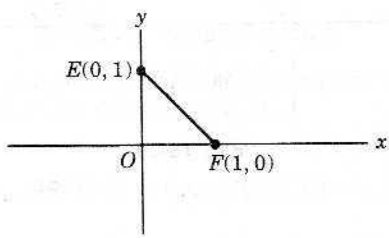


Fig. 18-31

16. En la figura 18-32 encuentre: . (18.16)

(*a*) $\text{Rot}_{(O,\ 90°)}(A)$ y $\text{Rot}_{(O,\ 90°)}(B)$

(*b*) $\text{Rot}_{(O,\ -90°)}(A)$ y $\text{Rot}_{(O,\ 90°)}(B)$

(*c*) La imagen de *OABC* bajo $\text{Rot}_{(O,-90°)}$

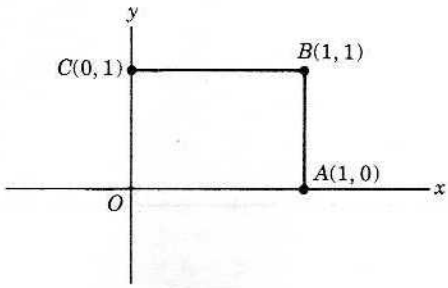


Fig. 18-32

17. Encuentre: (*a*) $D_{1/3}(-1, 3)$; (*b*) $D_{1/2}(5, -3)$; (*c*) $D_4(0, 0)$, y (*d*) $D_5(1, 6)$, si el centro de la dilatación en cada caso es el origen. (18.17)

18. Si el centro de una dilatación D_n es (0, 0) y $D_n(3, 6) = (5, 10)$, encontrar *n* y $D_n(0, -7)$ (18.18)

19. Para los puntos *A* y *B* de la figura 18-33, y para dilataciones con centro en (0, 0), encuentre: (18.19)

(*a*) La imagen del $\triangle OAB$ bajo una dilatación con $n = \frac{1}{2}$

(*b*) La imagen del punto medio de $\overline{AB}$ bajo una dilatación con $n = 3$

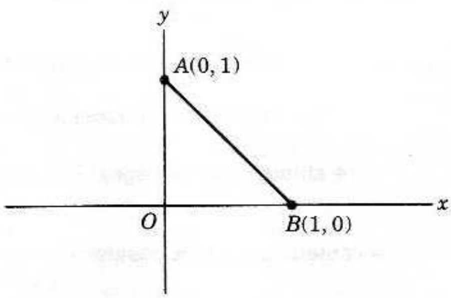


Fig. 18-33

Formulario

FÓRMULAS DE ÁNGULOS

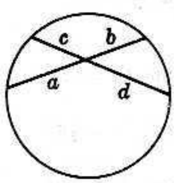
1. Complemento de a°	1. $c = 90^\circ - a^\circ$
2. Suplemento de a°	2. $s = 180^\circ - a^\circ$
3. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo	3. $S = 180^\circ$
4. La suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero	4. $S = 360^\circ$
5. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de una figura cualquiera	5. $S = 360^\circ$
6. La suma de las medidas de los ángulos interiores de una figura cualquiera	6. $S = 180^\circ(n - 2)$
7. La medida de cada ángulo interior de una figura equiangular o regular cualquiera	7. $S = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$
8. La medida de cada ángulo exterior de una figura equiangular o regular cualquiera	8. $S = \dfrac{360^\circ}{n}$
9. La medida de $\angle O$ central interceptando un arco de a°	9. $m\angle O = a^\circ$
10. La medida de $\angle A$ inscrito interceptando un arco de a°	10. $m\angle A = \frac{1}{2}a^\circ$
11. La medida de $\angle A$ formado por una tangente y una cuerda e interceptando un arco de a°	11. $m\angle A = \frac{1}{2}a^\circ$
12. La medida de $\angle A$ formado por la intersección de dos cuerdas e interceptando los arcos de a° y b°	12. $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ)$
13. La medida de $\angle A$ formado por la intersección de dos tangentes, dos secantes, o la intersección de una tangente y una secante e interceptando los arcos de a° y b°	13. $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$
14. La medida de $\angle A$ inscrito en un semicírculo	14. $m\angle A = 90^\circ$
15. $\angle$s A y B opuestos de un cuadrilátero inscrito	15. $m\angle A = 180^\circ - m\angle B$

FÓRMULAS DE ÁREAS

1.	Área de un rectángulo	1. $K = bh$	
2.	Área de un cuadrado	2. $K = s^2$,	$K = \frac{1}{2}d^2$
3.	Área de un paralelogramo	3. $K = bh$,	$K = ab \text{ sen } C$
4.	Área de un triángulo	4. $K = \frac{1}{2}bh$,	$K = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C$
5.	Área de un trapezoide	5. $K = \frac{1}{2}h(b + b')$,	$K = hm$
6.	Área de un triángulo equilátero	6. $K = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$,	$K = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$
7.	Área de un rombo	7. $K = \frac{1}{2}dd'$	
8.	Área de un polígono regular	8. $K = \frac{1}{2}pr$	
9.	Área de un círculo	9. $K = \pi r^2$,	$K = \frac{1}{4}\pi d^2$
10.	Área de un sector	10. $K = \frac{n}{360}(\pi r^2)$	
11.	Área de un segmento menor	11. K = área del sector − área del triángulo	

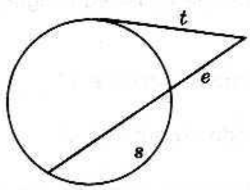
FÓRMULAS DE LA INTERSECCIÓN DE CÍRCULOS

1.



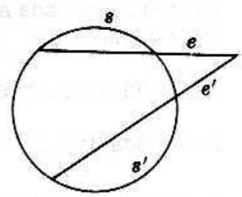
Cuerdas intersectoras
$ab = cd$

2.



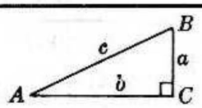
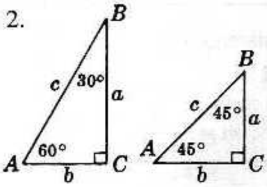
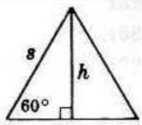
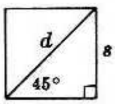
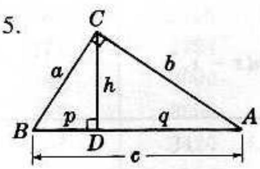
Tangente y secante intersectoras
$\frac{s}{t} = \frac{t}{e}$, $t^2 = se$

3.



Secantes intersectoras
$se = s'e'$

FÓRMULAS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. 	Teorema de Pitágoras	1. $c^2 = a^2 + b^2$
2. 	Cateto opuesto al ángulo de 30° Cateto opuesto al ángulo de 45° Cateto opuesto al ángulo de 60°	2. $b = \frac{1}{2}c$ $b = \frac{1}{2}c\sqrt{2},\ b = a$ $b = \frac{1}{2}c\sqrt{3},\ b = a\sqrt{3}$
3. 	Altura de un triángulo equilátero Lado de un triángulo equilátero	3. $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$ $s = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$
4. 	Lado de un cuadrado Diagonal de un cuadrado	4. $s = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$ $d = s\sqrt{2}$
5. 	Altura de la hipotenusa Cateto del triángulo rectángulo	5. $\frac{p}{h} = \frac{h}{q},\ h^2 = pq,\ h = \sqrt{pq}$ $\frac{c}{a} = \frac{a}{p},\ a^2 = pc,\ a = \sqrt{pc}$ $\frac{c}{b} = \frac{b}{q},\ b^2 = qc,\ b = \sqrt{qc}$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

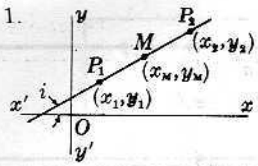
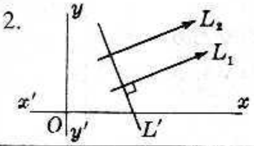
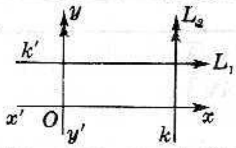
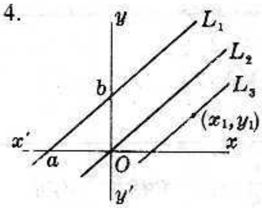
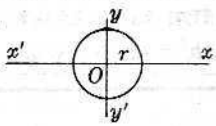
1. 	Punto intermedio M Distancia entre dos puntos P_1P_2 La pendiente de la recta P_1P_2	1. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $m = \tan i$
2. 	Las pendientes de dos rectas paralelas L_1 y L_2 Las pendientes de dos rectas perpendiculares L_1 y L_2	2. Son las mismas, m $mm' = -1$ $m' = -\frac{1}{m}$, $m = -\frac{1}{m'}$
3. 	La ecuación de L_1, paralela al eje x La ecuación de L_2, paralela al eje y	3. $y = k'$ $x = k$
4. 	La ecuación de L_1, con pendiente m y y-intercepción b La ecuación de L_2 con pendiente m cruzando el origen La ecuación de L_1 con x-intercepción a y y-intercepción b La ecuación de L_3 con pendiente m y pasando por (x_1, y_1)	4. $y = mx + b$ $y = mx$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. 	La ecuación del círculo con centro en el origen y radio r	5. $x^2 + y^2 = r^2$

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
1°	.0175	.9998	.0175
2°	.0349	.9994	.0349
3°	.0523	.9986	.0524
4°	.0698	.9976	.0699
5°	.0872	.9962	.0875
6°	.1045	.9945	.1051
7°	.1219	.9925	.1228
8°	.1392	.9903	.1405
9°	.1564	.9877	.1584
10°	.1736	.9848	.1763
11°	.1908	.9816	.1944
12°	.2097	.9781	.2126
13°	.2250	.9744	.2309
14°	.2419	.9703	.2493
15°	.2588	.9659	.2679
16°	.2756	.9613	.2867
17°	.2924	.9563	.3057
18°	.3090	.9511	.3249
19°	.3256	.9455	.3443
20°	.3420	.9397	.3640
21°	.3584	.9336	.3839
22°	.3746	.9272	.4040
23°	.3907	.9205	.4245
24°	.4067	.9135	.4452
25°	.4226	.9063	.4663

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
26°	.4384	.8988	.4877
27°	.4540	.8910	.5095
28°	.4695	.8829	.5317
29°	.4848	.8746	.5543
30°	.5000	.8660	.5774
31°	.5150	.8572	.6009
32°	.5299	.8480	.6249
33°	.5446	.8387	.6494
34°	.5592	.8290	.6745
35°	.5736	.8192	.7002
36°	.5878	.8090	.7265
37°	.6018	.7986	.7536
38°	.6157	.7880	.7813
39°	.6293	.7771	.8098
40°	.6428	.7660	.8391
41°	.6561	.7547	.8693
42°	.6691	.7431	.9004
43°	.6820	.7314	.9325
44°	.6947	.7193	.9657
45°	.7071	.7071	1.0000
46°	.7193	.6947	1.0355
47°	.7314	.6820	1.0724
48°	.7431	.6691	1.1106
49°	.7547	.6561	1.1504
50°	.7660	.6428	1.1918

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
51°	.7771	.6293	1.2349
52°	.7880	.6157	1.2799
53°	.7986	.6018	1.3270
54°	.8090	.5878	1.3764
55°	.8192	.5736	1.4281
56°	.8290	.5592	1.4826
57°	.8387	.5446	1.5399
58°	.8480	.5299	1.6003
59°	.8572	.5150	1.6643
60°	.8660	.5000	1.7321
61°	.8746	.4848	1.8040
62°	.8829	.4695	1.8807
63°	.8910	.4540	1.9626
64°	.8988	.4384	2.0503
65°	.9063	.4226	2.1445
66°	.9135	.4067	2.2460
67°	.9205	.3907	2.3559
68°	.9272	.3746	2.4751
69°	.9336	.3584	2.6051
70°	.9397	.3420	2.7475

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
71°	.9455	.3256	2.9042
72°	.9511	.3090	3.0777
73°	.9563	.2924	3.2709
74°	.9613	.2756	3.4874
75°	.9659	.2588	3.7321
76°	.9703	.2419	4.0108
77°	.9744	.2250	4.3315
78°	.9781	.2079	4.7046
79°	.9816	.1908	5.1446
80°	.9848	.1736	5.6713
81°	.9877	.1564	6.3138
82°	.9903	.1392	7.1154
83°	.9925	.1219	8.1443
84°	.9945	.1045	9.5144
85°	.9962	.0872	11.4301
86°	.9976	.0698	14.3007
87°	.9986	.0523	19.0811
88°	.9994	.0349	28.6363
89°	.9998	.0175	57.2900
90°	1.0000	.0000	

TABLA DE CUADRADOS Y RAÍCES CUADRADAS

N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$
1	1	1.000	41	1681	6.403	81	6561	9.000	121	14641	11.000
2	4	1.414	42	1764	6.481	82	6724	9.055	122	14884	11.045
3	9	1.732	43	1849	6.557	83	6889	9.110	123	15129	11.091
4	16	2.000	44	1936	6.633	84	7056	9.165	124	15376	11.136
5	25	2.236	45	2025	6.708	85	7225	9.220	125	15625	11.180
6	36	2.449	46	2116	6.782	86	7396	9.274	126	15876	11.225
7	49	2.646	47	2209	6.856	87	7569	9.327	127	16129	11.269
8	64	2.828	48	2304	6.928	88	7744	9.381	128	16384	11.314
9	81	3.000	49	2401	7.000	89	7921	9.434	129	16641	11.358
10	100	3.162	50	2500	7.071	90	8100	9.487	130	16900	11.402
11	121	3.317	51	2601	7.141	91	8281	9.539	131	17161	11.446
12	144	3.464	52	2704	7.211	92	8464	9.592	132	17424	11.489
13	169	3.606	53	2809	7.280	93	8649	9.644	133	17689	11.533
14	196	3.742	54	2916	7.348	94	8836	9.695	134	17956	11.576
15	225	3.873	55	3025	7.416	95	9025	9.747	135	18225	11.619
16	256	4.000	56	3136	7.483	96	9216	9.798	136	18496	11.662
17	289	4.123	57	3249	7.550	97	9409	9.849	137	18769	11.705
18	324	4.243	58	3364	7.616	98	9604	9.899	138	19044	11.747
19	361	4.359	59	3481	7.681	99	9801	9.950	139	19321	11.790
20	400	4.472	60	3600	7.746	100	10000	10.000	140	19600	11.832
21	441	4.583	61	3721	7.810	101	10201	10.050	141	19881	11.874
22	484	4.690	62	3844	7.874	102	10404	10.100	142	20164	11.916
23	529	4.796	63	3969	7.937	103	10609	10.149	143	20449	11.958
24	576	4.899	64	4096	8.000	104	10816	10.198	144	20736	12.000
25	625	5.000	65	4225	8.062	105	11025	10.247	145	21025	12.042
26	676	5.099	66	4356	8.124	106	11236	10.296	146	21316	12.083
27	729	5.196	67	4489	8.185	107	11449	10.344	147	21609	12.124
28	784	5.292	68	4624	8.246	108	11664	10.392	148	21904	12.166
29	841	5.385	69	4761	8.307	109	11881	10.440	149	22201	12.207
30	900	5.477	70	4900	8.367	110	12100	10.488	150	22500	12.247
31	961	5.568	71	5041	8.426	111	12321	10.536			
32	1024	5.657	72	5184	8.485	112	12544	10.583			
33	1089	5.745	73	5329	8.544	113	12769	10.630			
34	1156	5.831	74	5476	8.602	114	12996	10.677			
35	1225	5.916	75	5625	8.660	115	13225	10.724			
36	1296	6.000	76	5776	8.718	116	13456	10.770			
37	1369	6.083	77	5929	8.775	117	13689	10.817			
38	1444	6.164	78	6084	8.832	118	13924	10.863			
39	1521	6.245	79	6241	8.888	119	14161	10.909			
40	1600	6.325	80	6400	8.944	120	14400	10.954			

Respuestas a los problemas complementarios

CAPÍTULO 1

1. (*a*) punto; (*b*) línea; (*c*) plano; (*d*) plano; (*e*) línea; (*f*) punto

2. (*a*) $\overline{AE}$, $\overline{DE}$; (*b*) $\overline{ED}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$; (*c*) $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{EF}$; (*d*) F

3. (*a*) $AB = 16$; (*b*) $AE = 10\frac{1}{2}$

4. (*a*) 18; (*b*) 90°, (*c*) 50°; (*d*) 130°; (*e*) 230°

5. (*a*) $\angle CBE$; (*b*) $\angle AEB$; (*c*) $\angle ABE$; (*d*) ABC; $\angle BCD$; $\angle BED$; (*e*) $\angle AED$

6. (*a*) 130°; (*b*) 120°; (*c*) 75°; (*d*) 132°

7. (*a*) 75°; (*b*) 40°; (*c*) $10\frac{1}{3}°$ o 10°20′; (*d*) 9°11′

8. (*a*) 90°; (*b*) 120°; (*c*) 135°; (*d*) 270°; (*e*) 180°

9. (*a*) 90°; (*b*) 60°; (*c*) 15°; (*d*) 165°

10. (*a*) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CD}$; (*b*) 129°; (*c*) 102°; (*d*) 51°; (*e*) 129°

11. (*a*) $\triangle ABC$, hipotenusa $\overline{AB}$, catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$
$\triangle ACD$, hipotenusa $\overline{AC}$, catetos $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$
$\triangle BCD$, hipotenusa $\overline{BC}$, catetos $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$
(*b*) $\triangle DAB$ y $\triangle ABC$
(*c*) $\triangle AEB$, catetos $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, base $\overline{AB}$, vértice del ángulo $\angle AEB$
$\triangle CED$, catetos $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$, base $\overline{CD}$, vértice del ángulo $\angle CED$

12. (*a*) $\overline{AR} \cong \overline{BR}$ y $\angle PRA \cong \angle PRB$; (*b*) $\angle ABF \cong \angle CBF$; (*c*) $\angle CGA \cong \angle CGD$; (*d*) $\overline{AM} \cong \overline{MD}$

13. (*a*) vértice $\angle$s; (*b*) adyacentes complementarios $\angle$s; (*c*) adyacentes $\angle$s; (*d*) adyacentes suplementarios $\angle$s; (*e*) complementarios $\angle$s; (*f*) vértice $\angle$s;

14. (*a*) 25°, 65°; (*b*) 18°, 72°; (*c*) 60°, 120°; (*d*) 61°, 119°; (*e*) 50°, 130°; (*f*) 56°, 84°; (*g*) 90°, 90°

15. (*a*) 48°, 27°; (*b*) 65°, 25°; (*c*) 148°, 32°

CAPÍTULO 2

1. (*a*) es *H*; (*b*) *P* es *D*; (*c*) *R* es *S*; (*d*) *E* es *K*; (*e*) *A* es *G*; (*f*) los triángulos son figuras geométricas; (*g*) un rectángulo es un cuadrilátero

2. (*a*) $a = c = f$; (*b*) $g = 15$; (*c*) $f = a$; (*d*) $a = h$; (*e*) $b = e$

3. (*a*) 130; (*b*) 4; (*c*) sí; (*d*) $x = 8\frac{1}{2}$; (*e*) $y = 15$; (*f*) $x = 6$; (*g*) $x = \pm 6$

4. (*a*) $AC = 12$, $AE = 11$, $AF = 15$, $DF = 9$
   (*b*) $m\angle ADC = 92°$, $m\angle BAE = 68°$, $m\angle FAD = 86°$, $m\angle BAD = 128°$

5. (*a*) $AB = DF$; (*b*) $AB = AC$; (*c*) $\angle ECA \cong \angle DCB$; (*d*) $\angle BAD \cong \angle BCD$

6. (*a*) Si los iguales son divididos por los iguales, los cocientes son iguales.
   (*b*) Los dobles de los iguales son iguales.
   (*c*) Si los iguales se multiplican por iguales, los productos son iguales.
   (*d*) Las mitades de los iguales son iguales.

7. (*a*) Si los iguales se dividen entre iguales el resultado es el mismo.
   (*b*) Si los iguales se multiplican por iguales el resultado es el mismo.
   (*c*) Los dobles de los iguales son iguales.
   (*d*) Las mitades de los iguales son iguales.

8. (*a*) Su nueva tarifa de pago por hora será la misma.
   (*b*) Esa existencia tiene el mismo valor.
   (*c*) Los grupos tienen la misma matrícula.
   (*d*) 100°C = 212°F
   (*e*) Sus partes medirán lo mismo.
   (*f*) Tiene un total de $10 000 en los bancos *A*, *B* y *C*.
   (*g*) Valen lo mismo.

9. (*a*) Los ángulos verticales son congruentes.
   (*b*) Todos los ángulos rectos son congruentes.
   (*c*) Los suplementos de los ángulos congruentes son congruentes.
   (*d*) Las rectas perpendiculares forman ángulos rectos y todos los ángulos rectos son congruentes.
   (*e*) Los complementos de los ángulos congruentes son congruentes.

10. En cada respuesta, (*H*) indica la hipótesis y (*C*) la conclusión.
   (*a*) (*H*) Estrellas, (*C*) Centellear.
   (*b*) (*H*) Avión de propulsión (*C*) son los más veloces.
   (*c*) (*H*) Agua (*C*) hierve a 212° Fahrenheit.
   (*d*) (*H*) Si es la bandera estadounidense (*C*) sus colores son rojo, blanco y azul.
   (*e*) (*H*) Si no haces la tarea de la materia (*C*) No puedes aprender Geometría.
   (*f*) (*H*) Si el árbitro canta la cuarta bola (*C*) el bateador pasa a la primera base.
   (*g*) (*H*) Si *A* es hermano de *B* y *C* es hija de *B* (*C*) *A* es tío de *C*.
   (*h*) (*H*) Un ángulo bisector (*C*) divide en ángulo en dos partes iguales.
   (*i*) (*H*) Si está dividido en tres partes iguales (*C*) una línea se trisecta.
   (*j*) (*H*) Un pentágono, (*C*) tiene cinco lados y cinco ángulos.
   (*k*) (*H*) Algunos rectángulos, (*C*) son cuadrados.
   (*l*) (*H*) Si los lados se alargan, (*C*) los ángulos no se hacen más largos.

(*m*) (*H*) Si son iguales y suplementarios, (*C*) los ángulos son ángulos rectos.
(*n*) (*H*) Si uno de sus lados no es una línea recta, (*C*) la figura no puede ser un polígono.

11. (*a*) Un ángulo agudo es la mitad de un ángulo recto. No es necesariamente cierto.
(*b*) Al tener un triángulo un ángulo obtuso es un triángulo obtuso. C' to.
(*c*) Si el bateador está "out", entonces el árbitro canta el tercer "strike". No es necesariamente cierto.
(*d*) Si eres más bajo que yo, entonces yo soy más alto que tú. Cierto.
(*e*) Si pesamos lo mismo, entonces yo estoy más pesado que tú. No es necesariamente cierto.

CAPÍTULO 3

1. (*a*) $\triangle I \cong \triangle II \cong \triangle III$, s.a.s. $\cong$ s.a.s.; (*b*) $\triangle I \cong \triangle III$, a.s.a. $\cong$ a.s.a.;
(*c*) $\triangle I \cong \triangle II \cong \triangle III$, s.s.s. $\cong$ s.s.s.

2. (*a*) a.s.a. $\cong$ a.s.a.; (*b*) s.a.s. $\cong$ s.a.s.; (*c*) s.s.s. $\cong$ s.s.s.; (*d*) s.a.s. $\cong$ s.a.s.;
(*e*) a.s.a. $\cong$ a.s.a.; (*f*) s.a.s. $\cong$ s.a.s.; (*g*) s.a.s. $\cong$ s.a.s.; (*h*) a.s.a. $\cong$ a.s.a.

3. (*a*) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; (*b*) $\angle ABD \cong \angle DBC$; (*c*) $\angle 1 \cong \angle 4$; (*d*) $\overline{BE} \cong \overline{ED}$; (*e*) $\overline{BD} \cong \overline{AC}$; (*f*) $\angle BAD \cong \angle CDA$

4. (*a*) $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$, $\overline{BD} \cong \overline{BE}$; (*b*) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$, $\angle B \cong \angle C$;
(*c*) $\angle E \cong \angle C$, $\angle A \cong \angle F$, $\angle EDF \cong \angle ABC$

5. (*a*) $x = 19$, $y = 8$; (*b*) $x = 4$, $y = 12$; (*c*) $x = 48$, $y = 12$

8. (*a*) $\angle b \cong \angle d$, $\angle E \cong \angle G$; (*b*) $\angle A \cong \angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle C$;
(*c*) $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 4 \cong \angle 6$, $\angle EAD \cong \angle EDA$

9. (*a*) $\overline{BE} \cong \overline{EC}$; (*b*) $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$; (*c*) $\overline{BD} \cong \overline{DE}$, $\overline{EF} \cong \overline{FC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

CAPÍTULO 4

1. (*a*) $x = 105°$, $y = 75°$; (*b*) $x = 60°$, $y = 40°$; (*c*) $x = 85°$, $y = 95°$; (*d*) $x = 50°$, $y = 50°$;
(*e*) $x = 65°$, $y = 65°$; (*f*) $x = 40°$, $y = 30°$; (*g*) $x = 60°$, $y = 120°$; (*h*) $x = 90°$, $y = 35°$;
(*i*) $x = 30°$, $y = 40°$; (*j*) $x = 80°$, $y = 10°$; (*k*) $x = 30°$, $y = 150°$; (*l*) $x = 85°$, $y = 95°$

2. (*a*) $x = 22°$, $y = 102°$ (*b*) $x = 40°$, $y = 100°$ (*c*) $x = 80°$, $y = 40°$

3. (*a*) Cada ángulo mide 105°. (*b*) Cada ángulo mide 70°. (*c*) Los ángulos miden 72° y 108°.

7. (*a*) 25; (*b*) 9; (*c*) 20; (*d*) 8

8. (*a*) 8; (*b*) 10; (*c*) 2; (*d*) 14

10. (*a*) *P* es equidistante de *B* y *C*. *P está sobre* $\perp$ mediatriz de $\overline{BC}$.
Q es equidistante de *A* y *B*. *Q está sobre* $\perp$ mediatriz de $\overline{AB}$.
R es equidistante de *A, C y D*. *R está sobre* $\perp$ mediatriz de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$.
(*b*) *P* es equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. *P está sobre la mediatriz de* $\angle A$.

Q es equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. *Q está sobre la mediatriz del $\angle B$.*
R es equidistante de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$. *R está sobre la mediatriz de $\angle C$ y $\angle D$.*

11. (*a*) P es equidistante de $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Q es equidistante de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ y es equidistante de A y D. R es equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y es equidistante de A y D.
(*b*) P es equidistante de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ y es equidistante de B y C. Q es equidistante de A, B y C. R es equidistante de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ y es equidistante de A y B.

12. (*a*) $x=50°$, $y=110°$; (*b*) $x=65°$, $y=65°$; (*c*) $x=30°$, $y=100°$; (*d*) $x=51°$, $y=112°$;
(*e*) $x=52°$, $y=40°$; (*f*) $x=120°$, $y=90°$

13. (*a*) $x=55°$, $y=125°$; (*b*) $x=80°$, $y=90°$; (*c*) $x=56°$, $y=68°$; (*d*) $x=100°$, $y=30°$;
(*e*) $x=30°$, $y=120°$; (*f*) $x=90°$, $y=30°$

14. (*a*) 18°, 54°, 108°; (*b*) 40°, 50°, 90°; (*c*) 36°, 36°, 108°; (*d*) 36°, 72°, 108°, 144°;
(*e*) 50°, 75°; (*f*) 100°, 60° y 20°

16. (*a*) Como $x = 45$, cada ángulo mide 60°.
(*b*) Como $x = 25$, $x + 15 = 40$ y $3x - 35 = 40$; cada ángulo mide 40°.
(*c*) Si $2x$, $3x$ y $5x$ representan los ángulos, $x = 18$ y $5x = 90$; o sea, uno de los ángulos mide 90°.
(*d*) Si x y $5x - 10$ representan los ángulos desconocidos, $x = 21$ y $5x - 10 = 95$; es decir, uno de los ángulos mide 96°.

17. (*a*) 7 $\angle$s derechos, 30 $\angle$s derechos; (*b*) 1 620°, 5 400°, 180 000°; (*c*) 30.12, 27, 202

18. (*a*) 20°, 18°, 9°; (*b*) 160°, 162°, 171°; (*c*) 3, 9, 20, 180; (*d*) 3, 12, 36, 72, 360

19. (*a*) 65°, 90°, 95°, 110°; (*b*) 140°, 100°, 60°, 60°

20. (*a*) $\triangle I \cong \triangle III$ por hipotenusa $\cong$ hipotenusa; (*b*) $\triangle I \cong \triangle III$ por s.a.a. $\cong$ s.a.a.

CAPÍTULO 5

1. (*a*) $x=15$, $y=25$; (*b*) $x=20$, $y=130$; (*c*) $x=20$, $y=140$

4. (*a*) ▱*EFGH*; (*b*) ▱s *ABCD* y *EBFD*; (*c*) ▱s *GHKJ*, *HILK*, *GILJ*;
(*d*) ▱s *ACHB*, *CEFH*

5. (*a*) Dos lados son congruentes y ||. (*b*) Los lados opuestos son congruentes. (*c*) Los ángulos opuestos son congruentes. (*d*) $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son congruentes y paralelos ($\overline{AD} \cong EF \cong BC$).

6. (*a*) $x=6$, $y=12$: (*b*) $x=5$, $y=9$; (*c*) $x=120$, $y=30$; (*d*) $x=15$, $y=45$

7. (*a*) $x=14$, $y=6$; (*b*) $x=18$, $y=4\frac{1}{2}$; (*c*) $x=8$, $y=5$; (*d*) $x=3$, $y=9$

10. (*a*) $x=5$, $y=7$; (*b*) $x=10$, $y=35$; (*c*) $x=2\frac{1}{2}$, $y=17\frac{1}{2}$;
(*d*) $x=8$, $y=4$; (*e*) $x=25$, $y=25$; (*f*) $x=11$, $y=118$

13. (*a*) $x=6$, $y=40$; (*b*) $x=3$, $y=5\frac{1}{2}$; (*c*) $x=8\frac{1}{3}$, $y=22$

14. (*a*) $x = 28$, $y = 25\frac{1}{2}$; (*b*) $x = 12$ (como *y* no une los puntos medios, la proposición 3 no se aplica); (*c*) $x = 19$, $y = 23\frac{1}{2}$

15. (*a*) $m = 19$; (*b*) $b' = 36$; (*c*) $b = 73$

16. (*a*) $x = 11$, $y = 33$; (*b*) $x = 32$, $y = 26$; (*c*) $x = 12$, $y = 36$

17. (*a*) $22\frac{1}{2}$; (*b*) 70

18. (*a*) 21; (*b*) 30; (*c*) 14; (*d*) 26

CAPÍTULO 6

5. (*a*) cuadrado; (*b*) triángulo isósceles; (*c*) trapezoide; (*d*) triángulo derecho

6. (*a*) 140°; (*b*) 60°; (*c*) 90°; (*d*) $(180 - x)°$; (*e*) $x°$; (*f*) $(90 + x)°$

7. (*a*) 100°; (*b*) 50°, 80°; (*c*) 54°, 27°; (*d*) 45°; (*e*) 35°; (*f*) 45°

8. (*a*) $x = 22$; (*b*) $y = 6$ (*c*) $AB + CD = 22$; (*d*) perímetro = 44; (*e*) $x = 21$; (*f*) $r = 14$

9. (*a*) 0; (*b*) 40; (*c*) 33; (*d*) 7

10. (*a*) tangente externa; (*b*) tangente interna; (*c*) los círculos son 5 unidades separadas; (*d*) coincide

11. (*a*) concéntrico; (*b*) tangente interna; (*c*) tangente externa; (*d*) afuera de las demás (*e*) la menor está completamente adentro de la más grande; (*f*) de superposición

13. (*a*) 40; (*b*) 90; (*c*) 170; (*d*) 180; (*e*) $2x$; (*f*) $180 - x$; (*g*) $2x - 2y$

14. (*a*) 20; (*b*) 45; (*c*) 85; (*d*) 90; (*e*) 130; (*f*) 174; (*g*) x; (*h*) $90 - \frac{1}{2}x$; (*i*) $x - y$

15. (*a*) 85; (*b*) 170; (*c*) c; (*d*) $2i$; (*e*) 60; (*f*) 30

16. (*a*) 60, 120, 180; (*b*) 80, 120, 160; (*c*) 100, 120, 14; (*d*) 36, 144, 180

17. (*a*) $m\angle x = 136°$; (*b*) $m\widehat{y} = 111°$; (*c*) $m\angle x = 130°$; (*d*) $m\angle y = 126°$; (*e*) $m\angle x = 110°$; (*f*) $m\widehat{y} = 77°$

18. (*a*) 135°; (*b*) 90°; (*c*) $(180 - x)°$; (*d*) $(90 + x)°$; (*e*) 100°; (*f*) 80°; (*g*) 55°; (*h*) 72°

19. (*a*) 85°; (*b*) $y°$; (*c*) 110°; (*d*) 95°; (*e*) 72°; (*f*) 50°; (*g*) 145°; (*h*) 87°

20. (*a*) 50; (*b*) 60

21. (*a*) $m\widehat{x} = 65°$, $m\widehat{y} = 65°$; (*b*) $m\angle x = 90°$, $m\angle y = 55°$; (*c*) $m\angle x = 37°$, $m\angle y = 50°$

22. (*a*) 19; (*b*) 45; (*c*) 69; (*d*) 90; (*e*) 125; (*f*) 167; (*g*) $\frac{1}{2}x$; (*h*) $180 - \frac{1}{2}x$; (*i*) $x + y$

23. (*a*) 110; (*b*) 135; (*c*) 180; (*d*) 270; (*e*) $180 - 2x$; (*f*) $360 - 2x$; (*g*) $2x - 2y$; (*h*) $7x$

24. (*a*) 45°; (*b*) 60°; (*c*) 30°; (*d*) 18°

25. (*a*) $m\widehat{x} = 120°$, $m\angle y = 60°$; (*b*) $m\angle x = 62°$, $m\angle y = 28°$; (*c*) $m\angle x = 46°$, $m\angle y = 58°$

26. (*a*) 75°; (*b*) 75°; (*c*) 115°; (*d*) 100°; (*e*) 140°; (*f*) 230°; (*g*) 80°; (*h*) 48°

27. (*a*) 85°; (*b*) 103°; (*c*) 80°; (*d*) 72°; (*e*) 90°; (*f*) 110°; (*g*) 130°; (*h*) 110°

28. (*a*) $m\widehat{x} = 68°$, $m\angle y = 95°$; (*b*) $m\angle x = 90°$, $m\angle y = 120°$; (*c*) $m\widehat{x} = 34°$, $m\widehat{y} = 68°$

29. (*a*) 30°; (*b*) 37°; (*c*) 20°; (*d*) 36°; (*e*) 120°; (*f*) 130°; (*g*) 94°; (*h*) 25°

30. (*a*) 45°; (*b*) 75°; (*c*) 50°; (*d*) $36\frac{1}{2}°$; (*e*) 90°; (*f*) 140°; (*g*) 115°; (*h*) 45°; (*i*) 80°

31. (*a*) 20°; (*b*) 85°; (*c*) $(180 - x)°$; (*d*) $(90 + x)°$; (*e*) 90°; (*f*) 25°; (*g*) 42°; (*h*) 120°; (*i*) 72°; (*j*) 110°; (*k*) 145°; (*l*) $(180 - y)°$; (*m*) 240°; (*n*) $(180 + x)°$; (*o*) 270°

32. (*a*) $m\widehat{x} = 43°$, $m\angle y = 43°$; (*b*) $m\widehat{x} = 190°$, $m\angle y = 55°$; (*c*) $m\widehat{x} = 140°$, $m\angle y = 40°$

33. (*a*) 120°; (*b*) 150°; (*c*) 180°; (*d*) 50°; (*e*) $22\frac{1}{2}$; (*f*) 45°

34. (*a*) $m\widehat{x} = 150°$, $m\widehat{y} = 40°$; (*b*) $m\widehat{x} = 190°$, $m\widehat{y} = 70°$; (*c*) $m\widehat{x} = 252°$, $m\widehat{y} = 108°$

35. (*a*) 25°; (*b*) 39°; (*c*) 50°; (*d*) 30°; (*e*) 40°; (*f*) 76°; (*g*) 45°; (*h*) 95°; (*i*) 75°; (*j*) 120°

36. (*a*) 74°; (*b*) 90°; (*c*) 55°; (*d*) 60°; (*e*) 40°; (*f*) 37°; (*g*) 84°; (*h*) 110°; (*i*) 66°; (*j*) 98°; (*k*) 75°; (*l*) 79°

37. (*a*) $m\angle x = 120°$, $m\angle y = 60°$; (*b*) $m\angle x = 45°$, $m\angle y = 22\frac{1}{2}°$; (*c*) $m\angle x = 36°$, $m\angle y = 72°$

38. (*a*) $m\widehat{x} = 40°$, $m\angle y = 80°$; (*b*) $m\widehat{x} = 45°$, $m\angle y = 67\frac{1}{2}°$; (*c*) $m\angle x = 78°$, $m\angle y = 103°$

CAPÍTULO 7

1. (*a*) 4; (*b*) $\frac{1}{3}$; (*c*) $\frac{6}{5}$; (*d*) $\frac{10}{7}$; (*e*) $\frac{9}{7}$; (*f*) 2; (*g*) $\frac{1}{5}$; (*h*) $\frac{3}{7}$; (*i*) $\frac{2}{3}$; (*j*) $\frac{7}{8}$; (*k*) 2; (*l*) $\frac{5}{7}$; (*m*) 20; (*n*) $\frac{1}{3}$; (*o*) 3

2. (*a*) 6; (*b*) $\frac{14}{5}$; (*c*) $\frac{1}{7}$; (*d*) $\frac{3}{2}$; (*e*) 3; (*f*) $\frac{7}{2}$; (*g*) 2; (*h*) 250; (*i*) $\frac{1}{20}$; (*j*) 8; (*k*) $\frac{5}{3}$; (*l*) $\frac{9}{2}$

3. (*a*) 2:3:10; (*b*) 12:6:1; (*c*) 5:2:1; (*d*) 1:4:7; (*e*) 4:3:1; (*f*) 8:2:1; (*g*) 50:5:1; (*h*) 6:2:1; (*i*) 8:2:1

4. (*a*) $\frac{6}{7}$; (*b*) 12; (*c*) $\frac{13}{3}$; (*d*) $\frac{1}{4}$; (*e*) 6; (*f*) $\frac{16}{9}$; (*g*) $\frac{1}{3}$; (*h*) $\frac{3}{2}$; (*i*) $\frac{2}{7}$; (*j*) 11; (*k*) $\frac{4}{5}$; (*l*) 60; (*m*) 3; (*n*) $\frac{3}{20}$; (*o*) $\frac{1}{2}$; (*p*) 14

5. (*a*) $\frac{1}{3}$; (*b*) $3c$; (*c*) $\dfrac{d}{2}$; (*d*) $\dfrac{2r}{D}$; (*e*) $\dfrac{b}{a}$; (*f*) $\dfrac{4}{S}$; (*g*) $\dfrac{S}{6}$; (*h*) $\dfrac{3r}{2t}$; (*i*) 1:4:10; (*j*) 3:2:1; (*k*) $x^2:x:1$; (*l*) 6:5:4:1

6. (*a*) $5x$ y $4x$, suma = $9x$; (*b*) $9x$ y x; suma = $10x$; (*c*) $2x$, $5x$ y $11x$; suma = $18x$; (*d*) x, $2x$, $2x$, $3x$ y $7x$; suma = $15x$

7. (*a*) $5x + 4x = 45$, $x = 5$, $25°$ y $20°$; (*b*) $5x + 4x = 90$, $x = 10$, $50°$ y $40°$;
(*c*) $5x + 4x = 180$, $x = 20$, $100°$ y $80°$; (*d*) $5x + 4x + x = 180$, $x = 18$, $90°$ y $72°$.

8. (*a*) $7x + 6x = 91$, $x = 7$, $49°$, $42°$ y $35°$; (*b*) $7x + 5x = 180$, $x = 15$, $105°$, $90°$ y $75°$;
(*c*) $7x + 3x = 90$, $x = 9$, $63°$, $54°$ y $45°$; (*d*) $7x + 6x + 5x = 180$, $x = 10$, $70°$, $60°$ y $50°$

9. (*a*) 16; (*b*) 16; (*c*) ± 6; (*d*) $\pm 2\sqrt{5}$; (*e*) ± 5; (*f*) 2; (*g*) bc/a; (*h*) $\pm 6y$

10. (*a*) 21; (*b*) $4\frac{2}{3}$; (*c*) ± 6; (*d*) $\pm 5\sqrt{3}$; (*e*) 8; (*f*) ± 4; (*g*) 3; (*h*) $\pm\sqrt{ab}$

11. (*a*) 15; (*b*) 3; (*c*) 6; (*d*) $2\frac{2}{3}$; (*e*) $3\frac{1}{3}$; (*f*) 30; (*g*) 32; (*h*) $6a$

12. (*a*) 6; (*b*) 6; (*c*) 3; (*d*) $4b$; (*e*) $\sqrt{10}$; (*f*) $\sqrt{27}$ o $3\sqrt{3}$; (*g*) $\sqrt{pq}$; (*h*) $a\sqrt{b}$

13. (*a*) $\dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{x}$; (*b*) $\dfrac{a}{p} = \dfrac{q}{x}$; (*c*) $\dfrac{h}{a} = \dfrac{a}{x}$; (*d*) $\dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{x}$; (*e*) $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{x}$

14. (*a*) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$; (*b*) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$; (*c*) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$; (*d*) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{h}{a}$; (*e*) $\dfrac{x}{y} = b$

15. Sólo (*b*) no es una proporción como $3(12) \neq 5(7)$; o sea, $36 \neq 35$.

16. (*a*) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{9}{3}$, $x = 6$; (*b*) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{4}{5}$, $x = \dfrac{4}{5}$; (*c*) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{2}$, $x = \dfrac{ab}{2}$; (*d*) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{10}$, $x = \dfrac{1}{2}$; (*e*) $\dfrac{x}{20} = \dfrac{5}{4}$, $x = 25$

17. (*a*) d; (*b*) 35; (*c*) (*d*) 4

18. (*a*) 21; (*b*) $\frac{3}{2}$; (*c*) 5

19. (*a*) 16; (*b*) $6\frac{2}{3}$; (*c*) 10

20. (*a*) sí, puesto que $\frac{15}{10} = \frac{18}{12}$; (*b*) no, pues $\frac{10}{13} \neq \frac{7}{9}$; (*c*) sí, porque $\dfrac{3x}{5x} = \dfrac{36}{60}$

21. (*a*) 12; (*b*) 8; (*c*) 60

22. (*a*) 15; (*b*) 15; (*c*) $6\frac{1}{2}$

24. (*a*) $35°$; (*b*) $53°$

25. (*a*) $a = 16$; (*b*) $b = 15$; (*c*) $c = 126$

27. (*a*) $\angle ABE \cong \angle EDC$, $\angle BAE \cong \angle DCE$ (también vert. $\angle$s hacia E)
(*b*) $\angle BAF \cong \angle FEC$, $\angle B \cong \angle D$ (también $\angle EAD \cong \angle BFA$)
(*c*) $\angle A \cong \angle EDF$, $\angle F \cong \angle BCA$
(*d*) $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle C$
(*e*) $\angle C \cong \angle D$, $\angle CAB \cong \angle CAD$
(*f*) $\angle A \cong \angle A$, $\angle C \cong \angle DBA$

28. (*a*) $\angle D \cong \angle B$, $\angle AED \cong \angle FGB$; (*b*) $\angle ADB \cong \angle ABC$, $\angle A \cong \angle A$;
(*c*) $\angle ABC \cong \angle AED$, $\angle BAE \cong \angle EDA$

29. (*a*) $\angle C \cong \angle F$, $\frac{14}{20} = \frac{21}{30}$; (*b*) $\angle A \cong \angle A$, $\frac{10}{25} = \frac{6}{15}$; (*c*) $\angle B \cong \angle B$, $\frac{16}{28} = \frac{20}{35}$

30. (*a*) $\frac{6}{18} = \frac{8}{24} = \frac{10}{30}$; (*b*) $\frac{24}{36} = \frac{28}{42} = \frac{30}{45}$; (*c*) $\frac{12}{18} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27}$

32. (*a*) $q = 20$; (*b*) $p = 8$; (*c*) $b = 7$; (*d*) $a = 12$; (*e*) $AB = 35$; (*f*) $d = 2\frac{1}{4}$

33. (*a*) 8; (*b*) 6; (*c*) $26\frac{2}{3}$

34. (*a*) 42 pies; (*b*) 66 pies

37. (*a*) 8:5; (*b*) 3:5; (*c*) partido por la mitad (en cada caso)

38. (*a*) 15; (*b*) 60; (*c*) 25, 35, 40; (*d*) 4; (*e*) 6, 3

39. (*a*) 3:7; (*b*) 7:2; (*c*) cuadruplicado; (*d*) 7

43. (*a*) 5; (*b*) 14; (*c*) 6; (*d*) 5; (*e*) 12; (*f*) 13; (*g*) 48; (*h*) 2

44. 30, 18

45. (*a*) 8; (*b*) 6; (*c*) 12; (*d*) 5; (*e*) 7; (*f*) 12; (*g*) 30; (*h*) $7\frac{1}{2}$; (*i*) 5; (*j*) 8

46. (*a*) 8; (*b*) 13; (*c*) 21; (*d*) 6; (*e*) 9; (*f*) 14; (*g*) 3; (*h*) 8

47. (*a*) $a = 4$, $h = \sqrt{12}$ o $2\sqrt{3}$; (*b*) $c = 9$, $h = \sqrt{20}$ o $2\sqrt{5}$; (*c*) $q = 4$ y $b = \sqrt{80}$ o $4\sqrt{5}$; (*d*) $p = 18$, $h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

48. (*a*) 25; (*b*) 39; (*c*) $\sqrt{41}$; (*d*) 10; (*e*) $7\sqrt{2}$

49. (*a*) $b = 16$; (*b*) $a = 2\sqrt{7}$; (*c*) $a = 8$; (*d*) $b = 2\sqrt{3}$; (*e*) $b = 5\sqrt{2}$; (*f*) $b = \sqrt{3}$

50. (*a*) 9, 12; (*b*) 10, 24; (*c*) 80, 150°; (*d*) $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$

51. (*a*) 41; (*b*) $5\sqrt{5}$

52. (*a*) 12; (*b*) $10\sqrt{2}$; (*c*) $5\sqrt{5}$

53. Todos excepto (*h*)

54. (*a*) Sí; (*b*) no, puesto que $(2x)^2 + (3x)^2 \neq (4x)^2$

55. (*a*) 8; (*b*) 6; (*c*) $\sqrt{19}$; (*d*) $5\sqrt{3}$

56 (*a*) 15; (*b*) $2\sqrt{5}$; (*c*) 6

57. (*a*) 16; (*b*) 30; (*c*) $4\sqrt{3}$; (*d*) 10

58. (*a*) 10; (*b*) 12; (*c*) 28; (*d*) 15

59. (*a*) 5; (*b*) 20; (*c*) 15; (*d*) 25

60. (*a*) 12; (*b*) 24

61. 12

62. 30

63. (*a*) 10 and $10\sqrt{3}$; (*b*) $7\sqrt{3}$ y 14; (*c*) 5 y 10

64. (*a*) $11\sqrt{3}$; (*b*) $a\sqrt{3}$; (*c*) 48; (*d*) $16\sqrt{3}$

65. (*a*) 25 y $25\sqrt{3}$; (*b*) 35 y $35\sqrt{3}$

66. (*a*) 28, $8\sqrt{3}$; (*b*) 17, $14\sqrt{3}$

67. (*a*) $17\sqrt{2}$; (*b*) $a\sqrt{2}$; (*c*) $34\sqrt{2}$; (*d*) 30

68. (*a*) $20\sqrt{2}$; (*b*) $40\sqrt{2}$

69. (*a*) 45, $13\sqrt{2}$; (*b*) 11, $27\sqrt{2}$; (*c*) $15\sqrt{2}$, 55

70. $4\sqrt{2}$

71. $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$

CAPÍTULO 8

1. (*a*) 0.4226, 0.7431, 0.8572, 0.9998; (*b*) 0.9659, 0.6157, 0.2756, 0.0349; (*c*) 0.0699, 0.6745, 1.4281, 19.0811; (*d*) seno y tangente (*e*) coseno; (*f*) tangente

2. (*a*) $x = 20°$; (*b*) $A = 29°$; (*c*) $B = 71°$; (*d*) $A' = 21°$; (*e*) $y = 45°$; (*f*) $Q = 69°$; (*g*) $W = 19°$; (*h*) $B' = 67°$

3. (*a*) 26°; (*b*) 47°; (*c*) 69°; (*d*) 8°; (*e*) 40°; (*f*) 74°; (*g*) 7°; (*h*) 27°; (*i*) 80°; (*j*) 13° pues sen x = 0.2200; (*k*) 45° como seno x = 0.707; (*l*) 59° pues cos x = 0.5200; (*m*) 68° porque cos x = 0.3750; (*n*) 30° como cos x = 0.866; (*o*) 16° pues tan x = 0.2857; (*p*) 10° dado que tan x = 0.1732

4. (*a*) sen $A = \frac{4}{5}$, cos $A = \frac{3}{5}$, tan $A = \frac{4}{3}$; (*b*) sen $A = \frac{3}{5}$, cos $A = \frac{4}{5}$, tan $A = \frac{3}{4}$; (*c*) sen $A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, cos $A = \frac{3}{4}$, tan $A = \frac{\sqrt{7}}{3}$

5. (*a*) $m\angle A = 27°$ como cos A = 0.8900; (*b*) $m\angle A = 58°$ pues sen A = 0.8500; (*c*) $m\angle A = 52°$ como tan A = 1.2800

6. (*a*) $m\angle B = 42°$ pues sen B = 0.6700; (*b*) $m\angle B = 74°$ pues cos B = 0.2800; (*c*) $m\angle B = 68°$ pues tan B = 2.500; (*d*) $m\angle B = 30°$ pues tan B = 0.577

8. (*a*) 23°, 67°; (*b*) 28°, 62°; (*c*) 16°, 74°; (*d*) 10°, 80°

9. (*a*) $x = 188$, $y = 313$; (*b*) $x = 174$, $y = 250$; (*c*) $x = 123$, $y = 182$

10. (*a*) 82 pies; (*b*) 88 pies

11. 156 pies

12. (*a*) 2 530 pies; (*b*) 2 560 pies

13. (*a*) 21 pulgadas; (*b*) 79 pulgadas

14. 14

15. 16 y 18 pulgadas

16. 31 pies

17. 15 yardas

18. (*a*) 1 050 pies; (*b*) 9 950 pies

19. 7°

20. 282 pies

21. (*a*) 81°; (*b*) 45°

22. (*a*) 22 pies; (*b*) 104 pies

23. 754 pies

24. 404 pies

25. (*a*) 295 pies; (*b*) 245 pies; (*c*) 960 pies

26. (*a*) 234 pies; (*b*) 343 pies

27. (*a*) 96 pies; (*b*) 166 pies

28. (*a*) 9.1; (*b*) 22

CAPÍTULO 9

1. (*a*) 99 pulgadas cuadradas; (*b*) 3 pies cuadrados o 432 pulgadas cuadradas; (*c*) 500; (*d*) 120; (*e*) $36\sqrt{3}$; (*f*) $100\sqrt{3}$; (*g*) 300; (*h*) 150

2. (*a*) 48; (*b*) 432; (*c*) $25\sqrt{3}$; (*d*) 240

3. (*a*) 7 y 4; (*b*) 12 y 6; (*c*) 9 y 6; (*d*) 6 y 2; (*e*) 10 y 7; (*f*) 20 y 8

4. (*a*) 1 296 pulgadas cuadradas; (*b*) $30\frac{1}{4}$ yarda cuadrada; (*c*) 100 decímetros cuadrados (100 dm^2)

5. (*a*) 225; (*b*) $12\frac{1}{4}$: (*c*) 3.24; (*d*) $64a^2$; (*e*) 121; (*f*) $6\frac{1}{4}$; (*g*) $9b^2$; (*h*) 32; (*i*) $40\frac{1}{2}$; (*j*) 64

6. (*a*) 128; (*b*) 72; (*c*) 100; (*d*) 49; (*e*) 400

7. (*a*) 1600; (*b*) 400; (*c*) 100

8. (*a*) 9; (*b*) 36; (*c*) $9\sqrt{2}$; (*d*) $4\frac{1}{2}$; (*e*) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

9. (*a*) $2\frac{1}{2}$; (*b*) 52; (*c*) 10; (*d*) $5\sqrt{2}$; (*e*) 6; (*f*) 4

10. (*a*) 16 pies cuadrados; (*b*) 6 pies cuadrados u 864 pulgadas cuadradas; (*c*) 70; (*d*) 1.62 m^2

11. (*a*) $3x^2$; (*b*) x^2+3x; (*c*) x^2-25; (*d*) $12x^2+11x+2$

12. (*a*) 150; (*b*) $54\sqrt{2}$; (*c*) $56\sqrt{3}$; (*d*) 60; (*e*) 11; (*f*) 55

13. (*a*) 36; (*b*) 15; (*c*) 16

14. (*a*) $2\frac{2}{3}$; (*b*) 20; (*c*) 9; (*d*) 3; (*e*) 15; (*f*) 12; (*g*) 8; (*h*) 7

15. (a) 11 pulgadas cuadradas; (*b*) 3 pies cuadrados o $\frac{2}{3}$ yarda cuadrada; (*c*) $4x-28$; (*d*) $10x^2$; (*e*) $2x^2+18x$; (*f*) $\frac{1}{2}(x^2-16)$; (*g*) x^2-9

16. (*a*) 10; (*b*) $5\sqrt{2}$; (*c*) $24\sqrt{3}$; (*d*) $62\frac{1}{2}$; (*e*) 29; (*f*) 46

17. (*a*) 15; (*b*) 64; (*c*) $18\sqrt{3}$; (*d*) $8\sqrt{3}$; (*e*) 24; (*f*) 20

18. (*a*) 84; (*b*) 48; (*c*) 30; (*d*) 120; (*e*) 148; (*f*) 423; (*g*) $8\sqrt{3}$; (*h*) 9

19. (*a*) 24; (*b*) 2; (*c*) 4

20. (*a*) 8; (*b*) 10; (*c*) 8; (*d*) 18; (*e*) $9\frac{3}{5}$; (*f*) $12\frac{1}{2}$; (*g*) 12; (*h*) 18

21. (*a*) $25\sqrt{3}$; (*b*) $36\sqrt{3}$; (*c*) $12\sqrt{3}$; (*d*) $25\sqrt{3}$; (*e*) $b^2\sqrt{3}$; (*f*) $4x^2\sqrt{3}$; (*g*) $3r^2\sqrt{3}$

22. (*a*) $2\sqrt{3}$; (*b*) $\frac{49}{2}\sqrt{3}$; (*c*) $24\sqrt{3}$; (*d*) $18\sqrt{3}$

23. (*a*) $24\sqrt{3}$; (*b*) $54\sqrt{3}$; (*c*) $150\sqrt{3}$

24. (*a*) 15; (*b*) 8; (*c*) 12; (*d*) 5

25. (*a*) 140; (*b*) 69; (*c*) 225; (*d*) $60\sqrt{2}$; (*e*) 94

26. (*a*) 150; (*b*) 204; (*c*) 39; (*d*) $64\sqrt{3}$; (*e*) 160

27. (*a*) 4; (*b*) 7; (*c*) 18 y 9; (*d*) 9 y 6; (*e*) 10 y 5

28. (*a*) 17 y 9; (*b*) 23 y 13; (*c*) 17 y 11; (*d*) 5; (*e*) 13

29. (*a*) 36; (*b*) $38\frac{1}{2}$; (*c*) $12\sqrt{3}$; (*d*) $12x^2$; (*e*) 120; (*f*) 96; (*g*) 18; (*h*) $\frac{49}{2}\sqrt{2}$; (*i*) $32\sqrt{3}$; (*j*) $98\sqrt{3}$

30. (*a*) 737; (*b*) 14; (*c*) 77

31. (*a*) 10; (*b*) 12 y 9; (*c*) 20 y 10; (*d*) 5; (*e*) $\sqrt{10}$

32. 12

37. (a) $1:49$; (b) $49:4$; (c) $1:3$; (d) $1:25$; (e) $81:x^2$; (f) $9:x$; (g) $1:2$

38. (a) $49:100$; (b) $4:9$; (c) $25:36$; (d) $1:9$; (e) $9:4$; (f) $1:2$

39. (a) $10:1$; (b) $1:7$; (c) $20:9$; (d) $5:11$; (e) $2:y$; (f) $3x:1$; (g) $\sqrt{3}:2$; (h) $1:\sqrt{2}$; (i) $x:\sqrt{5}$; (j) $\sqrt{x}:4$

40. (a) $6:5$; (b) $3:7$; (c) $\sqrt{3}:1$; (d) $\sqrt{5}:2$; (e) $\sqrt{3}:3$ o $1:\sqrt{3}$

41. (a) 100; (b) $12\frac{1}{2}$; (c) 12; (d) 100; (e) 105; (f) 18; (g) $20\sqrt{3}$

42. (a) 12; (b) 63; (c) 48; (d) $2\frac{1}{2}$; (e) 45

CAPÍTULO 10

1. (a) 200; (b) 24.5; (c) 112; (d) 13; (e) 9; (f) $3\frac{1}{3}$; (g) 4.5

2. (a) $12\frac{1}{2}$; (b) 23.47; (c) $7\sqrt{3}$; (d) 18.5; (e) $3\sqrt{2}$

3. (a) 24°; (b) 24°; (c) 156°

4. (a) 40°; (b) 9; (c) 140°

5. (a) 15°; (b) 15°; (c) 24

6. (a) 5°; (b) 72°; (c) 175°

7. (a) octágono regular; (b) hexágono regular; (c) triángulo equilátero; (d) decágono regular; (e) cuadrado; (f) dodecágono regular (12 lados)

9. (a) 9; (b) 30; (c) $6\sqrt{3}$; (d) 6; (e) $13\sqrt{3}$; (f) 6; (g) $20\sqrt{3}$; (h) 60

10. (a) $18\sqrt{2}$; (b) $7\sqrt{2}$; (c) 40; (d) $8\sqrt{2}$; (e) 3.4; (f) 28; (g) $5\sqrt{2}$; (h) $2\sqrt{2}$

11. (a) $30\sqrt{3}$; (b) 14; (c) 27; (d) 18; (e) $8\sqrt{3}$; (f) $4\sqrt{3}$; (g) $48\sqrt{3}$; (h) 42; (i) 6; (j) 10; (k) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; (l) $3\sqrt{3}$

12. (a) 817; (b) 3078

13. (a) $54\sqrt{3}$; (b) $96\sqrt{3}$; (e) $600\sqrt{3}$

14. (a) 576; (b) 324; (c) 100

15. (a) $36\sqrt{3}$; (b) $27\sqrt{3}$; (c) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$; (d) $144\sqrt{3}$; (e) $3\sqrt{3}$; (f) $48\sqrt{3}$

16. (a) 10; (b) 10; (c) $5\sqrt{3}$

17. (a) 18; (b) $9\sqrt{3}$; (c) $6\sqrt{3}$; (d) $3\sqrt{3}$

18. (a) $1:8$; (b) $4:9$; (c) $9:10$; (d) $8:11$; (e) $3:1$; (f) $2:5$; (g) $4\sqrt{2}:3$; (h) $5:2$

19. (a) 5:2; (b) 1:5; (c) 1:3; (d) 3:4; (e) 5:1

20. (a) 5:1; (b) 4:7; (c) $x:2$; (d) $\sqrt{2}:1$; (e) $\sqrt{3}:y$; (f) $\sqrt{x}:3\sqrt{2}$ o $\sqrt{2x}:6$

21. (a) 1:4; (b) 1:25; (e) 36:1; (d) 9:100; (e) 49:25

22. (a) 12π; (b) 14π; (c) 10π; (d) $2\pi\sqrt{3}$

23. (a) 9π; (b) 25π; (c) 64π; (d) $\frac{1}{4}\pi$; (e) 18π

24. (a) $C = 10\pi$, $A = 25\pi$; (b) $r = 8$, $A = 64\pi$; (c) $r = 4$, $C = 8\pi$

25. (a) 12π; (b) 4π; (c) 7π; (d) 26π; (e) $8\pi\sqrt{3}$; (f) 3π

26. (a) 98π; (b) 18π; (c) 32π; (d) 25π; (e) 72π; (f) 100π

27. (a) (1) $C = 8\pi$, $A = 16\pi$; (2) $C = 4\sqrt{3}\pi$, $A = 12\pi$
(b) (1) $C = 16\pi$, $A = 64\pi$; (2) $C = 8\sqrt{3}\pi$, $A = 48\pi$
(c) (1) $C = 12\pi$, $A = 36\pi$; (2) $C = 6\pi$, $A = 9\pi$
(d) (1) $C = 16\pi$, $A = 64\pi$; (2) $C = 8\pi$, $A = 16\pi$
(e) (1) $C = 20\sqrt{2}\pi$, $A = 200\pi$; (2) $C = 20\pi$, $A = 100\pi$
(f) (1) $C = 6\sqrt{2}\pi$, $A = 18\pi$; (2) $C = 6\pi$, $A = 9\pi$

28. (a) 10 pies; (b) 17 pies; (c) $3\sqrt{5}$ pies o 6.7 pies

29. (a) 2π; (b) 10π; (c) 8; (d) 11π; (e) 6π; (f) 10π

30. (a) 3π; (b) $12\frac{1}{2}$; (c) 5π; (d) 2π; (e) π; (f) 4π

31. (a) 6π; (b) $\pi/6$; (c) $25\pi/6$; (d) 25π; (e) $4\frac{1}{2}$; (f) 13; (g) 24π; (h) $8\pi/3$

32. (a) 6π; (b) 20; (c) 3π; (d) 16π

33. (a) 120°; (b) 240°; (c) 36°; (d) 180°; (e) 135°; (f) $(180/\pi)°$ o 57.3° al más cercano a 10

34. (a) 72°; (b) 270°; (c) 40°; (d) 150°; (e) 320°

35. (a) 90°; (b) 270°; (c) 45°; (d) 36°

36. (a) 12; (b) 9; (c) 10; (d) 6; (e) 5; (f) $3\sqrt{2}$

37. (a) 4; (b) 10; (c) 10 cm; (d) 9

38. (a) $6\pi - 9\sqrt{3}$; (b) $24\pi - 36\sqrt{3}$; (c) $\frac{2}{3}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$; (d) $\dfrac{\pi r^2}{6} - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$; (e) $\dfrac{2\pi r^2}{3} - r^2\sqrt{3}$

39. (a) $4\pi - 8$; (b) $150\pi - 225\sqrt{3}$; (c) $24\pi - 36\sqrt{3}$; (d) $16\pi - 32$; (e) $50\pi - 100$

40. (a) $\dfrac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3}$; (b) $24\pi - 16\sqrt{2}$; (c) $\dfrac{80\pi}{3} - 16$

41. (*a*) $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$; (*b*) $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$; (*c*) $4\pi - 8$

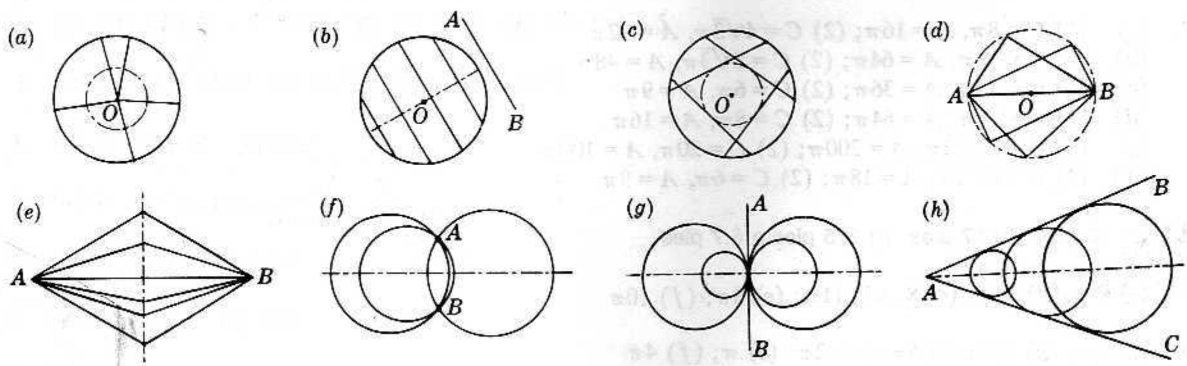
42. (*a*) $12\pi - 9\sqrt{3}$; (*b*) $\frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$; (*c*) $9\pi - 18$

43. (*a*) $200 - 25\pi/2$; (*b*) $48 + 26\pi$; (*c*) $25\sqrt{3} - 25\pi/2$; (*d*) $100\pi - 96$; (*e*) $128 - 32\pi$; (*f*) $300\pi + 400$; (*g*) 39π; (*h*) 100

44. (*a*) 36π; (*b*) $36\sqrt{3} + 18\pi$; (*c*) 14π

CAPÍTULO 11

1. La descripción de cada lugar geométrico se deja al lector.



2. Los diagramas se dejan al lector.
(*a*) La línea paralela a la orilla y a la mitad de la distancia entre ellas.
(*b*) La bisectriz (mediatriz) perpendicular del segmento que une las dos figuras.
(*c*) La bisectriz (mediatriz) del ángulo entre las figuras.
(*d*) El par de bisectrices (mediatrices) de los ángulos entre las figuras.

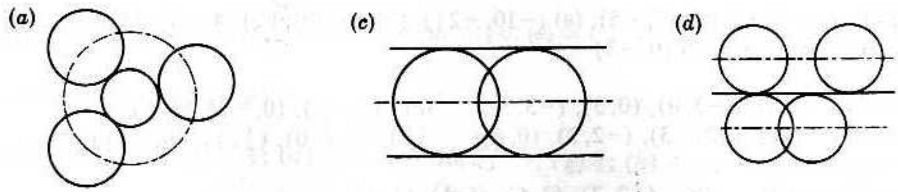
3. Los diagramas se dejan al lector.
(*a*) El círculo que tiene al origen como centro y la distancia dada como radio.
(*b*) Un círculo concéntrico, fuera de éste, y la distancia marcada fuera de él.
(*c*) El par de líneas paralelas a cada lado de la fila y a 20 pies de ésta.
(*d*) Un círculo que tiene el centro del reloj como centro y las manecillas del reloj como su radio.

4. (*a*) $\overline{EF}$; (*b*) $\overline{GH}$; (*c*) $\overline{EF}$; (*d*) $\overline{GH}$; (*e*) $\overline{EF}$; (*f*) $\overline{GH}$; (*g*) $\overline{AB}$; (*h*) 90° son de *A* a *G* con *B* como su centro

5. (*a*) $\overline{AC}$; (*b*) $\overline{BD}$; (*c*) $\overline{BD}$; (*d*) $\overline{AC}$; (*e*) *E*

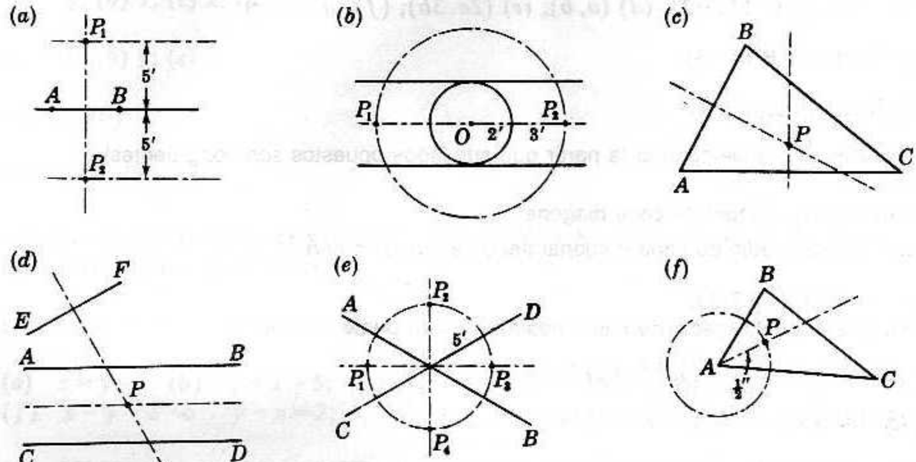
6. En cada caso la letra se refiere a la circunferencia del círculo. (*a*) *A*; (*b*) *C*; (*c*) *B*; (*d*) *A*; (*e*) *C*; (*f*) *A* y *C*; (*g*) *B*

7. La descripción de cada lugar geométrico se deja al lector.



8. (*a*) $\overline{EF}$; (*b*) $\overline{GH}$; (*c*) línea paralela a $\overline{AD}$ y $\overline{EF}$ a la mitad entre ellas; (*d*) $\overline{EF}$; (*e*) $\overline{BC}$; (*f*) $\overline{GH}$

9. La explicación se deja al lector.



10. (*a*) La intersección de los ángulos bisectados.
(*b*) La intersección de dos de las $\perp$ bisectrices de los lados.
(*c*) La intersección de la $\perp$ bisectriz de $\overline{AB}$ y la bisectriz del $\angle B$
(*d*) La intersección de la bisectriz del $\angle C$ y un círculo con C como centro y 5 como radio.
(*e*) La intersección de dos círculos, uno con B como centro y 5 como radio y el otro con A como centro y 10 como radio

11. (*a*) 1; (*b*) 1; (*c*) 4; (*d*) 2; (*e*) 2; (*f*) 1

CAPÍTULO 12

1. $A(3,0)$; $B(4,3)$; $C(3,4)$; $D(0,2)$; $E(-2,4)$; $F(-4,2)$; $G(-1,0)$; $H(-3\frac{1}{2},-2)$; $I(-2,-3)$; $J(0,-4)$; $K(1\frac{1}{2},-2\frac{1}{2})$; $L(4,-2\frac{1}{2})$

3. Perímetro del cuadrado formado de 20 unidades; su área es de 25 unidades cuadradas.

4. El área del paralelogramo = 30 unidades cuadradas.
El área del $\triangle BCD$ = 15 unidades cuadradas.

5. (*a*) $(4,3)$; (*b*) $(2\frac{1}{2},3\frac{1}{2})$; (*c*) $(-4,6)$; (*d*) $(7,-5)$; (*e*) $(-10,-2\frac{1}{2})$; (*f*) $(0,10)$; (*g*) $(4,-1)$; (*h*) $(-5,-2\frac{1}{2})$; (*i*) $(5,5)$; (*j*) $(-3,-10)$; (*k*) $(5,6)$; (*l*) $(0,-3)$

6. (*a*) $(4,0)$, $(0,3)$, $(4,3)$; (*b*) $(-3,0)$, $(0,5)$, $(-3,5)$; (*c*) $(6,-2)$, $(0,-2)$, $(6,0)$; (*d*) $(4,6)$, $(4,9)$, $(3,8)$; (*e*) $(2,-3)$, $(-2,2)$, $(0,5)$; (*f*) $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,-1\frac{1}{2})$

7. (*a*) $(0,2)$, $(1,7)$, $(4,5)$, $(3,0)$; (*b*) $(-2,7)$, $(3,6)$, $(6,1)$, $(1,2)$; (*c*) $(-1,2)$, $(3,3)$, $(3,-4)$, $(-1,-5)$; (*d*) $(-2,1)$, $(4,2\frac{1}{2})$, $(7,-4)$, $(1,-7\frac{1}{2})$

8. (*a*) $(2,6)$, $(4,3)$; (*b*) $(1,0)$, $(0,-2\frac{1}{2})$; (*c*) punto medio común, (2,2)

9. (*a*) $(-2,3)$; (*b*) $(-3,-6)$; (*c*) $(-1\frac{1}{2},-2)$; (*d*) (a,b); (*e*) $(2a,3b)$; (*f*) $(a,b+c)$

10. (*a*) $M(4,8)$; (*b*) $A(-1,0)$; (*c*) $B(6,-3)$

11. (*a*) $B(2,3\frac{1}{2})$; (*b*) $D(3,3)$; (*c*) $A(-2,9)$

12. (*a*) Pruebe que *ABCD* es un paralelogramo (a partir que sus lados opuestos son congruentes) y tiene un $\angle$ derecho.
(*b*) El punto $(3,2\frac{1}{2})$ es el punto medio de cada diagonal.
(*c*) Sí, a partir que el punto medio de cada diagonal tiene su punto común.

13. (*a*) $D(3,2)$, $(1\frac{1}{2},1)$; (*b*) $E(0,2)$, $(3,1)$;
(*c*) No, si se parte de que el punto medio de cada media no es un punto común.

14. (*a*) 5; (*b*) 6; (*c*) 10; (*d*) 12; (*e*) 5.4; (*f*) 7.5; (*g*) 9; (*h*) a

15. (*a*) 3, 3, 6; (*b*) 4, 14, 18; (*c*) 1, 3, 4; (*d*) a, $2a$, $3a$

16. (*a*) 13; (*b*) 5; (*c*) 15; (*d*) 5; (*e*) 10; (*f*) 15; (*g*) $3\sqrt{2}$; (*h*) $5\sqrt{2}$; (*i*) $\sqrt{10}$; (*j*) $2\sqrt{5}$; (*k*) 4; (*l*) $a\sqrt{2}$

18. (*a*) $\triangle ABC$; (*b*) $\triangle DEF$; (*c*) $\triangle GHJ$; (*d*) $\triangle KLM$ no es un $\triangle$ rectángulo.

19. (*a*) $5\sqrt{2}$; (*b*) $\sqrt{5}$; (*c*) $\sqrt{65}$

21. (*a*) 10; (*b*) 5; (*c*) $\sqrt{2}$; (*d*) 13; (*e*) 4; (*f*) 3

22. (*a*) sobre; (*b*) sobre; (*c*) fuera; (*d*) sobre; (*e*) adentro; (*f*) adentro; (*g*) sobre.

23. (*a*) $\frac{9}{5}$; (*b*) $\frac{5}{9}$; (*c*) $\frac{5}{2}$; (*d*) 3; (*e*) 2; (*f*) 1; (*g*) 5; (*h*) -2; (*i*) -3; (*j*) $\frac{3}{2}$; (*k*) -1; (*l*) 1

24. (*a*) 3; (*b*) 4; (*c*) $-\frac{1}{2}$; (*d*) -7; (*e*) 5; (*f*) 0; (*g*) 3; (*h*) 5; (*i*) -4; (*j*) $-\frac{2}{3}$; (*k*) -1; (*l*) -2; (*m*) 5; (*n*) 6; (*o*) -4; (*p*) -8

25. (*a*) 72°; (*b*) 18°; (*c*) 68°; (*d*) 22°; (*e*) 45°; (*f*) 0°

26. (*a*) 0.0875; (*b*) 0.3057; (*c*) 0.3640; (*d*) 0.7002; (*e*) 1; (*f*) 3.2709; (*g*) 11.430

27. (*a*) 0°; (*b*) 25°; (*c*) 45°; (*d*) 55°; (*e*) 7°; (*f*) 27°; (*g*) 37°; (*h*) 53°; (*i*) 66°

28. (*a*) $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$; (*b*) $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DE}$; (*c*) $\overline{AF}$, $\overline{CD}$; (*d*) $\overline{AB}$, $\overline{EF}$

29. (*a*) 0; (*b*) sin inclinación; (*c*) 5; (*d*) -5; (*e*) 0.5; (*f*) -0.0005

30. (*a*) 0; (*b*) sin inclinación; (*c*) sin inclinación; (*d*) 0; (*e*) 5; (*f*) -1; (*g*) 2

31. (*a*) $\frac{3}{2}$; (*b*) $\frac{7}{3}$; (*c*) -1; (*d*) 6

32. (*a*) -2; (*b*) -1; (*c*) $-\frac{1}{3}$; (*d*) $-\frac{2}{5}$; (*e*) -10; (*f*) 1; (*g*) $\frac{5}{4}$; (*h*) $\frac{4}{13}$; (*i*) sin inclinación; (*j*) 0

33. (*a*) 0; (*b*) -2; (*c*) 3; (*d*) -1

34. (*a*) $-\frac{3}{2}$; (*b*) $\frac{2}{3}$; (*c*) $-\frac{3}{2}$

35. (*a*) $-\frac{1}{2}$; (*b*) 1; (*c*) 2; (*d*) -1

36. (*a*) $-\frac{3}{2}$; (*b*) $\frac{1}{4}$; (*c*) $\frac{5}{6}$

37. (*a*) y (*b*)

38. (*a*) 19; (*b*) 9; (*c*) 2

39. (*a*) $x=-5$; (*b*) $y=3\frac{1}{2}$; (*c*) $y=3$ y $y=-3$; (*d*) $y=-5$; (*e*) $x=4$ y $x=-4$; (*f*) $x=5$ y $x=-1$; (*g*) $y=4$; (*h*) $x=1$; (*i*) $x=9$

40. (*a*) $x=6$; (*b*) $y=5$; (*c*) $x=6$; (*d*) $x=5$; (*e*) $x=6$; (*f*) $y=3$

41. (*a*) $x=y$; (*b*) $y=x+5$; (*c*) $x=y-4$; (*d*) $y-x=10$; (*e*) $x+y=12$; (*f*) $x-y=2$ o $y-x=2$; (*g*) $x=y$ y $x=-y$; (*h*) $x+y=5$

42. (*a*) la línea tiene *y*-intercepción 5, pendiente 2;
(*b*) la línea pasa a través de (2,3), pendiente 4;
(*c*) la línea pasa a través (–2,–3), pendiente $\frac{5}{4}$;
(*d*) la línea pasa por el origen, pendiente $\frac{1}{2}$;
(*e*) la línea tiene *y*-intercepción 7, pendiente -1;
(*f*) la línea pasa por el origen, pendiente $\frac{1}{3}$

43. (*a*) $y=4x$; (*b*) $y=-2x$; (*c*) $y=\frac{3}{2}x$ o $2y=3x$; (*d*) $y=-\frac{2}{5}x$ o $5y=-2x$; (*e*) $y=0$

44. (*a*) $y=4x+5$; (*b*) $y=-3x+2$; (*c*) $y=\frac{1}{3}x-1$ o $3y=x-3$; (*d*) $y=3x+8$; (*e*) $y=-4x-3$; (*f*) $y=2x$ o $y-2x=0$

45. (*a*) $\dfrac{y-4}{x-1}=2$ o $y=2x+2$; (*b*) $\dfrac{y-3}{x+2}=2$ o $y=2x+7$; (*c*) $\dfrac{y}{x+4}=2$ o $y=2x+8$; (*d*) $\dfrac{y+7}{x}=2$ o $y=2x-7$

46. (*a*) $y=4x$; (*b*) $y=\frac{1}{2}x+3$; (*c*) $\dfrac{y-2}{x-1}=3$; (*d*) $\dfrac{y+2}{x+1}=\dfrac{1}{3}$; (*e*) $y=2x$

47. (*a*) Círculo con centro en el origen y radio 7; (*b*) $x^2+y^2=16$; (*c*) $x^2+y^2=64$ y $x^2+y^2=4$

48. (*a*) $x^2+y^2=25$; (*b*) $x^2+y^2=81$; (*c*) $x^2+y^2=4$ o $x^2+y^2=144$

49. (*a*) 3; (*b*) $\frac{4}{3}$; (*c*) 2, (*d*) $\sqrt{3}$

50. (*a*) $x^2+y^2=16$; (*b*) $x^2+y^2=121$; (*c*) $x^2+y^2=\frac{4}{9}$ o $9x^2+9y^2=4$; (*d*) $x^2+y^2=\frac{9}{4}$ o $4x^2+4y^2=9$; (*e*) $x^2+y^2=5$; (*f*) $x^2+y^2=\frac{3}{4}$ o $4x^2+4y^2=3$

51. (*a*) 10; (*b*) 10; (*c*) 20; (*d*) 20; (*e*) 7; (*f*) 25

52. (*a*) 16; (*b*) 12; (*c*) 20; (*d*) 24

53. (*a*) 10; (*b*) 12; (*c*) 22

54. (*a*) 5; (*b*) 13; (*c*) $7\frac{1}{2}$

55. (*a*) 6; (*b*) 10; (*c*) 1.2

56. (*a*) 15; (*b*) 49; (*c*) 53

57. (*a*) 30; (*b*) 49; (*c*) 88; (*d*) 24; (*e*) 16; (*f*) 18

CAPÍTULO 13

1. (*a*) $<$; (*b*) $>$; (*c*) $>$; (*d*) $>$; (*e*) $>$; (*f*) $<$

2. (*a*) $>$; (*b*) $>$; (*c*) $<$; (*d*) $>$

3. (*a*) $>$; (*b*) $<$; (*c*) $<$; (*d*) $>$

4. (*a*) más; (*b*) menos

5. (*a*) $>$; (*b*) $>$; (*c*) $<$; (*d*) $>$; (*e*) $<$; (*f*) $<$

6. (*c*), (*d*) y (*e*)

7. (*a*) 5 a 7; (*b*) 6 a 10; (*c*) 4 a 10; (*d*) 3 a 9; (*e*) 2 a 8; (*f*) 1 a 13

8. (*a*) $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$; (*b*) $\overline{DF}$, $\overline{EF}$, $\overline{DE}$; (*c*) $\angle 3$, $\angle 2$, $\angle 1$

9. (*a*) $m\angle BAC > m\angle ACD$; (*b*) $AB > BC$

10. (*a*) $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$; (*b*) $\angle BOC$, $\angle AOB$, $\angle AOC$; (*c*) $\overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC}$;
(*d*) $\overline{OG}$, $\overline{OH}$, $\overline{OJ}$

CAPÍTULO 14

1. (*a*) Adornos, joyería, anillo, anillo de bodas; (*b*) vehículo, automóvil, automóvil comercial, camioneta;
(*c*) polígono, cuadrilátero, paralelogramo, rombo;
(*d*) ángulo, ángulo obtuso, triángulo obtuso, triángulo isósceles obtuso.

2. (*a*) Un polígono regular es un polígono equilateral y equiangular.
(*b*) Un triángulo isósceles es un triángulo con lo menos dos lados congruentes.
(*c*) Un pentágono es un polígono con cinco lados.
(*d*) Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.
(*e*) Un ángulo inscrito es un ángulo formado por dos cuerdas y que tiene su vértice sobre la circunferencia del círculo.

(*f*) Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
(*g*) Un ángulo obtuso es un ángulo más grande que un ángulo recto y menor que un ángulo derecho.

3. (*a*) $x + 2 \neq 4$; (*b*) $3y = 15$; (*c*) Ella no te ama. (*d*) Su marca fue mayor de 65.
(*e*) Joe no es más pesado que Dick. (*f*) $a + b = c$

4. (*a*) Una figura no cuadrilátera no tiene diagonales congruentes. Falso (por ejemplo, cuando se aplica a un rectángulo o un polígono regular).
(*b*) Un triángulo no equiangular no es equilátero. Cierto.
(*c*) Una persona que no se ha graduado es casada. El inverso es falso cuando se aplica a las solteras.
(*d*) Un número que no es cero es un número positivo. El inverso es falso cuando se aplica a los números negativos.

5. (*a*) Verdad recíproca, verdad inversa, verdad contrapositiva
(*b*) Falsa recíproca, falsa inversa, verdad contrapositiva
(*c*) Verdad recíproca, verdad inversa, verdad contrapositiva
(*d*) Falsa recíproca, falsa inversa, verdad contrapositiva

6. (*a*) Reciprocidades parciales: intercambio (*2*) y (*3*) o (*1*) y (*3*).
Inversas parciales: negación: (*1*) y (*3*) o (*2*) y (*3*).
(*b*) Reciprocidades parciales: intercambio (*1*) y (*4*) o (*2*) y (*4*) o (*3*) y (*4*).
Inversas parciales: negación (*1*) y (*4*) o (*2*) y (*4*) o (*3*) y (*4*).

7. (*a*) Necesario y suficiente; (*b*) Necesario pero no suficiente;
(*c*) Ni necesario ni suficiente; (*d*) Suficiente pero no necesario;
(*e*) Necesario y suficiente; (*f*) Suficiente pero no necesario;
(*g*) Necesario pero no suficiente

CAPÍTULO 17

1. (*a*) $6(7^2)$ o 294 yardas cuadradas; (*b*) $2(8)(6\frac{1}{2}) + 2(8)(14) + 2(6\frac{1}{2})(14)$ o 510 pies cuadrados
(*c*) $4(3.14)30^2$ u $11\,304 \text{ m}^2$; (*d*) $2(3.14)(10)(10 + 4\frac{1}{2})$ o 911 varas cuadradas

2. (*a*) 36^3 o 46 656 pulgadas cúbicas (*b*) 100^3 o $1\,000\,000 \text{ cm}^3$

3. (*a*) 27 pulgadas cúbicas; (*b*) 91 pulgadas cúbicas; (*c*) 422 pulgadas cúbicas;
(*d*) 47 pulgadas cúbicas; (*e*) 2 744 pulgadas cúbicas

4. (*a*) $3(8\frac{1}{2})(8)$ o 204 pulgadas cúbicas; (*b*) $2(9)(9)$ o 162 pies cúbicos; (*c*) $\frac{1}{3}(6)(6.4)$ o 13 pies cúbicos

5. (*a*) 904 m^3; (*b*) 1 130 pies cúbicos; (*c*) 18 pies cúbicos

6. (*a*) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; (*b*) $V = \frac{1}{3}s^2 h$; (*c*) $V = \frac{1}{3}lwh$; (*d*) $V = \frac{2}{3}\pi r^3$

7. (*a*) $6e^3 + \dfrac{2e^2h}{3}$; (*b*) $lwh + \dfrac{\pi l^2 w}{8}$; (*c*) $3\pi r^3$

CAPÍTULO 18

1. (*a*) C; (*b*) D; (*c*) B; (*d*) $\overline{AD}$

2. Rectángulo $A'C'B'D'$, donde $A' = A$, $C' = D$, $B' = B$ y $D' = C$

3. Cierto

4. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ (donde E = punto medio de $\overline{AD}$, F = punto medio de $\overline{CB}$) y $\overline{GH}$ (donde G = punto medio de $\overline{AC}$, H = punto medio de $\overline{DB}$).

6. Cada uno tiene un eje de simetría.

7. (*a*) $B' = (-2, 0)$; (*b*) $A' = (-2, -2)$; (*c*) $(0, 0)$; (*d*) $\triangle A'OB'$, donde A' y B' son $(-2,-2)$ y $(-2,0)$

8. (*a*) E; (*b*) C; (*c*) $\overline{DC}$; (*d*) $\overline{B'C'}$, donde $B' = (-1, 1)$ y $C' = (1, -1)$;
(*e*) $A'B'C'D'$, donde $A' = D$, $B' = C$, $C' = B$, $D' = A$

9. (*a*) $(3, 11)$; (*b*) $(7, 8)$; (*c*) $(1, 3)$; (*d*) $(2, 4)$

10. $A' = (2, 6)$, $B' = (2, 7)$, $C' = (4, 7)$, $D' = (4, 6)$

11. $h = -3$, $k = -4$; $T(-8, -6) = (-11, -10)$

12. (*a*) $(4, -3)$; (*b*) $(3 + h, 7 + k)$; (*c*) $(e + h, f + k)$; (*d*) $(5, 2)$

13. (*a*) $\overline{EF}$; (*b*) $E' = (1, 1)$, $F' = (2, 0)$; (*c*) $E' = (0, 2)$, $F' = (1, 1)$;
(*d*) $O' = O$, $E' = E$, $F' = F$

14. (*a*) $(-1, 4)$; (*b*) $(-3, 0)$; (*c*) $\overline{y'x'}$, donde $y' = (-3, 0)$ y $x' = (-1, 4)$

15. $O' = O$, $E' = (0, -1)$, $F' = (-1, 0)$; $\triangle E'O'F'$ es la imagen

16. (*a*) $(0, -1)$ y $(-1, 1)$; (*b*) $(0, 1)$ y $(-1, 0)$;
(*c*) $O'A'B'C'$, donde $O' = O$, $A' = (0, 1)$, $B' = (-1, 1)$, y $C' = (-1, 0)$

17. (*a*) $(-\frac{1}{3}, 1)$; (*b*) $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$; (*c*) $(0, 0)$; (*d*) $(5, 30)$

18. $n = \frac{5}{3}$; $(0, -\frac{35}{3})$

19. (*a*) $O' = O$, $A' = (0, \frac{1}{2})$, $B' = (\frac{1}{2}, 0)$; la imagen es $\triangle OA'B'$; (*b*) punto medio $= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
la imagen es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Índice analítico